کلاسیکی برق و مقناطیسیت

ولف گانگ، کے۔ ایچ پینوفسکی

اور

میلبا فلپس

کلاسیکی برق و مقناطیسیت

کلاسیکی برق و مقناطیسیت

مصنف

ولف گانگ۔ کے۔ ایچ پینوفسکی

اور

میلبا فلپس

مترجم

بی۔ پی۔ سکسینہ

ترقی اردو بیورو نئی دہلی

CLASSICAL ELETRICITY AND MAGNETISIM
Transited by : B. P. Saxena

© ترقی اردو بیورو، نئی دہلی

سنہ اشاعت جنوری، مارچ 1985 شک 1906
پہلا ایڈیشن 1000
قیمت :۔ 50/00 روپے
سلسلہ مطبوعات نمبر 480

ناشر: ڈائرکٹر ترقی اردو بیورو ویسٹ بلاک 8 آر کے پورم نئی دہلی 66
طابع:۔ سپر پرنٹرز ساو تھ انارکلی دہلی 110051

پیش لفظ

کوئی بھی زبان یا معاشرہ اپنے ارتقاء کی کس منزل میں ہے، اس کا اندازہ اس کی کتابوں سے ہوتا ہے۔ کتابیں علم کا سرچشمہ ہیں، اور انسانی تہذیب کی ترقی کا کوئی تصور ان کے بغیر ممکن نہیں۔ کتابیں دراصل وہ صحیفے ہیں جن میں علوم کے مختلف شعبوں کے ارتقاء کی داستان رقم ہے اور آئندہ کے امکانات کی بشارت بھی ہے۔ ترقی پذیر معاشروں اور زبانوں میں کتابوں کی اہمیت اور بھی بڑھ جاتی ہے۔ کیونکہ سماجی ترقی کے عمل میں کتابیں نہایت مؤثر کردار ادا کر سکتی ہیں۔ اُردو میں اس مقصد کے حصول کے لیے حکومتِ ہند کی جانب سے ترقی اُردو بیورو کا قیام عمل میں آیا جسے ملک کے عالموں، ماہروں اور فن کاروں کا بھرپور تعاون حاصل ہے۔

ترقی اُردو بیورو معاشرہ کی موجودہ ضرورتوں کے پیش نظر اب تک اُردو کے کئی ادبی شاہکار، سائنسی علوم کی کتابیں، بچوں کی کتابیں، جغرافیہ، تاریخ، سماجیات، سیاسیات، تجارت زراعت، لسانیات، قانون، طب اور علوم کے کئی دوسرے شعبوں سے متعلق کتابیں شائع کر چکا ہے اور یہ سلسلہ برابر جاری ہے۔ بیورو کے اشاعتی پروگرام کے تحت شائع ہونے والی کتابوں کی افادیت اور اہمیت کا اندازہ اس سے بھی لگایا جا سکتا ہے کہ مختصر عرصے میں بعض کتابوں کے دوسرے تیسرے ایڈیشن شائع کرنے کی ضرورت محسوس ہوئی ہے۔ بیورو سے شائع ہونے والی کتابوں کی قیمت نسبتاً کم رکھی جاتی ہے تاکہ اُردو والے ان سے زیادہ سے زیادہ فائدہ اُٹھا سکیں۔

زیرِ نظر کتاب بیورو کے اشاعتی پروگرام کے سلسلہ کی ایک اہم کڑی ہے۔ امید کہ اُردو حلقوں میں اسے پسند کیا جائے گا۔

ڈاکٹر فہمیدہ بیگم
ڈائریکٹر ترقی اُردو بیورو

فہرست مضامین

باب 1. خلا میں برق سکونی میدان 15 تا 48
1-1 ویکٹر میدان
1-2 برقی میدان
1-3 کولوم قانون
1-4 برق سکونی مضمر
1-5 چارج تقسیم کی رو سے مضمر
1-6 میدانی تُندرتیں
1-7 نقطہ چارجوں (کے جھنڈ)
1-8 (دو دو پولوں کے آپسی تفاعل) دو قطبی تفاعل
1-9 ندرتیں
1-10 دو قطبیہ گردشہ کی حجمی تقسیم
باب 2. حدی شرائط مائیکرو اور میکرو میدانوں کے درمیان رشتہ 49 تا 65
2-1 نقل ویکٹر
2-2 حدی شرائط
2-3 ایک مادّی وسیلہ میں برقی میدان
2-4 تقلیب پذیری
باب 3. مضمر مسائل کے حل کے لیے عام طریقے 66 تا 92
3-1 یکتائی مصدقہ

3-2 گرین کا مصدقہ متکافیت 66
3-3 گرین فنکشن کے ذریعہ حل تا
3-4 تقلیب کے ذریعہ حل
3-5 برقی شبیہوں کے ذریعہ حل
3-6 متغیروں کو الگ کرکے لاپلاس مساوات کا حل 92
باب 4. دو (ابعادی) مضمر مسئلے 93
4-1 (جوڑی دار) روج مخلوط فنکشن تا
4-2 صلاحیت اور میدانی شدت
4-3 یکساں میدان کا مضمر
4-4 خطی چارج کا مضمر
4-5 مخلوط استحالے
4-6 عام شوارز استحالہ
4-7 یک زاویہ استحالے
4-8 کثیر زاویہ استحالے
4-9 ہارمونکوں کے طریقہ سے لاپلاس مساوات کا سیدھا حل
4-10 مثال: خطی چارج اور ڈائلکٹرک دبرق گذار سلنڈر
4-11 خطی چارج جو دو چالکوں کے بیچ کے زاویے میں واقع ہے 119
باب 5. سہ ابعادی مضمر مسائل 120
5-1 لاپلاس کے مساوات کا کروی سمتی قدروں میں حل تا
5-2 نقطہ چارج کا مضمر
5-3 ڈائلکٹرک کرہ اور نقطہ چارج کا مضمر
5-4 یکساں میدان میں ایک ڈائلکٹرک کرہ کا مضمر
5-5 من مانے اختیاری محور کے گرد متناسب کروی مضمر تقسیم کا مضمر
5-6 ایک چارج شدہ چھلے کا مضمر
5-7 وہ مسائل جن میں محوری تشاکل نہیں ہے۔ 173

.. لاپلاس کے مساوات کا سلنڈری سمتی قدروں میں حل

5-9 مضمری مسئلوں میں سلنڈری حلوں کا اطلاق

باب 6. برق سکونی میدان میں توانائی رشتے اور قوتیں 138 تا

6-1 آزاد خلا میں میدان توانائی

6-2 ایک برق گذار (ڈائیلکٹرک) کے اندر توانائی کثافت

6-3 کی حر، حرکیاتی تفسیر

6-4 تماسن کا مصدقہ

6-5 میکسویل کا زور ٹینسر

6-6 برق گذاروں کی موجودگی میں برق سکونی میدان میں حجمی قوتیں

6-7 برق سکونی میدان میں برق گذار رفیقوں کا رویہ 168

باب 7. مستقل کرنٹ اور ان کے تفاعل

7-1 اوم کا قانون 169

7-2 برق محرک قوت تا

7-3 قائم کرنٹ مسئلوں کے حل

7-4 متجانس وسیلے میں استراحت کا وقت

7-5 مستقل خطی کرنٹوں کا مقناطیسی تفاعل

7-6 مقناطیسی تر غلبی میدان

7-7 مقناطیسی اسکیلر مضمر

7-8 مقناطیسی ویکٹر مضمر

7-9 کرنٹوں کے اقسام

7-10 تقطیبی کرنٹ

7-11 مقناطیسی گردشہ

7-12 مقناؤ اور مقناؤ کرنٹ

7-13 خلا کی نقل کرنٹ 196

باب 8. مقناطیسی اشیا اور حدودی قدر مسئلے 197 تا 222

8-1 مقناطیسی میدانی شدت 197
8-2 مقناطیسی مآخذ تا
8-3 سرایت پذیر وسیلے مقناطیسی تاثر پذیری اور حدودی شرائط
8-4 مقناطیسی سرکٹ
8-5 حدودی قدر مسئلوں کا مقناطیسی اسکیلر مضمر ول کے ذریعہ حل
8-6 ویکٹر مضمر کے لیے واحدیت مصدقہ
8-7 مسئلوں کے حل میں ویکٹر مضمر کا استعمال
8-8 ویکٹر مضمر دو ابعاد میں
8-9 سلنڈری سمتی قدروں میں ویکٹر مضمر 222

باب 9. میکسویل کے مساوات 223
9-1 فیراڈے کا ترغیب کا قانون تا
9-2 سکونی وسیلوں کے لیے میکسویل کے مساوات
9-3 متحرک وسیلوں کے لیے فیراڈے کا قانون
9-4 متحرک وسیلوں کے لیے میکسوئل کے مساوات
9-5 مقناطیسی میدان میں چالک کی حرکت 238

باب 10. برق مقناطیسی میدان میں توانائی قوت اور تحرک کے رشتے 239
10-1 نیم مستقل کرنٹ نظاموں میں توانائی کے رشتے تا
10-2 کرنٹ نظاموں پر کام کرنے والی قوتیں
10-3 ترغیب
10-4 مقناطیسی حجمی قوت
10-5 برق مقناطیسی توانائی کے لیے عام عبارتیں
10-6 تحرک کا توازن 260

باب 11. مساوات اور مستوا لہریں 261
11-1 لہر مساوات تا
11-2 مستوا لہریں 297

11-3 اشعاع کا داب 261

11-4 متحرک وسیلے میں مستو الہریں تا

11-5 ایک مستو سے انعکاس اور انعطاف

11-6 چالک وسیلوں میں لہریں اور دھاتوں سے انعکاس

11-7 گروپ رفتار 287

باب 12. مقناطیسی میدان میں چالک سیال 288

(مقناطیسی رقیقی حرکیات)

12-1 "منجمد" قوت خطوط

12-2 مقناطیسی رقیقی حرکیاتی لہریں 298

باب 13. دھاتی کے حدود کی موجودگی میں لہریں 299

13-1 دھات کی حدودی شرطوں کی فطرت تا

13-2 لہر مساوات کے آئگن فنکشن اور آئگن قدریں

13-3 مستطیل حدود والے جوف

13-4 سلنڈری جوف

13-5 دائری سلنڈری جوف

13-6 لہرگائیڈ

13-7 دائری سلنڈر کے ذریعہ انتشار

13-8 کروی لہریں

13-9 کرتے سے انتشار 336

باب 14. غیر متجانس لہر مساوات 337

14-1 مضروں کے لیے لہر مساوات تا

14-2 فوریر تجزیہ کے ذریعہ حل

14-3 اشعاع کے میدان

14-4 مخروج توانائی

14-5 ہر زمضر 379

14-6 ہرز کے طریقے سے اشعاعی میدانوں کا حساب لگانا 337

14-7 برقی دو قطبی اشعاع تا

14-8 کثیر قطبی اشعاع

14-9 اسکیلر مضمروں سے کثیر قطبی اشعاع کا اخذ

14-10 کثیر قطبوں سے اشعاع کے ذریعہ توانائی اور زاویائی تحرک کا اخراج 379

باب 15. مخصوص اضافیت کے نظریہ کی تجرباتی بنیاد 380

15-1 گیلیلیائی اضافیت اور برقی حرکیات تا

15-2 مطلق ایتھر فریم کی تلاش

15-3 لارنز فٹز جرالڈ کا تخفیف مفروضہ

15-4 ایتھر ڈریگ

15-6 اخراجی نظریے

15-5 خلاصہ 398

باب 16. اضافیتی حرکیات اور لارنز استحالہ 399

16-1 روشنی کی رفتار اور ہم وقتی تا

16-2 مخصوص اضافیت میں حرکی رشتے

16-3 لارنز استحالہ

16-4 لارنز استحالے کی جیامٹریائی تفسیر

16-5 رفتار کے لیے استحالہ مساوات 425

باب 17. ہم تغیر اور اضافیتی میکانیات 426

17-1 چہار۔ ویکٹر کا لارنز استحالہ تا

17-2 مخصوص اضافیت میں کارآمد ٹینسر رشتے

17-3 تحرک کی برقراریت

17-4 توانائی کا تحرک سے اور کمیت سے رشتہ

17-5 منکاوسکی قوت 451

II

17-6 دو یکساں ذروں کا تصادم 426 تا 451

17-7 تصادموں کے لیے حرکیاتی رشتے نکالنے میں چہار۔ ویکٹروں کا استعمال

باب 18. برق حرکیات کی ہم متغیری تشکیل 452 تا

18-1 چہار ویکٹر مضمر

18-2 برق مقناطیسی میدان ٹینسر

18-3 خلا میں لارنز قوت

18-4 مادی وسیلوں میں مآخذ کا ہم متغیری بیان

18-5 مادی وسیلوں میں میدان مساوات

18-6 جزوی میداوں کے استحالی صفات 474

باب 19. لینارڈ۔ ویشرٹ مضمر اور یکساں طور پر متحرک والے الکٹران کا میدان 475 تا

19-1 لینارڈ۔ ویشرٹ مضمر

19-2 مستقل رفتار سے حرکت کرنے والے چارج کے میدان

19-3 لہر مساوات کا سیدھا حل

19-4 حملی مضمر

19-5 خیالی فوٹان کا تصور 491

باب 20. سرعتائے چارج سے شعاع ریزی 492 تا

20-1 سرعتائے چارج کے میدان

20-2 کم رفتار پر شعاع ریزی

20-3 وہ حالت جس میں u متوازی u کے ہے

20-4 اسراع کا رفتار کے عمودی ہونے پر اشعاع (دائری مداروں سے شعاع ریزی)

20-5 رفتار یا اسراع پر پابندی نہ ہونے کی حالت میں اشعاع

20-6 کولوم میدان میں بریم سٹرالن کے لیے کلاسیکی عرض تجاوز 521

20-7 سرنگو دا اشعاع

باب 21. اشعاع کا ردِ عمل اور برقی حرکیات کے برقراریت قوانین کی ہم متغیری تشکیل 522 تا

21-1 خلائی برقی حرکیات کے برقراریت قانونوں کی ہم متغیری تشکیل

21-2 آزاد اشعاعی میدان کے استحالی خواص

21-3 مادّی وسیلوں میں برق مقناطیسی توانائی تحرک ٹینسر

21-4 برق مقناطیسی کمیت

21-5 برق مقناطیسی کمیت پر کیفی غور

21-6 ردِ عمل جو شعاعی توانائی کی برقراریت کے لیے ضروری ہے

21-7 مبطئی میدانوں سے اشعاعی ردِ عمل کا سیدھا حساب

21-8 حرکت مساوات کے خواص

21-9 چارج کی وجہ سے برق مقناطیسی میدان کے میکانکی خواص کا ہم متغیری بیان

21-10 اضافیتی حرکت مساوات

21-11 اضافیتی حرکت مساوات کا اینٹگریشن

21-12 مجرد مرکزی کمیتی تکملوں کو خارج کرنے کی غرض سے اشعاع کے نظریے میں ترمیم۔ اقدامی مضمر

21-13 اضافیتی اشعاعی ردِ عمل کا سیدھا حساب 555

باب 22. اشعاع انتشار اور انکسار 556 تا

22-1 چارج شدہ ہارمونک اہتزاز کار کی اشعاعی تخفیف

22-2 جبری ارتعاش

22-3 منفرد آزاد الکٹران سے انتشار

22-4 ایک بندھے الکٹران سے انتشار

22-5 اہتزاز کار کا اشعاع کو جذب کرنا

22-6 اہتزاز کار اور اشعاعی میدان کے درمیان تعادل 587

22-7 ایک حجم میں پھیلے انتشار کاروں کا اثر 556

22-8 حجمی تقسیم کے ذریعے انتشار ۔ ریلے انتشار تا

22-9 انکساری رشتہ

22-10 انتشار اور جاذبیت پر ایک عام مصدقہ 587

باب 23. برق مقناطیسی میدانوں میں چارج شدہ ذرّات کی حرکت 588 تا

23-1 عاملی ۔ خط کے ذریعہ بیان

23-2 ہملٹنی تشکیل اور سہ ۔ ابعادی شکل میں عبور

23-3 مدارات کے مساوات

23-4 اطلاق

23-5 مقناطیسی گردش والے ایک ذرّے کی برق مقناطیسی میدان میں حرکت 616

باب 24 میکسویل مساوات کی ہیملٹنی تشکیل 617 تا

24-1 ایک ۔ ابعادی مسلسل نظام میں عبور

24-2 سہ ۔ ابعادی مسلسلہ کے لیے تعمیم

24-3 برق مقناطیسی میدان

24-4 ایک بکس کے اندر دوری حل ۔ ہموار لہر سے اظہار 630

ضمیمے

ضمیمہ I. برق مقناطیسی نظریے میں اکائیاں اور ابعاد 631

ٹیبل I-1. تحویلی جزو 640

I-2. خلا میں جائز بنیادی برق مقناطیسی رشتے اور مختلف نظاموں میں ان کی شکل 641

I-3. ماخذ کے ذریعے میدانوں کی تعریف (MKS نظام) 643

644 I-4. کارآمد اعدادی رشتے
645 ضمیمہ II. کارآمد ویکٹر رشتے
646 ٹیبل II-1. ویکٹر فارمولے
648 ضمیمہ III. خم خطی سمتی قدروں میں ویکٹر رشتے
651 ٹیبل III-1. سمتی قدری نظامات
652 فہرست کتب

باب 1

خلا میں برق سکونی میدان

مادی اجسام کے درمیان تفاعل کا بیان یا تو باہمی عمل پزیر اجسام کے درمیان فاصلے عمل کو ضابطہ بندی کے ذریعہ کرتے ہیں یا پھر تفاعلی طریق کو ایک نظام کے ذریعہ ایک میدان کی پیدائش اور دوسرے نظام پر اس میدان کے عمل میں جدا کر کے کرتے ہیں۔ سکونی حالت کے لیے یہ دونوں متبادل بیان طبیعاتی لحاظ سے ایک ہی ہیں لیکن اگر اجسام متحرک ہیں اور باہمی تفاعل کے بڑھنے کی رفتار محدود ہے تو ریاضیائی اور طبیعی دونوں لحاظ سے یہ سود مند ہے کہ میدان کو ایک طبیعی صداقت مان لیا جائے حالانکہ برقی مقناطیسی مظاہر کے بیان میں میدانی تصور کو تاخیری، و پیش قدم اسید سے تفاعل سے بدلنا بھی ممکن ہے۔ ہم برق سکونی تفاعل کی ضابطہ بندی کو بھی میدان نظریہ کے طور پر کریں گے۔ اور پھر غیر سکونی حالات کے لیے ان کی توسیع کریں گے۔

ویکٹر میدان

مختلف اقسام کے تفاعل کے لیے لاگو ہونے والے میدان نظریات میں فرق ان پیرامیٹروں (Parameters) کی تعداد، جو میدان کی وضاحت کے لیے ضروری ہوتے ہیں اور میدان کی تشکیلی خاصیت میں ہوتا ہے۔ عام معنوں میں میدان ایک ایسا طبیعی وجود ہے کہ خلا کا ہر نقطہ ایک آزادی درجہ

ہوتا ہے۔ اس لیے میدان کی وضاحت، اس کی طبیعی نوعیت کے لیے مناسب مقدار کا وقت کے ساتھ خلا کے ہر نقطہ پر برتاؤ بتا کر جاسکتی ہے۔'

امکانی اقسام کے حلقے کی لحاظ سے پابند ہیں۔ حلقوں کی تقسیم ان قدروں کی تعداد کے لحاظ سے، جو حلقے کی وضاحت کے لیے ضروری ہیں اور مختلف محددین تبادل کے زیرِ اثر میدانی مقادیر کے تبادل کی نوعیت سے کی جاتی ہے۔ ایک اسکیلر (Scalar) حلقے کی وضاحت خلا میں ہر نقطے پر ایک مقدار کا وقت کے ساتھ انحصار بتا کر کی جاسکتی ہے اور ایک تین العادی ویکٹر حلقے کی وضاحت ایسی تین مقداروں کے ذریعہ کی جاسکتی ہے۔ عام طور سے ایک r ، ویں درجہ کے ٹینسر حلقے کے بیان کے لیے d^r اجزا کی وضاحت کی ضرورت ہے جہاں d اس خلا کی ابعادیت ہے جس میں حلقہ کی تعریف کی گئی ہے۔ ایک اسکیلر حلقہ ایک صفر درجہ کا ٹینسر حلقہ ہے اور ویکٹر میدان پہلے درجہ کا ٹینسر حلقہ ہے۔

کسی طبیعی شے کے میدانی وضاحت مخصوص منتخب محددین نظام سے آزاد ہے۔ یہ حقیقت محددین تبادل کے زیرِ اثر اجزائے حلقے کے تبادل اوصاف پر پابندی عائد کرتی ہے ہم دو طرح کے محددین تبادل پر غور کریں گے یعنی تبادل معارفہ و غیر معارفہ۔ تبادل معارفہ وہ ہیں جو کہ محددین چکری ترتیب کو برقرار رکھتے ہیں (یعنی تین الابعاد میں ایک دستِ راست محددین نظام کو ایک دستِ چپ محددین نظام میں نہیں بدلتے) انتقال و گھماؤ تبادل معارفہ ہیں۔ تبادل غیر معارفہ جیسے محددین محاور کو پلٹ دینا اور کسی مستوی میں محددین نظام کا انعکاس وغیرہ محددین نظام کی چکری ترتیب کو بدل دیتے ہیں۔

ایک بنیادی ویکٹر دو نقطوں کو جوڑنے والا فاصلہ r ہے۔ r کے اجزا کو r_a سے بیان کیا جاتا ہے۔ ایک ویکٹر حلقہ V کے اجزا V_a ، معارفہ اور غیر معارفہ تبادل میں اجزا r_a کی طرح تبادل کرتے ہیں۔ ایک اسکیلر صحیح د

وغیر صحیح دونوں تبادل میں برقرار رہتا ہے۔ ایک نقلی ویکٹر میدان P کے اجزا P_α صحیح تبادل میں اجزا v_α کی طرح تبادل پذیر ہوتے ہیں لیکن غیر صحیح تبادل میں نشان بدل لیتا ہے۔

برقی حلقہ ایک تین العباد کا ویکٹر حلقہ ہے یعنی ایسا میدان ہے جس کی تعریف تین اجزا بتا کر کی جا سکتی ہے۔ ویکٹر حلقوں کے نظریہ کا ارتقا سیالی حرکات کے مطالعے کے دوران ہوا یہ حقیقت بار بار نظریہ کی اصطلاحات میں ظاہر ہوتی ہے۔ ایسے ویکٹروں کی طبیعاتی تشریح کرنے سے پہلے ہم ان حلقوں کے کچھ عام ریاضیاتی اوصاف پر غور کریں گے۔

تین العباد میں تمام ویکٹر حلقوں کی غیر مشکوک تعریف کی جا سکتی ہے اگر ان کی ثقل گردش (چکر curl) دثقل ماخذ (ڈائورجینس پھیلاؤ) خلا کے ہر نقطہ پر محددین کے دیئے ہوئے تفاعل ہیں اور اگر ماخذوں کا کلیہ چن اور ثقل ماخذ انتہا پر صفر ہے۔ آیئے اس مسئلہ کو رسمی طور پر ثابت کریں۔ ایک تین العباد کا ویکٹر حلقہ (x_α یعنی z و y و x) V پر غور کرو اس طرح کہ:

$$\nabla \cdot V = S \qquad (1-1)$$

$$\nabla \times V = C \qquad (1-2)$$

مساوات (2 - 1) خود آہنگ اس وقت ہوگی جب کہ ثقل گردش غیر گردشی ہے یعنی:

$$\nabla \cdot C = 0 \qquad (1-2')$$

پہلے ہم یہ دکھائیں گے کہ اگر:

$$V = -\nabla \phi + \nabla \times A \qquad (1-3)$$

جہاں

$$\phi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{S(x'_\alpha)}{r(x_\alpha, x'_\alpha)}\, dv' \qquad (1-4)$$

اور

$$A(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{C(x'_\alpha)}{r(x_\alpha, x'_\alpha)}\, dv' \qquad (1-5)$$

تب V مساوات (1-1) و (2-1) کو مطمئن کرتی ہے۔

یہ ضروری ہے کہ ثبوت سے پہلے مساوات (4-1) و (5-1) کی علامتوں پر دھیان دیا جائے۔ علامت x_α میدانی نقطہ پر (x, y, z) کے نئے ہے، نشان نقطہ ماخذ پر ( ) کے لیے ہے۔ تفاعل ایک تشکلی تفاعل:

$$r(x_\alpha, x'_\alpha) \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} (x_\alpha - x'_\alpha)^2}$$

ہے جو کہ نقطہ ماخذ اور میدان کے درمیان کا مثبت فاصلہ بتاتا ہے۔ طلبا کو مساوات (4-1)، (5-1) میں موجود تفاعلی رشتوں پر توجہ دینا چاہیے۔ اس قسم کے انٹیگرلوں میں یہ تفاعلی رابطے اکثر مکمل طور پر بیان نہیں کیے جائیں گے؛ مثلاً ہم حجمی انٹیگرلوں کو مختصر علامتوں میں اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{S}{r} \, dv' \qquad (1-4')$$

$$A = \frac{1}{4\pi} \int \frac{C}{r} \, dv' \qquad (1-5')$$

R کو ہم کبھی کبھی محددین آغاز سے میدانی نقطہ x_α تک کے نصف قطر ویکٹر کے لیے کریں گے اور E کو ماخذ نقطہ کے لیے کریں گے؛ تب

$$r = |R - E|$$

اب ہم یہ دکھائیں گے کہ مساوات (3-1) کے ذریعہ بتایا گیا V مساوات (1-1) اور (2-1) کا حل ہے:

$$\nabla \cdot V = -\nabla^2 \phi + \nabla \cdot (\nabla \times A) = -\nabla^2 \phi$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left\{ \int \frac{S}{r} \, dv' \right\}$$

اپلاسی آپریٹر ∇^2 میدانی محددین پر لاگو ہوتا ہے؛ اس لیے:

$$\nabla \cdot V = -\frac{1}{4\pi} \int S \, \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dv' \qquad (1-6)$$

اب ہم دکھا سکتے ہیں کہ:

$$\nabla^2 \left\{ \frac{1}{r(x_\alpha, x'_\alpha)} \right\} = -4\pi\,\delta(r) \qquad (1-7)$$

جہاں ڈیریک تفاعل کی تعریف تفاعلی اوصاف کے ذریعہ اس طرح کی جاتی ہے:

$$\delta(r) = 0 \qquad r \neq 0 \qquad x_\alpha \neq x'_\alpha \qquad (1-8)$$

$$\int \delta(r)\, dV' = 1 \qquad (1-9)$$

اگر نقطہ $r = 0$ انٹیگریشن کے حجم میں شامل ہے، اور

$$\int f(x'_\alpha)\, \delta(r)\, dV' = f(x_\alpha) \qquad (1-10)$$

ہے جب تک کہ کسی من چاہے تفاعل f کے لیے انٹیگریشن کے حجم میں نقطہ $(r = 0)$ شامل ہے۔ S تفاعلی کوئی تجرباتی تفاعل نہیں ہے۔ بلکہ اوپر کے تین وضاحتی مساوات کے تفاعلی اوصاف کے لیے ایک علامت ہے۔ اس کا استعمال ہمیشہ انھیں اوصاف کے معنی میں ہوگا۔

چونکہ سیدھے تفرق سے ظاہر ہے کہ $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ جب کہ $r \neq 0$ تو مساوات $(1-7)$ کو سچ ثابت کرنے کے لیے ہمیں صرف یہ ثابت کرنا ہے کہ:

$$\int \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dV' = -4\pi \qquad (1-11)$$

(مساوات $(1-11)$ میں نقطہ $r = 0$ یعنی $x'_\alpha = x_\alpha$ انٹیگریشن کے حجم میں شامل ہے) گاس کے مسئلہ ڈائیورجینس کا استعمال کرکے جس کا اطلاق کسی دیکٹر V پر ہو سکتا ہے:

سختی سے پابندی کی جائے تو گاس کے مسئلہ ڈائیورجینس کا اطلاق نہیں ہوتا کیوں کہ تفاعل $V = \nabla \frac{1}{r}$ نقطہ $r = 0$ پر واحد ہے۔ تاہم اگر $\left(\frac{1}{r}\right)$ کی جگہ تفاعل $r\,(1-e^{-r/a})$ رکھ کر اس واحدانیت دور کردی جائے مثلاً a کوئی من چاہا چھوٹا نصف قطر ہے۔ تو

$$\nabla\left[\frac{1}{r}\left(1 - e^{-r/a}\right)\right] = -\frac{r}{r^3}\left(1 - e^{-r/a}\right) + \frac{r}{r^3}\left(\frac{r}{a}\, e^{-r/a}\right)$$

چونکہ دوسری مقدار کی قدر صرف r^{-1} کے سے بدلتی ہے، اس کا سطحی انٹیگرل ایک چھوٹے کرہ کے اوپر جو کہ نقطہ $r = 0$ کو گھیرے ہوئے ہے، غائب ہو جائے گا جب کہ کرہ کا نصف قطر صفر ہو جائے گا

$$\int \nabla\cdot V \, dv = \int V \cdot ds$$

یہ ظاہر ہوتا ہے کہ:

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dv' = \int \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot ds'$$

$$= -\int \frac{r \cdot ds}{r^3} = -\int d\Omega$$

جہاں Ω وہ ٹھوس زاویہ ہے جو کہ انٹیگریشن کی سطح S' متغیرات x_α پر x'_α کے ساتھ بناتی ہے: $\int d\Omega = 4\pi$.

چونکہ S' میں x_α شامل ہے اس لیے $\int d\Omega = 4\pi$ اور مساوات (1-11) کی تصدیق ہو جاتی ہے اس لیے مساوات (1-6) اور (1-10) سے:

$$\nabla\cdot V = -\frac{1}{4\pi}\int s\, \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dv' = \int s(x_\alpha) \quad (1-12)$$

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

اسی طرح:

$$\nabla\times V = -\nabla\times\nabla\phi + \nabla\times(\nabla\times A) = \nabla(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\int (c\cdot\nabla)\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv' - \int c\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dv'\right\} \quad (1-13)$$

ہم یہ ثابت کریں گے کہ پہلا انٹیگرل غائب ہو جاتا ہے اگر c خلا میں محدود ہے۔ اگر ہم اس نتیجہ کو پہلے سے مان لیں تو مساوات (1-7) سے ہم فوراً دیکھتے ہیں کہ:

$$\nabla\times V = \int c(x'_\alpha)\,\delta(r)\, dv' = c(x_\alpha) \quad (1-14)$$

اس طرح مساوات (1-2) بھی مطمئن ہو جاتی ہے۔ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ مساوات (1-13) کا پہلا رکن غائب ہو جاتا ہے ہم کو انٹیگرینڈ میں شامل محدد ین متغیروں پر غور کرنا چاہیے۔ آپریٹر ∇ کے اجزا ہیں۔ اگر ہم آپریٹر $\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ جو کہ بالنذ محددین پر کام کرتا ہے نیے متعارف کرا دیں تو کسی من چاہے تفاعل $g[r(x_\alpha - x'_\alpha)]$ کے لیے۔

$$\nabla g = -\nabla' g \quad (1-15)$$

اس لیے مساوات (13 - 1) کا پہلا انٹیگرل اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = (c\cdot\nabla)\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dv' = \int (c\cdot\nabla')\,\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)dv'$$

تفریقی آپریٹر اب انٹیگریشن کے تغیروں پر کام کرتے ہیں اور ہم حصوں میں انٹیگریٹ کر سکتے ہیں۔

I کا ہر جز

$$I_\alpha = \int (c\cdot\nabla')\,\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)dv'$$

$$= \int \nabla'\cdot\left\{c\,\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dv' - \int (\nabla'\cdot c)\,\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)dv' \qquad (1\text{-}16)$$

ہو جاتا ہے۔

دوسرا انٹیگرل غائب ہو جاتا ہے کیوں کہ c کا ڈایور جنس صفر ہے (مساوات (2 - 1)) پہلا رکن گاس کے مسئلہ سے ایک سطحی انٹیگرل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے: اگر c فضا میں محدود ہے تو سطح کو اتنا کافی بڑا لیا جا سکتا ہے کہ تمام اس کے اوپر c صفر ہو۔ اس لیے مساوات (16 - 1) صفر ہے اور ثبوت مکمل ہو گیا۔

اس طرح ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ اگر ایک ویکٹر میدان V کے لیے ہر مقام پر ثقل ماخذ s و ثقل گردش c دیے ہوئے ہیں تو ایک اسکیلر مضمر اور ایک ویکٹر مضمر A سے V کا ایک حل اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مضمرات A ثقل ماخذ و گردش کے اوپر انٹیگرلوں کی شکل میں دیے جاتے ہیں۔

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حلوں کا یہ نظام واحد ہے اگر ماخذ فضا میں محدود ہیں یعنی انتہا پر کوئی ماخذ نہیں ہے اور اس طرح خود میدان بھی ماخذ سے کافی فاصلے پر غائب ہو جاتے ہیں۔ مان لیجیے کہ دو فنکشن V_1 و V_2 ہیں جو کہ مساوات (1-1)، (2 - 1) مطمئن کرتے ہیں۔ ان کا فرق تفاعل $W = V_2 - V_1$ ان پابندیوں کی تعمیل فضا کے ہر نقطہ پر کرتا ہے اور انتہا پر صفر ہے۔

$$\nabla\cdot W = 0 \qquad (1\text{-}17)$$

$$\nabla\times W = 0 \qquad (1\text{-}18)$$

اب اگر ہم یہ دکھا دیں کہ W ہر مقام پر ختم ہو جاتا ہے تو یہ ثابت ہو جائے گا کہ محدود ماخذوں کے لیے مساوات (1-1) اور (2 - 1) کا صرف ایک حل ہے۔

یہ ثابت کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مساوات (18-1) کی پابندی ہوتی ہے تو ہم ہمیشہ:

$$W = -\nabla \psi \qquad (1-19)$$

رکھ سکتے ہیں اور مساوات (17-1) سے ہر جگہ پر

$$\nabla^2 \psi = 0 \qquad (1-20)$$

اگر ہم گاس کے ڈائیورجینس مسئلہ کا اطلاق ویکٹر پر کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int \psi \nabla \psi \cdot ds = \int [\psi \nabla^2 + (\nabla \psi)^2] dv \qquad (1-21)$$

اگر حد محدود منبع جات سے کافی فاصلے پر لیا جائے تو بایاں اطراف ختم ہو جاتا ہے کیوں کہ کم از کم $\frac{1}{r^2}$ کے تناسب سے صفر کی طرف مائل ہے۔ اور پہلا دایاں ٹکڑا مساوات (20-1) سے صفر کے برابر ہے۔ اس طرح مساوات (21-1) یہ رہ جاتی ہے۔

$$\int (\nabla \psi^2) dv = \int (W^2) dv = 0 \qquad (1-22)$$

اور اس کے لیے سب جگہ $W = V_1 - V_2 = 0$

اس طرح مساوات (3-1) سے ملا ہوا V واحد ہے۔

ہم اس رسمی ثبوت کو بہت تشریح کے ساتھ صرف اس لیے ہی نہیں دیا ہے کیوں کہ یہ مسئلہ بنیادی اہمیت کے ہیں۔

سہولیت کے لیے اپنے واصل شدہ نتائج کا خلاصہ بیان کر دیں۔

(a) اگر فضا کے محدود حصے میں ایک ویکٹر میدان V کے لیے ثقل ماخذ S وثقل گردش C دیے ہوئے ہیں اور انتہا پر کوئی ماخذ نہیں ہیں تو V کی واحد وضاحت ہو جاتی ہے۔

(b) اگر V میں ماخذ S ہیں اور ثقل گردش C نہیں ہے تو V ایک اسکیلر مضمر ϕ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(C) اگر V میں ثقل گردش C ہے اور ماخذ نہیں ہیں تو V ایک ویکٹر مضمر A سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(d) V ہمیشہ ایک اسکیلر اور ایک ویکٹر مضمر سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(e) فضا کے ان نقطوں پر جہاں s اور c غائب ہوں V کو ایک اسکیلر مضمر ϕ سے اخذ کیا جا سکتا ہے جس کے لیے $\nabla^2\phi=0$ یا ایک ویکٹر مضمر A سے جس کے لیے $\nabla\times\nabla\times A = 0$ ایسے نقطوں پر میدان کو ہارمونک کہتے ہیں۔

(f) اگر s ، c ہر جگہ صفر کے برابر ہوں تو V سب جگہ غائب ہو جاتا ہے۔

(g) c، s کی شکل میں V کا واحد حل مساوات (1-4) و (1-5) کے رابطہ سے بتائے گئے مضمروں سے ملتا ہے۔

(h) ہم نے ایک علامتوں کا ایک منظم نظام ماخذ اور میدان کے لیے قائم کر لیا ہے۔ اگر ہم یہ اور مان لیں کہ ویکٹر r منبع سے میدانی نقطہ کی طرف اشارہ کرتا ہے تو ہم ریاضیاتی رابطوں کی فہرست میں مندرجہ ذیل اضافہ کر سکتے ہیں:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(r)$$

$$\nabla\left[g(r)\right] = -\nabla'\left[g(r)\right]$$

$$\nabla r = -\nabla r = \frac{r}{r}$$

$$\nabla\cdot r = +3$$

عام ویکٹر میدانوں کے اوصاف کا بیان آگے آنے والے طبیعاتی معاملوں غور و خوض کے لیے ناگزیر ہے۔ جب ہم برق و مقناطیسی کے تجرباتی قوانین ایسے مساواتوں کی شکل میں لکھ لیں گے، جو کہ برقی مقناطیسی میدانوں کو میدانی ویکٹروں کے تفتّل ماخذ و تفتّل گردش یعنی ڈائیورجینس و کرل کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں تو ہمارے پاس ایک ہم آہنگ میدانی نظریہ ہو جائے گا کلاسیکی برقی مقناطیسی نظریہ کا یہ بنیادی پروگرام ہے۔

2-1 برقی میدان:

پہلے ہم خلا میں سکون برقی میدان پر غور کریں گے۔ برقی میدان کی

تعریف اس طاقت کے ذریعہ کی جاتی ہے جو کہ ایک پرکھ چارج q پر لگتا ہے۔ اس کی مساوات ہے۔

$$\lim_{q \to 0} \frac{F}{q} = E \qquad (1\text{-}23)$$

جب کہ F طاقت (نیوٹن) پرکھ چارج q پر (کولب) پر لگی ہے یہ تعریف اکائیوں کے نظام سے بالکل آزاد ہے۔ لیکن (mKS) نظام میں اس مساوات کے ذریعہ واضح میدان وولٹ میٹر میں ہوتا ہے۔ حد $q \to 0$ اس کے لیے داخل کی گئی ہے تاکہ پرکھ چارج میدانی کے ماخذ پر اثر انداز نہ ہو۔ اسی حالت میں میدان پرکھ چارج کی موجودگی سے آزاد ہوگا۔ یہ ضرورت کہ پرکھ چارج میدانی منبع جات کے مقابلہ میں غائب ہونے کی حد تک چھوٹا ہو ایک بنیادی مشکل پیدا کرتی ہے کیوں کہ الیکٹرانی چارج کی محدود مقدار اجازت نہیں دیتی کہ حد $0 \to q$ تک تجرباتی طور پر پہنچا جائے یہ تعریف کے عملی اطلاق کو ان واقعات تک محدود رکھتی ہے جہاں کے میدان پیدا کرنے والے منبع جات الیکٹرانی چارج کی بڑی تعداد کے برابر ہوں۔ اس طرح مساوات (1-23) صرف کلاں منظہرات کے لیے پورے طور سے مناسب ہے اور ہمیں اس کا اطلاق ان بنیادی چارجوں کے بیان میں کرنے میں بہت احتیاط برتنے کی ضرورت ہے جن پر مادہ حقیقت میں مشتمل ہے خورد مظاہر میں میدان کی تعریف اس کے اثرات کے ذریعہ کرداری طور پر نہیں کی جا سکتی۔ اسے اس کے منبع جات جات کے ذریعہ بیان کرنا ہوگا یہ مان کر کہ میدانی منبع جات کے کلاں پیمانے کے قوانین اب بھی صحیح ہیں۔ میدان E ایک تین البادکا ویکٹر میدان ہے (نقلی ویکٹر نہیں) اگر ہم یہ قاعدہ اپنا لیں کہ چارج q ایک اسکیلر ہے (نقلی اسکیلر نہیں) اس قاعدے کی رد سے برقی میدانوں اور (بعد کو) مقناطیسی میدانوں دونوں کی تبدیلی نوعیت کی تشریح کی جائے گی۔

اکائیوں اور مختلف نظاموں کی اکائیوں کے درمیان رشتوں پر بحث کے لیے دیکھیے ضمیمہ 1

1-3 (کولوم کا قانون) کولمب کا قانون:

تجربات کی بنیاد پر خلا میں دو نقطہ چارجوں کے درمیان طاقت سے متعلق قانون پہلے پہل ایک فاصلہ پر بطور عمل واقع ہوا۔

$$F_2 = \frac{q_1 q_2 r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1\text{-}24)$$

یہاں F_2 چارج q_2 پر طاقت ہے جو کہ چارج q_1 کی موجودگی کی وجہ سے ہے اور r چارج q_2 نصف قطر مقام ویکٹر ہے جس کو ایک نقطہ صفر سے ناپا گیا ہے جو چارج q_1 پر واقع ہے ؛ ε_0 ایک مستقلہ ہے جو اس اکائی نظام میں $10^7/4\pi c^2$ فیرڈ فی میٹر ہے ؛ c آزاد فضا میں ہموار سطح کی برق مقناطیسی لہروں کے آگے بڑھنے کی رفتار کی تجرباتی قیمت ہے (دیکھیے ضمیمہ I) اور سب فاصلے میٹروں میں ناپے گئے ہیں۔ داہنی طرف کے ریاضیاتی ہم قدر میں گریڈینٹ آپریٹر چارج q_2 کے محددوں پر عمل کرتا ہے۔ قانون مثبت اور منفی دونوں چارجوں پر یکساں لاگو ہے اور بتاتا ہے کہ یکساں چارج دفع کرتے ہیں اور غیر یکساں کشش۔ اگر مساوات (1-23) کے پرکھ چارج کو مثبت مان لیا جائے تو مساوات (1-24) سے موازنہ کرنے پر ہمیں فوراً ملتا ہے

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r^3} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1\text{-}25)$$

جو کہ نصف قطر ویکٹر کے نقطہ صفر پر ٹھہرے چارج q کی وجہ سے مقام r پر برقی میدان E دیتا ہے۔ یہاں q مساوات (1-24) کے q_1 سے مطابقت رکھتا ہے۔

ہم گاس کے فلکس مسئلہ:

$$\int_s E \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (1\text{-}26)$$

کولمب کے قانون کے سیدھے نتیجے کے طور پر ثابت کر سکتے ہیں۔

سطح کے ایک چھوٹے قطعہ ds کو لیجیے جسے ایک ویکٹر سے ظاہر کیا گیا ہے جو سطح کے باہری عمود کی سمت میں ہے جیسا کہ شکل (1-1) میں دکھایا گیا ہے۔ یہ سطح چارج q سے فاصلہ r پر ہے مساوات (1-25) کے دونوں بازوؤں کو ds سے اسکیلر ضرب کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$E \cdot ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\, r \cdot ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega \qquad (1\text{-}26)$$

شکل 1-1

سطح اور ٹھوس زاویہ کے چھوٹے قطعے جن پر گاس کے مقالہ کا پورا برقی فلکس مشتمل ہے۔

چونکہ نقطہ x رکھنے والی ایک بند سطح پر $d\Omega$ کی تکمیل محض 4π ہے اس لیے گاس کا مسئلہ فوراً آجاتا ہے۔ اصول انطباق کی رو سے ہم کسی بھی تعداد کے نقطہ [illegible] چوں کے میدانوں کو جوڑ سکتے ہیں اس لیے مساوات (1-26) کا q وہ پورا چارج ہے جو حدود سطح S کے اندر ہے اگر ہم ڈائیور جنس مسئلہ کا اطلاق E پر کریں تو:

$$\int E \cdot ds = \int \nabla \cdot E \, dv$$

اور اس حقیقت کا بھی فائدہ اٹھائیں کہ تقل چارج ρ کی کل حجمی تکمیل محض پورا چارج q ہے تو مسئلہ فلکس کا اطلاق کرکے ہم مساوات ([illegible: 1-25?]) کو اس شکل میں رکھ سکتے ہیں:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (1\text{-}27)$$

یہاں ρ فی اکائی حجم چارج اس نقطہ پر ہے جہاں میدان E ہے۔ چونکہ کسی اسکیلر کے گریڈینٹ کا کرل صفر ہوتا ہے مساوات ([illegible: 1-25?]) اور اصول انطباق سے یہ بھی اخذ کیا جا سکتا ہے کہ

$$\nabla \times E = 0 \qquad (1-28)$$

اس طرح سکون برقی میدان غیر گردشی ہے۔ تب اس مسئلہ سے کہ کوئی ویکٹر میدان اوس کے کرل اور ڈائیورجنس کے ذریعہ مکمل طور سے واضح ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سکون برقی میدان کی پوری تعریف چارج کے پھیلاؤ کو بتا کر کی جا سکتی ہے۔ یہ غور کرنا مفید ہوگا کہ حسب ذیل شکل میں کولمب کے قانون سے مساوات (1-27) اور (1-28) سیدھی حاصل ہو جاتی ہے۔

$$E(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(x'_\alpha)\frac{r}{r^3}\,dV' \qquad (1-29)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dV' \qquad (1-30)$$

اس سے ملتا ہے

$$\nabla\cdot E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)dV' =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho(x'_\alpha)\,\delta(r)\,dV' = \frac{\rho(x_\alpha)}{\epsilon_0} \qquad (1-27)$$

$$\nabla\times E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho\,\nabla\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dV' = 0 \qquad (1-28')$$

کیوں کہ ایسے ویکٹر کا کرل جو کہ گریڈینٹ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے صفر ہے۔ ایک نقطہ ماخذ q کے لیے ہمیں سیدھے مساوات (1-25) سے

$$\nabla\cdot E = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = q\,\frac{\delta(r)}{\epsilon_0} \qquad (1-27')$$

حاصل ہوتا ہے۔

1-4 سکونی برقی مضمر

چونکہ سکونی برقی میدان غیر گھماؤ ہے اس کو ایک اسکیلر تفاعل کے گریڈینٹ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ہم ایک سکون برق مضمر

ϕ کی تعریف اس مساوات سے کر سکتے ہیں۔

$$E = -\nabla\phi \qquad (1\text{-}31)$$

کارٹیزی محددین میں میدان کے   کے متوازی اضلاع بالترتیب مندرجہ ذیل سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$E_\alpha = -\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} \qquad (1\text{-}32)$$

ایک عام ویکٹر رشتہ (جسے اسٹوکس کا مسئلہ کہتے ہیں)

$$\int(\nabla \times E)\cdot dS = \oint E\cdot dI \qquad (1\text{-}33)$$

جس میں dI ایک انتہائی چھوٹی ویکٹر لمبائی ہے جو تکمیل کے ایک بند راستے کے عام سمت میں ہے کا اطلاق کرکے ہمیں مندرجہ ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\oint E\cdot dI = 0 \qquad (1\text{-}34)$$

کیوں کہ E کا کرل ہر جگہ صفر ہے۔ یہ ظاہر کرتا ہے کہ سکون برقی میدان ایک بقائی میدان ہے یعنی اگر ہم ایک پرکھ چارج کو میدان میں ایک بند راستے کے اوپر حرکت کرائیں تو کوئی کام نہیں ہوگا۔ چونکہ ایک پرکھ چارج کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک لے جانے میں کیا گیا کام راستے کی نوعیت سے آزاد ہے اس لیے ایک اکائی چارج کو انتہائی فاصلے سے دیے ہوئے نقطہ تک لے جانے میں کئے گئے کام کے ذریعہ ہم اس نقطہ کے مضمر کی پوری وضاحت کرسکتے ہیں اگر ہم ابعاد سے کم کے میدانوں کا تصور کریں یعنی منبع جات ایک یا زیادہ سمتوں میں انتہا تک پھیلے ہوئے ہوں تو یہ تعریف مشکلات پیدا کرے گی اور اس لیے انتہا کی جگہ کسی اور نقطہ کو حوالہ کا نقطہ لینا پڑے گا۔ لیکن جب تک صرف محدود ماخذ ہی زیر غور ہیں مضمر کی یہ تعریف کافی ہے اور اس میں سہولیت بھی ہے۔

مساوات (1-31) کو مساوات (1-27) میں رکھنے پر ہمیں پوائسان کی مساوات:

ملتی ہے۔ اور ایسے خطے کے لیے جہاں چارج کا ثقل صفر ہو لاپلاس کی مساوات

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0 \qquad (1-35)$$

ملتی ہے۔ سکون برق کا بنیادی مسئلہ پائسان مساوات کے ایسے حل تلاش کرتا ہے جو کسی خاص زیر غور حالات کے لیے مناسب ہوں۔

1-5 چارج کے تقسیم کی رو سے مضمر مساوات (1-31) میں کسی دیے نقطہ پر سکون برقی مضمر کی تعریف اور اس نقطہ پر برقی میدان کے حساب سے کی گئی تھی۔ چونکہ برقی میدان کا ثقل منبع محض $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ہے تو مساوات (1-9) سے فضا کے ہر نقطہ کے ثقل چارج کے مطابق مضمر

$$\phi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(x'_\alpha)\,dv'}{r(x_\alpha, x'_\alpha)}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

تاہم میدانی نظریہ ہمیں اس حالت میں بھی ایک حل معلوم کرنے کی اجازت دیتا ہے جب $\rho(x_\alpha)$ صرف ایک اختیاری سطح S کے اندر ہی معلوم ہو باقی دوسرے منبع جات کے اثر کی جگہ تب سطح S پر مضمر کی حدی قیمتیں کی جانکاری یا ان کے ماحصل لے لیتے ہیں۔

$\phi(x_\alpha)$ کا ایسا واضح بیان حاصل کرنے کے لیے۔ جو S کے اندر ρ اور S کی سطح پر ϕ، $\nabla\phi$ کے حساب سے ہو ہم گرین کے مسئلہ کا استعمال کرتے کرتے ہیں جس کے مطابق

$$\int(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,dv = \int(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot ds \quad (1-37)$$

یہاں ϕ و ψ مقامی اسکیلر تفاعل ہیں جو تکمیل کے خطہ میں اور اس کی حدود پر مسلسل ہیں اور جن کے پہلے اور دوسرے ماحصل بھی مسلسل ہیں۔ تکمیل مفرد محددیں x'_α پر ہو گی تاکہ نقطہ میدان x_α صرف ایک پیرامیٹر ہو۔ مان لیجیے کہ ϕ مساوات (1-31) کے ذریعہ واضح سکون برقی مضمر ہے اور $\psi = \frac{1}{r}$ لاپلاس کے مساوات کا نقطہ منبع کے لیے حل ہے۔ چونکہ $\frac{\bar{r}}{r^3} = \nabla(\frac{1}{r})$ اور ہمیں

مساوات (1-7) سے معلوم ہے $\nabla'^2(\frac{1}{r}) = \nabla^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(r)$ مساوات
(1-37) میں یہ اظہار رکھنے پر ہمیں

$$-4\pi\int\left[\phi(x'_\alpha)\delta(r) - \frac{1}{r}\frac{\rho(x'_\alpha)}{4\pi\varepsilon_0}\right]dv' = \int\left[\phi\frac{r}{r^3} - \frac{\nabla'\phi}{r}\right]ds'$$

ملتا ہے اس لیے

$$\phi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(x'_\alpha)}{r}dv' + \frac{1}{4\pi}\int\left(-\phi\frac{r}{r^3} + \frac{\nabla'\phi}{r}\right)ds' \quad (1\text{-}38)$$

دھیان رکھئے کہ ہم نے δ تفاعل کے تفاعلی صفات کا استعمال کیا ہے ظاہر ہے کہ مساوات (1-38) بلا δ تفاعل کی مدد کے ایک عددی طریقہ سے بھی دستیاب ہو سکتی تھی۔ اس قسم کا طریقہ حقیقتاً مساوات (1-7) کے حل نہیں مستور تھا اس لیے یہ یہاں غیر ضروری ہے۔

مانا کہ تکملے ایک حجم V پر جو سطح S سے گھرا ہے کئے گئے ہیں۔ مساوات (1-38) کا پہلا تکملہ محض حجم کے اندر پھیلے ہوئے چارج کا حصہ ہے۔ یاد رکھیے کہ حجمی و سطحی دونوں تکملوں میں فاصلہ r نقطہ ناظر x_α اور تکملہ کے نقطہ x'_α دونوں کے محدودین کا تفرق ہے۔

مساوات (1-38) کے سطحی تکملے خط V کے باہر پھیلے چارج کا مجموعی بناتے ہیں اور جو اس وجہ سے پہلے رکن میں شامل نہیں ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ S کے اندر کے کسی نقطہ پر مضمر بلاشبہ S کے اندر کے چارج کی تقسیم سے اور سطح S کے ہر نقطہ کے ϕ اور $\nabla\phi$ کے ضل کی قیمتوں سے جانا جا سکتا ہے۔ خاص طور سے ایک غیر چارج والے حجم کے اندر کا مضمر اوس کو گھیرنے والی سطح پر کے مضمر اور اوس کے عمودی تفرق سے غیر مشکوک طور سے دریافت ہو جاتا ہے۔ جو کچھ ہم نے یہاں دکھایا ہے وہ یہ ہے کہ سطح پر کے مضمر و اوس کے عمودی تفرق کی جان کاری اندر کا مضمر جاننے کے لیے کافی ہے لیکن ہم نے یہ نہیں دکھایا ہے کہ یہ دونوں معلومات ضروری ہیں بعد میں ہم دیکھیں گے کہ ایک غیر چارج والے خطہ کے اندر ہر نقطہ پر مضمر معلوم کرنے کے لیے دراصل یہ کافی ہے کہ یا تو سطح پر مضمر یا اوس کا عمودی

تفرق معلوم ہو۔ فرق صرف ایک مستقلہ کے جڑ جانے کا ہوگا۔ وجہ یہ ہے کہ ہوسکتا ہے ϕ اور $\nabla\phi$ سطح پر آزادانہ واضح نہ ہوں کیوں کہ ϕ لاپلاس کے مساوات کا حل ہونا چاہیے۔

آگے آنے والے جزوں میں ہم سطحی تملون کے اس طبیعاتی وضاحت پر پہنچیں گے جو سطح S پر ایک چارج اور دو قطبی پھیلاؤ کے مساوی ہیں۔ اس لیے ہم یہ نتیجہ نکال سکیں گے کہ حجم میں پھیلے ہوئے سب انفرادی چارجوں کے مضمروں کے سیدھے انطباق سے مضمر کا حساب لگایا جا سکتا ہے۔ لیکن اگر ہم چاہیں تو ایسا بھی کر سکتے ہیں کہ پھیلے ہوئے چارج کے کسی حصّہ کی جگہ اس کے ہم مساوی سطحی چارج کے پرت اور دو قطبی پرت کے پھیلاؤ لے سکتے ہیں۔

مساوات (38-1) کے حجمی حصّہ کو اس طرح دیکھا جا سکتا ہے کہ یہ مساواتِ پوائسان کا ایک خاص حل ہے جب کہ سطحی کڑیاں اس تفرقی مساوات کے تکملے انٹیگرل ہیں۔ اس معنی میں کہ وہ یکساں مساوات یعنی لاپلاسی مساوات کے عام حل ہیں۔

6-1 میدانی ندرتیں

ہم نے مضمر کے مسئلہ کے حل کو حددی حصّوں کے ایک جوڑا ور ماخذ چارجوں کے اوپر پھیلے ہوئے حجمی تکملے کی شکل میں لکھا ہے۔ اگر ثقل پار چ محدود ہے تو یہ حجمی انٹیگرل مضمروں (یا میدانوں) کی عجوبہ قیمتیں نہیں دیں گے۔ لیکن اس کے برخلاف اگر چارجوں کو سطحی خطی یا نقطہ چارج لیا جائے تو جیسا نقشہ 1-1 میں دکھایا گیا ہے عجوبات پیدا ہوں گے۔

نقشہ 1-1

میدانی عجوبیات

چارج کے پھیلاؤ کی قسم	پھیلاؤ کے نزدیک مضمر کا برتاؤ	پھیلاؤ کے نزدیک میدان کا برتاؤ
سطح	r	مستقل
خط	$\log r$	r^{-1}
نقطہ	r^{-1}	r^{-2}
نقطہ 2^n پول	r^{-n-1}	r^{-n-2}

دھیان رکھیے کہ اگر سطحی یا خطی چارج فضا میں انتہا تک پھیلے ہوئے ہیں، (یعنی میدان ایک یا دو العادی تصور کیے گئے ہیں) تو ہم مضمر کو انتہا کے حوالہ سے نہیں لے سکتے۔ گو کہ قدرت میں یہ عجوبیات درحقیقت نہیں ہوتے پھر بھی جس قسم کے میدان پائے جاتے ہیں وہ اکثر متعلقہ خطے کے بڑے حصہ میں آسان تشکیل کے میدانوں سے ناقابل امتیاز ہوتے ہیں۔ حقیقی چارجوں کو نقطہ خطی، یا سطحی چارج تصور کرنا صرف ریاضیاتی سہولیت دیتا ہے بلکہ اس کے علاوہ حقیقی میدانوں کے بیان اور اظہار کے لیے آسان طبیعی نظریات مہیا کرتا ہے۔ ان وجوہ سے ہم اب زیادہ تفصیل سے اس قسم کے منبع جات سے مطابقت رکھنے والے مضمرات کی نوعیت پر بحث کریں گے۔

1-7 نقطہ چارجوں کے جھنڈ (Clusters of point charges)

نقطہ x_α پر واقعہ چارج q کی وجہ سے کسی نقطہ X_α پر مضمر ذیل رشتہ سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[\sum(x_\alpha-x'_\alpha)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \qquad (1-39)$$

اس میں ایک پہلے درجہ کا تجزیہ $r = 0$ کی مطابقت میں نقطہ x'_α پر ہے۔ اس مضمر پر مخالف نشان اور اسی کے برابر چارج کے مضمر کا جو کہ چارج سے فاصلہ $\Delta x'$ ہٹا ہوا ہو، انطباق کرکے زیادہ اونچے درجہ کے ندرتیں پیدا کی جا سکتی ہیں۔ یہ عمل مساوات (1-) کا x'_α کے لحاظ سے تفرق کے مرادف ہے۔ ہم نے مساوات (1-) میں دیکھا ہے کہ صرف نسبتی سمتی قدروں کے کسی فنکشن کا x'_α کے لحاظ سے تفرق نشان کے فرق کے علاوہ وہی نتیجہ دیتا ہے جو x_α کے لحاظ سے تفرق کی وجہ سے ملتا ہے اور میدانی نقطہ پر لاپلاس کا مساوات لاگو ہوتا ہے۔ چونکہ لاپلاس کے مساوات کے حل کا مشتق بھی ایک حل ہے اس لیے ماخذ نقطہ کے لحاظ سے تفرق کا عمل جسے اوپر بیان کیا گیا ہے نئے حل پیدا کرے گا۔ جس میں $r = 0$ کے نزدیک یکے بعد دیگرے زیادہ اونچے درجہ کی ندرتیں ہوں گی۔ ایسے مضمر کثیر قطبی مضمر کہلاتے ہیں۔ ایک بار تفرق سے ہمیں

$$\phi^{(2)} = \frac{\partial \phi}{\partial x'}\Delta x' = \frac{q\Delta x'(x-x')}{4\pi\epsilon_0 r^3} = (q\Delta x')\frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1-40)$$

ملتا ہے۔ اگر ہم

$$\lim_{q\to\infty} q\Delta x' = p^{(1)} \quad (1-41)$$

کو تقسیم چارج کا دو قطبی گردشہ (جس کی سمت $-q$ سے $+q$ کی طرف ہو جیسا شکل 2-1 میں دکھایا گیا ہے) تصور کریں تو ہم اس مضمر کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p^{(1)}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p^{(1)}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p^{(1)}\cdot r}{r^3} \quad (1-42)$$

(r و ∇ کے لیے مروجہ نشان پر بحث جزو 1-1 میں ہو چکی ہے) یہ حل دو قطبی مضمر کہلاتا ہے۔ چارج کے زیادہ اونچے درجہ کے مضمر تقسیم اور نتیجہ کے طور پر چارج کے اونچے درجے کے گردشوں کے میدانوں یا کثیر قطبوں کو جیو میٹریائی چارٹ کے اسی طریقہ سے پیدا کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً 2^{n+1} قطب میدان کو 2^n قطب کے مضمر کو لے کر اس میں سے ایک دوسرے

2^n قطب کے مضمر کو گھٹا کر (یا مخالف علامت والے ہٹے ہوئے 2^n قطب کے مضمر کا انطباق کرکے) حاصل کیا جاسکتا ہے جو پہلے کے مقابلہ میں انتہائی چھوٹے فاصلہ سے کسی من مانی سمت میں ہٹا ہوا ہے۔

شکل 2-1 ایک برقی دو قطبہ کی پیدائش

اس طرح 2^n قطب کے مطابق مضمر کی عمومی شکل یہ ہے۔

$$\phi^{(2n)} = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!} \frac{\partial^n}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta \cdots}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(-1)^n p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \cdots}\frac{1}{r} \quad (1\text{-}43)$$

جہاں $\phi^{(n)}$ عام طور سے تین العاد میں ایک n ویں درجہ کا ٹینسر ہوگا۔ وہ نقل جس کے ذریعہ ایک کثیر پول ایک چھوٹے درجہ کے پول سے پیدا ہوتا ہے سمتی قدری محوروں کی سمت میں ہونا ضروری نہیں ہے۔ لیکن ترچھے نقل کے مطابق مشتق کو z، y، x کے لحاظ سے مشتقات کے جوڑ کی شکل میں لیا جاسکتا ہے۔ جن میں نقل کے سمتی کو سائن ضربیہ کی شکل میں ہوں گے۔ کثیر قطبوں کی کچھ آسان مثالیں شکل 3-1 میں دکھائی گئی ہیں۔

شکل 3-1 کثیر قطبوں کی مثالیں: (a) خطی چہار قطبہ (b) خطی ہشت قطبہ (c) دو العادی چہار قطبہ (d) سہ العادی ہشت قطبہ

اس مخصوص حالت میں جب سبھی نقل ایک ہی سمت میں ہو تو ایسی حالت میں محوری تشاکل ہوگا اور میدانی نقطہ کے تعین کے لیے صرف ایک زاویہ کی ضرورت ہوگی۔ اسے خطی 2^n پول کہتے ہیں۔

$$\phi^{(2n)}(x,y,z) = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{1}{r} = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{P_n \cos\theta}{r^{n+1}} \quad (1\text{-}44)$$

جہاں $P_n(\cos\theta)$ لیجنڈر پالی نامیل n درجہ کا ہے جسے اس رشتہ کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1\text{-}45)$$

جس میں x اور r کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔ خطی پول کے لیے $p^{(n)}$

کی تعریف اس توالی رشتہ سے ہوتی ہے۔

$$\lim_{\substack{\Delta x'_n \to 0 \\ p^{(n-1)} \to \infty}} n\, p^{(n-1)}\, \Delta x'_n = p^{(n)}$$

جہاں $\Delta x'_n$ وہ نقل ہے جس سے ہم 2^n پول پر پہنچتے ہیں۔

مساوات کو ہم ماخذ کی سمتی قدروں کے لحاظ سے $\frac{1}{r}$ کے عام ٹیلر پھیلاؤ کی n ویں رقم تصور کر سکتے ہیں۔ اس میں ضربیے کثیر قطبی گردشے ہیں جن کی تعریف نوعی تقسیم چارج کے لحاظ سے اوپر کی جا چکی ہے۔ اب ہم یہ دکھائیں گے کہ کسی من چاہے محدود پھیلاؤ والے تقسیم چارج $p(x'_\alpha)$ کے مضمر کو زیادہ دوریوں پر ہمیشہ کثیر قطبی مضمروں کے جوڑ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں ضربیے تقسیم چارج کے کوئی تکمیلہ (گردشے) ہوتے ہیں۔

اس بیان کے ثبوت کی سہولیت کے لیے ہم سمتی قدریں ماخذ تقسیم چارج میں یا اس کے نزدیک لیں گے (شکل 4-1)

ماخذہ کے گرد تقسیم چارج p کے تحرکوں کے لحاظ سے P نقطہ پر مضمر کے کثیر قطبی پھیلاؤ کے لیے جیومیٹری۔

مان لیجیے کہ R نقطۂ ماخذ O سے نقطۂ میدان تک کا فاصلہ ہے۔ یعنی R کے اجزا x_α ہیں۔ سمتی قدری ویکٹر کو جس کے اجزء x'_α ہیں ہم سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم تب $\frac{1}{r}$ کو x'_α کی قوتوں میں (اور O کے گرد پھیلا سکتے ہیں یہ مان کر کہ $\frac{a}{R} << 1$ جہاں a محدود تقسیم چارج کی ایک منتہی ابعاد ہے۔ بمطابق ٹیلر سے

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + x'_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r=R} + \frac{1}{2!} x'_\alpha x'_\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r=R} + \cdots \quad (1\text{-}46)$$

مساوات (46-1) میں ہم "جوڑ کی روایت" کا استعمال کر رہے ہیں جسے ہم برابر استعمال کریں گے۔ وہ یہ ہے اگر اسی رقم میں مددوں کو دہرایا جائے تو اس کا مطلب ان مددوں پر جوڑ مانا جائے گا۔ عام مضمر میں مساوات (46-1) کو رکھنے پر ہمیں کثیر قطبیہ کا پھیلاؤ ملتا ہے۔

$$\phi(X_\alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(X'_\alpha)}{r}\,dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big\{\frac{1}{R}\int \rho\,dv' + \Big[\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]_{r=R}\int X'_\alpha\,\rho\,dv' + \frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha\,\partial x'_\beta}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]_{r=R}\int x'_\alpha\,x'_\beta\,\rho\,dv' + \cdots\Big\} \quad (1-47)$$

ضریبے تقسیم چارج کا گردشہ بتاتے ہیں: $\int \rho\,dv'$ کل چارج q ہے $\int X'_\alpha\,\rho\,dv'$ دو قطبی تحرک کا α جزء ہے وغیرہ۔ مساوات (1-47) کے ہر رقم کا قطبی وزا دیائی انحصار صاف طور سے اس کے مشابہ ہے جو مساوات (1-43) دیتا ہے۔

دھیان دیجیے کہ الفاظ 'دو قطبہ' 'چہار قطبہ' وغیرہ دو طرح سے استعمال کیے جا رہے ہیں۔ ایک تو ایک مخصوص تقسیم چارج بتانے کے لیے دوسرے کسی من چاہے تقسیم چارج کے مومینٹ بتانے کے لیے۔ دونوں طبعی مقداریں مضمر کی وہی تقسیم دیتی ہیں۔

اختیاری محوروں کے لحاظ سے منشا کلی چہار ٹینسر

$$Q_{\alpha\beta} = \int x'_\alpha\,x'_\beta\,\rho\,dv' \quad (1-48)$$

کے چھ اجزا ہوتے ہیں۔ اور اگر خاص محوروں کے لحاظ سے لیا جائے تو اس میں تین فطری اجزا ہوتے ہیں۔ موخر ذکر حالت میں کسی بھی اختیاری سمتی قدری نظام کی نسبت سے مخصوص محوروں کی تشریق کا تعین کرنے کے لیے تین پیرامیٹرول کی ضرورت ہوگی۔ اب ہم یہ دکھائیں گے کہ چہار قطبی مضمر $\phi^{(4)}$ جو مساوات (1-47) کی تیسری رقم ہے، کا انحصار صرف دو مقداروں پر ہے اگر اسے خاص محوروں کی نسبت سے لیا جائے۔

چنانچہ

$$\phi^{(4)} = \frac{1}{2}\Big\{\Big[\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha\,\partial x'_\beta}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]_{r=R} Q_{\alpha\beta}\Big\}$$

$$\phi^{(4)} = \frac{1}{6}\Big\{\Big[\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha\,\partial x'_\beta}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]_{r=R}\big(3Q_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}Q_{\gamma\gamma}\big)\Big\}$$

جو کہ

کے مرادف ہے جہاں ایک اکائی دوسرے درجہ کا ٹینسر ہے۔ $S_{\alpha B}$ جو $\alpha \neq B$ کے لیے صفر کے برابر ہے اور $\alpha = B$ کے لیے ایک کے برابر ہے (جوڑ کی روایت $Q_{\gamma\gamma}$ ... چہار قطبی ٹینسر کے فطری رقوم کا جوڑ ہے) مساوات (1-49)

کی فاضل رقم کا مضمر پر کوئی اثر نہیں ہوگا کیوں کہ

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\delta^2}{\delta x_\alpha \delta x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \qquad (1-50)$$

اس لیے مساوات (1-49) میں $Q_{\alpha\beta}$ کی جگہ $D_{\alpha\beta}/3$ رکھا جا سکتا ہے

جہاں

$$D_{\alpha\beta} = 3Q_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\, Q_{\gamma\gamma} \qquad (1-51)$$

خاص محوروں کے لیے تبدیل کرنے پر ظاہر ہے کہ $D_{\alpha\beta}$ کے صرف دو خود مختار اجزا رہیں گے کیوں کہ $D_{\alpha\alpha} = 0$ - اگر مساوات (1-51) کو کارتیسی اجزا میں لکھا جائے تو یہ دیکھا جائے گا کہ $D_{\alpha\beta}$ (جسے رواجاً چہار قطبی گردشے کہتے ہیں) دوسرے گردشوں Q_{xx} ، Q_{yy} ، Q_{zz} کے فرقوں پر منحصر ہوتا ہے اگر اسے خاص محوروں کے لحاظ سے لیا جائے۔

اگر تقسیم چارج کا کوئی متشاکل محور ہو مثال کے طور پر محور x تو مضمر کا انحصار واحد مقدار

$$D = 3Q_{xx} \overset{2}{-} (Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}) = \int \rho\,(3x'^2_\alpha - r'^2)\,dv \qquad (1-52)$$

پر ہوگا جو کہ تقسیم چارج کی غیر مرکزیت کی ایک سیدھی ناپ ہے۔

8-1 دو قطبی تفاعل

ایک برقی ذو قطبہ p کو ایک برقی میدان E میں لیجیے جس کا مکانی تغیر سن مانے ڈھنگ کا ہو۔ برقی میدان اور برقی ذو قطبہ کی تعریفوں سے ہمیں ملتا ہے کہ

$$F_\alpha = p_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} E_\alpha \qquad F = (p\cdot\nabla)E \qquad (1-53)$$

چونکہ $\Delta x'$ لمبائی والے ایک ذو قطبہ کے لیے قوت F کا α واں جز ذو قطبہ کے ہر سرے پر F_α سے بدل کر مساوات (1-53) کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$F = (p\cdot\nabla')E = \nabla'(p\cdot E) - p\times(\nabla'\times E) \qquad (1-54)$$

اس لیے ایک برقی سکونی میدان میں (جس کے لیے $\nabla'\times E = 0$) قوت F

کو ایک توانائی سے اس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے کہ

$$F = -\nabla' U \qquad (1-55)$$

جہاں

$$U = -(p \cdot E) \qquad (1-56)$$

اس سے ہمیں میدان F میں ایک مستقل گردشہ والے دو قطبہ کی توانائی اس کے مقام و تشریق کے لحاظ سے ملتا ہے۔ اگر میدان غیر گردشی ہے (جیسا کہ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدانوں کی موجودگی میں ہوگا) تو بھی قوت کی عبارت (1-53) صحیح رہتی ہے لیکن ایک مضمر توانائی سے اخذ نہیں کی جاسکتی۔

دو قطبہ پر کام کرنے والے قوت گردشہ L کو مساوات (1-56) کا تفرق P اور E کے درمیانی زاویہ کے لحاظ سے کرنے پر دستیاب کیا جاسکتا ہے یا پھر براہ راست قوتوں کا حساب لگا کر کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں ملتا ہے۔

$$L = P \times E$$

L کی سمت P, E کی مثبت سمتوں کی طرف مائل ہونے کی کوشش کرتی ہے۔ آیئے اب ہم دو قطبوں کے درمیان جن کے گردشہ ویکٹر ایک دوسرے سے فضا میں کسی اختیاری زاویہ پر سمت مند ہیں، تفاعلی قوت و توانائی پر دھیان دیں جیسے کی شکل 1-5 میں دکھائے گئے ہیں

شکل (1-5) دو قطبوں کے درمیان تفاعل

اوپر دیے قوں کے مساوات کو مضمر مساوات (1-42) و میدانی مساوات (1-31) کے ساتھ ملانے پر دو قطبہ کے میدان E میں دو قطبہ L پر لگنے والی قوت ملتی ہے چنانچہ

$$\phi = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} p_2 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$E = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left[p_2 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right];$$

$$F = (p_1 \cdot \nabla)E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (p \cdot \nabla)\left\{\nabla\left[p_2 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\right\} \quad (1-58)$$

دو قطبوں کے بیچ تفاعلی توانائی میدان کو توانائی کی عبارت U میں

ر کھنے پر دستیاب ہو تی ہے۔ ہمیں قطبہ ذو قطبہ کے میدان میں دو قطبہ کی توانائی $U_{2/1}$ ملتی ہے۔ اس کا بر عکس کرنے پر U_{21} ملتا ہے۔

$$U_{12} = -p_1 \cdot E = -\frac{(p_1 \cdot \nabla)}{4\pi\epsilon_0}\left[p_2 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{p_1 \cdot p_2}{r^3} - \frac{3}{r^5}(p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r)\right] \quad (1\text{-}59)$$

یہ دو قطبوں کی تفاعلی توانائی کی عام عبارت ہے۔

9-1 سطحی ندرتیں

دوسرے درجہ کی یا قطبی قسم کی سطحی ندرتیں برقی سکونیات دونوں کے لیے خاص رغبت رکھتی ہیں۔ چارج کی ایک دوہری پرت کا نظام لیجیے جس کا فی اکائی رقبہ دو قطبہ گردشہ T ہے۔ اس قسم کی تقسیم سے پیدا شدہ مضمر کی عبارت مندرجہ ذیل ہو گی۔

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{T \cdot r}{r^3}\, ds \quad (1\text{-}60)$$

اس حالت میں جب T یکساں ہو اور مشہور نقطہ سے باہر کی طرف سطح کے عمود کی سمت میں تو یہ عبارت

$$\phi = \frac{-|T|}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r \cdot ds}{r^3} = \frac{-|T|}{4\pi\epsilon_0}\,\Omega \quad (1\text{-}61)$$

میں تخفیف ہو جاتی ہے۔ یہاں Ω وہ ٹھوس زاویہ ہے جو دو قطبی پرت مشہور نقطہ پر گھیرتا ہے جیسا شکل 6-1 میں دکھایا ہے مشہور نقطہ جیسے ہی سطح کو پار کرتا ہے غیر محدود سطح کے ذریعہ گھیرا ہوا ٹھوس زاویہ غیر مسلسل طور پر 4π سے جست کرتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اس مثالی حالت میں جب کہ دو قطبی چارج پرت انتہائی پتلی ہو تو مضمر فنکشن میں $|T|/\epsilon_0$ قدر کا عدم تسلسل ہو گا لیکن دو قطبی سطح پر اس کا مشتق مسلسل ہو گا۔

شکل 6-1 ایک دو قطبی پرت کا مضمر

شکل 7-1 مضمر کا برتاؤ (الف) ایک دو قطبی پرت پر (ب) ایک چارج کے پرت پر دوسری طرف ایک سادہ سطحی چارج کی پرت میں مضمر میں کوم

عدم تسلسل نہیں ہوگا بلکہ مضمر کے عمودی مشتق میں عدم تسلسل پیدا ہوگا جس کی قدر ہوگی۔ جہاں 6 پرت کا سطحی چارج کثافت ہے۔ دونوں حالتوں کا موازنہ شکل 7-1، (ب) دکھایا گیا ہے۔ چونکہ سطحی چارج پرتوں اور دو قطبی پرتوں کے ذریعہ ہم مضمر اور کسی مخصوص سطح پر اس کے مشتق میں عدم کوئی اختیاری عدم تسلسل پیدا کر سکتے ہیں اس لیے ہم کسی دیے ہوئے حجم کے باہر اس حجم کو ایک مناسب چارج پرت اور دو قطبی پرت سے گھیر کر مضمر کو صفر بنا سکتے ہیں۔ اس سے گرین کے مصدقہ سے اخذ کیے ہوئے مساوات (1-38) کی سطحی رقوم کی اہمیت کی مزید تشریح ہوتی ہے۔ جب سطح پر ϕ اور $\nabla\phi$ کی صحیح قیمتیں بہ لحاظ τ، σ لگائی جائیں تو رقوم بالکل وہی ہیں جو S کی سطح کے اندر کے ان چارجوں کے S کے باہری خط والے میدان کو رد کرنے کے لیے ضروری ہیں۔ یہ بات مساوات (1-38) کو اس طرح سے لکھنے پر بھی دیکھی جا سکتی ہے

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\int \frac{\rho\, dv}{r} + \int \tau\, \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s}}{r^3} + \int \sigma \frac{ds}{r}\right\} \quad (1\text{-}62)$$

جہاں $\tau = \epsilon_0 \phi$ σ ϕ کے عمودی مشتق کا گیا ہے۔

ایک ایسے مشترک سطحی چارج اور دو قطبی پرت کی مثال کے لیے جو ایک دی ہوئی سطح کے باہر میدان کو پورا رد کر دے لیکن سطح کے اندر کے میدان کو جیوں کا تیوں رہنے دے، ایک نقطہ چارج q نقطہ $R = 0$ پر لیجیے اور اس چارج کو گھیرنے والی سطح $R = a$ لیجیے اگر ہم کرۂ $R = a$ پر ایک سطحی چارج جس کا ثقل $\sigma = \frac{-q}{4\pi a^2}$ فی اکائی رقبہ ہو رکھیں تو یہ ایک مضمر پیدا کرے گا جو

$$\phi_\sigma = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} \qquad R < a \text{ کے لیے}$$

$$\phi_\sigma = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad \text{اور } R > a \text{ کے لیے}$$

ہوگا۔ اگر اس کے علاوہ ایک سطحی قطبی پرت بھی جس کا گردشہ $\tau = \frac{qR}{4\pi a R}$ فی اکائی رقبہ ہو کرہ پر رکھ دیا جائے تو اس کی وجہ سے ϕ_τ کی مزید

شرکت ہو جائے گی۔

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad , \quad R < a$$
$$\phi_r = 0 \quad , \quad R > a$$

R کی سبھی قدروں کے لیے ابتدائی چارج q کا مضمر $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ان سب مضمروں کا جوڑ

$$\phi = \phi_0 + \phi_r + \phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

جب کہ $R > a$

$$\phi = 0$$

جب کہ $R > a$

رقبہ S کے ایک ذوقطبی پرت کے ذریعہ پیدا شدہ برقی میدان جیسا کہ شکل 8-1 میں دکھایا گیا ہے، مندرجہ ذیل طریقہ سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

شکل 8-1 ایک ذوقطبی پرت پیدا برقی میدان کا اخذ

نقطۂ مشاہدہ x_a کے فاصلہ dx سے نقل کے مطابق مضمر میں پیدا ہوئی تبدیلی پر غور کیجیے۔

$$d\phi = -E\cdot dx$$

ذوقطبی پرت کے ذریعہ میدانی نقطہ پر گھیرے ہوئے ٹھوس زاویہ میں بھی تبدیلی $d\Omega$ بھی وہی ہوگی چاہے میدانی نقطہ فاصلہ dx سے حرکت کرے یا پرت dx سے حرکت کرے۔ یہ دوسری حالت شکل میں دکھائی گئی ہے۔ چونکہ اس نقل میں حد کا ایک قطعہ dl رقبہ $dx \times dl$ طے کرتا ہے اس لئے ٹھوس زاویہ میں کل تبدیلی یہ ہوگی۔

$$d\Omega = \oint \frac{(dx \times dl)\cdot r}{r^3} = \oint \frac{(dl \times r)\cdot dx}{r^3} \quad (1\text{-}64)$$

اس ٹھوس زاویہ کی تبدیلی کے مطابق مضمر میں تبدیلی، مساوات (1-61) کے مطابق مندرجہ ذیل ہوگی۔

$$d\phi = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1\text{-}65)$$

(منفی نشان اس حقیقت کی وجہ سے آتا ہے کہ ذوقطبی پرت کا منفی رُخ x_a

سقیم مشاہدہ کی طرف ہے) ϕ α کی دونوں عبارتوں کو برابر رکھنے پر

$$-E\cdot dx = \frac{-\tau}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{(dl \times r)\cdot dx}{r^3} \qquad (1\text{-}66)$$

چونکہ dx ایک اختیاری نقل ہے اور یہ آخری عبارت سب ممکن dx کے لیے لاگو ہے اس لیے یہ لکھنا جائز ہوگا کہ

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dl \times r}{r^3} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \oint dl \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (1\text{-}67)$$

یہ حقیقت کہ ایک دو قطبی پرت کا مضمر سطح پر دوہری قدر رکھتا ہے بالکل صحیح صرف اس منتہی حالت میں ہو گی جب کہ دو قطبی پرت کی موٹائی صفر ہو جائے (دیکھیے شکل 7-1) اس وجہ سے عدم تسلسل کا درحقیقت کوئی طبعی وجود نہیں ہوتا۔ پھر بھی ایسے عدم تسلسل کے ذریعہ غیر بقائی مضمروں کے پیدا کرنے کا طریقہ سود مند ہے اور خاص طور سے کرنٹوں کی وجہ سے پیدا ہوئے مقناطیسی میدانوں کے نظارے ہیں جہاں کہ متعلقہ مضمر کا کثیر قدری رویہ ہوتا ہے جو سطحی گردشے کی خصوصیات کے بالکل مماثل ہوتا ہے۔

10-1 دو قطبی گردشے کی حجمی تقسیم

دو قطبی گردشے کی حجمی تقسیم کی وجہ سے مضمر مساوات (42-1) میں دو قطبی گردشے کو ایک حجمی ثقل کے طور پر لے کر سارے حجم پر تکملہ کرنے سے مل سکتا ہے۔ اگر اکائی حجم کے لیے دو قطبی گردشہ P ہے تو

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int P\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv' \qquad (1\text{-}68)$$

اس کو گاس کے مصدقہ ڈائیورجنس اور نیچے دیے رشتہ کے ذریعہ ایسی شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ جو طبعی لحاظ سے زیادہ پُر معنی ہے۔

$$\nabla'\cdot\left(\frac{P}{r}\right) = \frac{1}{r}\nabla'\cdot P + P\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (1\text{-}69)$$

ہم پاتے ہیں۔

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int \nabla'\cdot\left(\frac{P}{r}\right) dv' - \int \frac{1}{r}\nabla'\cdot P\, dv'\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int \frac{P\cdot ds}{r} - \int \frac{\nabla'\cdot P}{r} dv'\right] \qquad (1\text{-}70)$$

اس عبارت کی وضاحت اس طرح کی جا سکتی ہے رقم سطحی تکملہ سے

اور یہ ایک مضمر ہے جو سطحی چارج کثافت کے مرادف ہے۔ جب کہ دوسری رقم ایک حجمی ایسا مضمر ہے جو چارج کثافت کے مرادف ہے۔ وہ چارج کثافتیں جن کے مضمران مضمروں کے مرادف ہیں جو فضا کے کسی خطہ کی حجمی قطبیت سے پیدا ہوتے ہیں، یہ ہیں

$$\sigma_p = P_n \qquad \rho_p = -\nabla \cdot P \qquad (1\text{-}71)$$

دھیان رکھیے کہ اگر P میں کوئی عدم تسلسل نہیں ہیں تو حجمی چارج ∇P - = ρ_p ماخذ کے بیان کے لیے کافی ہے، یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر $\nabla \cdot P$ حد پر لاانتہا ہو جاتا ہے تو مساوات (71-1) میں دیا σ_p کی عبارت حاصل ہوگی۔

ان سطحی و حجمی چارجوں اور قطبیت کے درمیان رشتے خالص جیامٹری کے روسے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہمیں فی اکائی حجم ایک غیر متجانس دو قطبی گردشہ دیا ہوا ہے تو وہ اس چارج کثافت کو بتائے گا۔ ρ_p جو حجم میں پھیلے ہوئے انفرادی دو قطبوں کے سروں کے پوری طور سے منسوخ نہ ہونے کی وجہ سے جمع ہو جاتا ہے۔ دوسری طرف مقدار سطح پر اس چارج کثافت کو بتاتی ہے جو کہ ان دو قطبوں کے پڑوسیوں کی کمی کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے جن کے سرے سطح پر واقع ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ ρ_p ایک متجانس وسیلے میں ρ_p صفر ہو جائے گا۔ درحقیقت اس کے صفر ہونے کی کافی شرط یہ ہے کہ فی اکائی حجم دو قطبی گردشے کا ڈائیورجنس صفر ہوتا ہے۔ بہرحال عام طور سے دونوں قسم کے قطبیت چارجوں کی وجہ سے مضمر مندرجہ ذیل ہوتا ہے۔

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int \frac{\sigma_p\, ds'}{r} + \int \frac{\rho_p\, dv'}{r}\right] \qquad (1\text{-}72)$$

---

[1] چونکہ $\rho_p = -\nabla \cdot P$ ایک میدانی مساوات ہے ∇ پر لگا نشان بغیر کسی اشتباہ کے چھوڑا جا سکتا ہے ∇ پر نشان صرف ان تکمیلی عبارتوں میں ضروری ہے جو ایک میدانی مقدار کا رابطہ ایک ماخذ مقدار کے اوپر لیے گئے تکمیلہ سے دکھاتے ہیں۔

دھیان رکھیے کہ مساوات (1-71) کے ہم ترادف رشتے، حقیقت میں مساوی جیامٹریائی مقادیر ہیں اگرچہ ان کا اخذان برقی میدانوں کے ذریعہ کیا گیا ہے جس میں مطابقہ رقمیں پیدا کرتی ہیں۔ کسی بھی تقسیم کے کل دو قطبی گردشہ p کو لے کر ہم اسے باقاعدہ دیکھ سکتے ہیں مرادف رشتوں کے مطابق ہمیں یہ ملنا چاہیے۔

$$p = \int P\,dv' = \int \xi_\alpha \rho_p\,dv' + \int \xi_\alpha \sigma_p\,dS' = -\int \xi\,(\nabla' \cdot P)\,dv' + \int \xi\,(P \cdot dS') \quad (1\text{-}73)$$

جہاں وہ سمیتہ ہے جس کے اجزا x'_α ہیں p کے α ویں جز کی ٹکڑوں میں تکمیل اس مماثلہ سے کی جا سکتی ہے۔

$$\nabla' \cdot (x'_\alpha P) = x'_\alpha \nabla' \cdot P + P_\alpha$$

اس لیے

$$p_\alpha = \int P_\alpha\,dv' = -\int x'_\alpha \nabla' \cdot P\,dv' + \int \nabla' \cdot (x'_\alpha P)\,dv'$$

$$= -\int x'_\alpha \nabla' \cdot P\,dv' + \int x'_\alpha P \cdot dS'$$

اس طرح مساوات (1-73) ایک جیامیٹریائی رشتہ کے طور سے ثابت ہو جاتا ہے جس میں کسی قسم کے تفاعل کا ذکر نہیں ہے۔

مجوزہ حوالے

M. Abreham and R. Becker, The classical Theory of Electricity and Magnatism Volume and Electromagnetism.

اونچے درمیانی سطح کی مستند کتاب جس کے شروع میں ویکٹر تجزیہ و ویکٹر میدانوں کے اوصاف کا نہایت عمدہ مختصر بیان دیا ہے ابراہم و بیکر کی کتاب میں سب جگہ گاس کی اکائیوں کا استعمال کیا گیا ہے جیسا کہ زیادہ تر برقی مرکبات کی دوسری درسی کتابوں میں بھی ہے۔ اکائیوں کے موازنہ کے لیے اس کتاب کا ضمیمہ 1 دیکھیے۔

---

[1] ہر باب کے آخر میں جن حوالوں کی فہرست دی گئی ہے ان کا مکمل بیان کتاب کے آخر میں دی ہوئی فہرست کتب میں کیا گیا ہے۔

G.P. Harwed, Principles of Electricity

درمیانی سطح کی درسی کتاب معہ تکنیکی اطلاق
برق سکونیات کا وسیع بیان ہے لیکن ویکٹر ترقیم سے پرہیز کیا گیا ہے۔

J.H. Jeans, Electricity and Magnetism.

W.R.Smythe Static and Dynamic Electricity

برق سکونیات اور مضمر مسائل کے حلوں کا (انگریزی زبان میں) سب سے زیادہ
وسیع اور جدید بیان۔

J.A. Stratton اس کتاب میں میکویل کے مساوات کو مان کر آگے
Electromagnatic Theory بڑھا گیا ہے اس لیے برق سکونی
میدان کا ذکر بہت بعد میں آیا ہے۔ غیر محودی نقلوں کے لیے کثیر قطبوں کا نظریہ
کی مربعی طور پر دیا گیا ہے۔

برق سکونی میدان کا بیان نظریاتی طبیعیات کی مشہور کتابوں میں بھی
دیا گیا ہے۔

P.G. Bugmarh,, Basic Theories of Physics Mechanies& Electrodynamic

s G. Joos, Theoritical Physics.

L.Page, Introduction to TheoreticalPhysiq

J.Slater and N. Frank, Introduction to Theoritcal Physics or Electromagnetism

Smythe اور Jeans میں لیجنڈر فنکشنوں کے اوصاف اختصار میں
میں ملیں گے اور کارآمد شکل میں حوالہ کی ایسی ریاضی کی کتابوں میں بھی
ملیں گے جیسے: H. Margenau and G.M. Murphy, The

Mathematics of Physics & Chemistry.

L.A. Pipes, Applied Mathematics for Engineers and Physicists.

1 - اگر D ، C ، B ، A ویکٹر ہوں تو دکھایئے کہ

(a) A · B ایک اسکیلر ہے

(b) A × B ایک نقلی ویکٹر ہے

(c) A · (B × C) ایک نقلی اسکیلر ہے

(d) (A × B) · (C × D) ایک اسکیلر ہے

2 - یہ دکھایئے کہ ایک کرّوی سطح پر مضمر کی اوسط قدر کرّہ کے مرکز پر کے مضمر کے برابر ہوتی ہے بشرطیکہ کرّہ کے اندر کوئی چارج نہ ہو۔

3 - مشق 2 کے نتائج کے طور پر دکھایئے کہ ایک برق سکونی میدان میں کسی چارج کو تعادل کی حالت میں نہیں ٹھرایا جا سکتا (یہ ارن شا کا مصدقہ ہے)

4 - دکھایئے کہ گرین کا مصدقہ، مساوات (37-1) گاس کے ڈائیورجنس مصدقہ سے اخذ ہوتا ہے۔

5 - ہمیں ایک البادی، δ فنکشن کی ضرورت پڑے گی جس کی تعریف یہ ہے۔

$$\int \delta(x-a)\,dx = 1$$

$$\int f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

جہاں x = a تکمیلہ کا وقفہ ہے ورنہ دونوں تکمیلے غائب ہو جاتے ہیں۔ فوریر تکمیلہ مصدقہ کے ذریعہ دکھایئے کہ

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} \cos kx\,dk = 2\pi\,\delta(x)$$

اس معنی میں کہ دونوں کا رویہ اسی طرح کا ہے جیسا کہ متکمل کے جزو ضربی کا

6 - کسی ڈسک محوری نقطہ کو لے کر ثابت کیجیے کہ ایک برقی پرت کے ایک طرف سے دوسری طرف جانے میں مضمر میں یکایک کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی اور کہ یہی بات دو قطبی پرت کے معاملہ میں مضمر کے عمودی مشتق کے لیے بھی لاگو ہوتی ہے۔

7 - اس قسم کے فنکشن جیسے کہ $\phi = x$ ، $\phi = x^2 + 2y^2 - 3z^2$

فضا کے ہر نقطہ پر مساوات لاپلاس نظیں کرتے ہیں کیا اس کا یہ مطلب ہے کہ اس طرح کے مضمروں کے کوئی ماخذ نہیں ہوتے ؟۔ ایسے حلوں کی اہمیت پر اور مضمون کے لیے یکتا ثبوت پر ان کے اثرات پر تفصیل سے بحث کیجیے۔

8۔ اگر ایک نقطہ چارج q کا برقی میدان $q r^{-2-s}\hat{r}$ کے متناسب ہو جہاں $\hat{r}$ نیم قطری اکائی ویکٹر ہے اور $s << 1$ تو

(a) $\nabla \cdot E$ اور $\nabla \times E$ کی قدر نکالیے جب کہ

(b) اگر دو ہم مرکزی چالک کرّوی شیل جن کے نیم قطر بالترتیب a اور b ہیں ایک بہت باریک تار سے جوڑ دیے جائیں اور باہری شیل پر چارج q_a ہو تو ثابت کیجیے کہ اندرونی شیل پر چارج q_b ہوگا جب کہ

$$q_b = \frac{-q_a \delta}{2(a-b)} \{[2b \log 2a - (a+b)\log(a+b) + (a-b)\log(a-b)]\} + O(\delta)^2$$

(جیکسن میں دیے سوال سے بنایا گیا)

9۔ دکھائیے کہ سکونی مضمر $\phi(x, y, z)$ جو کہ a کے تیسرے درجہ تک صحیح ہو، نیچے دیے نقطوں پر مضمروں کے اوسط کے برابر ہوگا

$$x \pm a, y, z; \quad x, y \pm a, z; \quad x, y, z \pm a$$

10۔ ایک کرّوی طور پر نشاکل محدود تقسیم چارج کا مضمر $\phi = \int_r^\infty E \cdot dr$ کے ذریعہ حساب لگانے پر مندرجہ ذیل آتا ہے۔

$$\phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr''}{r''^2} \int_0^{r''} \rho r'^2 dr'$$

اس تقسیم کو پتلے شیلوں میں بانٹ کر جن میں سے ہر ایک اپنے اندر واقع سبھی نقطوں پر ایک مستقل مضمر دیتا ہے۔ ϕ کے لیے ایک عبارت دریافت کیجیے جس میں صرف اکہرے تکملے ہوں۔ ثابت کیجیے کہ دونوں عبارت ایک برابر ہیں۔

11۔ دو ہم ستوا برقی قطبے لیجیے جن کے مراکز ایک مستقل فاصلہ پر ہوں۔ اگر یہ قطبے اپنے مرکزوں کو جوڑنے والے خط سے بالترتیب θ اور θ' زاویے بناتے ہوں اور اگر θ کو مستقل رکھا جائے تو دکھائیے کہ تعادل

کے لیے۔

$$\tan\theta = -\frac{1}{2}\tan\theta'$$

12- قوت خطوط کے تفرقی مساوات یہ ہیں۔

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

مومینٹ p والے ایک دو قطبہ کے لیے جس کی سمت محور x کی طرف ہو اور جو میدان پر واقع ہو مساوات مستقل $= f(x, y)$ دریافت کیجیے جو مستوا $z = 0$ میں قوت خطوط کو دے۔

13- دو ہم مرکزی ہم مستوا حلقی چارجوں کے جو q, q' کا چہار قطبی گردشہ معلوم کیجیے جب کہ ان چارجوں کے نصف قطر بالترتیب a اور b ہیں۔

14- دو یکساں خطی چارج جن میں ہر ایک کی لمبائی $2a$ ہے ایک دوسرے کو مبداء پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان کے سرے $(\pm a, 0, 0)$ اور $(0, \pm a, 0)$ نقطوں پر ہیں۔ $r > a$ نقطوں کے لیے r^{-5} والی ارقام تک ϕ دریافت کیجیے۔ لیکن اس میں r^{-9} والے ارقام شامل نہ ہوں۔

15- دکھائیے کہ ایک مشاکل 2^n پول کا مضمر جسے نقطہ مضمر کو n بار یکے بعد دیگرے ایسی سمتوں میں جو ایک دوسرے سے زاویہ $\frac{2\pi}{n}$ بناتی ہیں تفرق کر کے پیدا کیا گیا ہے مندرجہ ذیل عبارت سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\text{Const}}{r^{n+1}} P_n^n(\cos\theta)\cos n(\varphi - \varphi_0)$$

16- دکھائیے کہ مساوات (58-1) میں اگر p_1 اور p_2 کو آپس میں تبدیل کر لیا جائے۔ تو اس مساوات کی علامت بدل جاتی ہے۔

باب 2

حدی شرائط اور مائیکرو اور میکرو پیمانہ کے درمیان کا رشتہ

پہلے باب میں زیر غور فی اکائی حجم قطبی گردشے ایسے ماخذ کی مخصوص مثالیں ہیں جو برق سکونی میدان پیدا کرتے ہیں اور اس لیے یہ پوائساں کے مساوات میں ایک خاص قسم کی چارج کثافتوں کی طرح سمجھے جاسکتے ہیں۔ چونکہ اس طرح کی تقسیمیں مادی وسیلوں میں برقی میدانوں کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں اس لئے ایک میدان میں کسی وسیلے کا رویہ اس کی قطبیت یعنی اس کے اکائی حجم کے دو قطبی گردشہ کے ذریعہ بیان کیا جاسکتا ہے قطبیت کو صاف طور سے سمجھنے کے لیے رواج یہ ہے کہ برقی سکونی میدان پیدا کرنے والے پورے چارج کو دو حصوں میں بانٹ دیا جائے۔ ایک حقیقی آزاد قابل حرکت چارج ρ اور دوسرے ایک بندھا ہوا مجموعی طور پر صفر قطبیت کا چارج ρ_p۔ یہ تقسیم کسی حد تک اس لحاظ سے من مانی ہے کہ قطبیتی چارج ρ_p محض علاحدہ کیے گئے چارج کو ظاہر کرتا ہے جو کہ درحقیقت کسی خاص تجربہ میں استعمال کیے گئے مشاہداتی پیمانے پر ناقابل حصول ہیں لیکن جو اس سے چھوٹے پیمانہ پر آزاد چارج سمجھے جائیں گے۔ مثلاً اگر ہم کسی کپیسٹر کی پلیٹوں کے بیچ میں ایک دھات کا ٹکڑا رکھ دیں تو اس کی وجہ سے پلیٹوں کے درمیان حاصل میدان کو ہم یا تو دھات پر پیدا شدہ حقیقی چارجوں کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں یا پھر اس کے ہم مرادف دھات کے ٹکڑے کی قطبیت کے لحاظ سے جو اس بات پر منحصر ہے کہ آیا چارج الگ الگ قابل پیمائش سمجھتے ہیں۔ اگر دھات کی جگہ ایک برق گزار کا ٹکڑا کپیسٹر کی پلیٹوں کے بیچ میں داخل کر دیا جائے تو ہمیں مظہر کو مجبوراً حقیقی چارج کے بجائے قطبیتی چارج کے ذریعہ بیان کرنا پڑے گا کیونکہ نظریہ میں یہ مان کر چلے ہیں کہ مشاہدے ایٹمی پیمانے پر نہیں کیے جائیں گے۔ بھی قطبیت کا انفرادی چارجوں میں تجزیہ کرنے کے لیے ایٹمی پیمانے پر مشاہدہ ضروری ہوگا۔

2۔1 نقل ویکٹر

ہم نے دیکھا ہے کہ ρ اور ρ_p میں امتیاز من مانا ہے لیکن اس من مانے پن سے قطبیتی چارجوں کے ذریعہ پیدا شدہ میدانوں کے بیان کی باضابطگی میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ چونکہ ہم نے برقی میدان

کے ماخذ کو ان دو قسموں میں بانٹا ہے پوائساں کا ماخذ مساوات یہ ہو جاتا

$$\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot E = -\frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \qquad (2-1)$$

علامت P اب صرف وہ حقیقی آزاد چارج اس نقطہ پر بتاتا ہے جہاں ڈائیورجینس لیا گیا ہے۔ اگر P_p کو قطبیت P کی ڈائیورجینس کی شکل میں ظاہر کیا جائے جیسا کہ مساوات (71-1) میں دیا گیا ہے تو ہمیں مساوات (2-1) سے

$$\nabla \cdot \left(E + \frac{P}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (2-2)$$

ملتا ہے۔ اس طرح ایک برقی نقل ویکٹر D کی (جو mks نظام میں کولوم فی اکائی مربع میٹر میں ناپا جاتا ہے) تعریف مندرجہ ذیل مساوات کے ذریعہ کرنا آسانی ہو جاتا ہے۔

$$D = \epsilon_0 E + P \qquad (2-3)$$

تب ماخذ مساوات یہ ہو جاتے ہیں

$$\nabla \cdot D = \rho \qquad (2-4)$$

اور

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_t}{\epsilon_0}$$

جہاں کہ حقیقی چارج کثافت و قطبیتی چارج کثافت کا جوڑ مجموعی چارج کثافت P_t لکھا گیا ہے۔ اس کے مطابق تکمیلہ رابطے گاس کے ڈائیورجینس نظریہ کے ذریعہ اس سارے حجم پر جس میں بھی چارج واقع ہیں تکمیل سے ملتے ہیں۔ یہ مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\int D \cdot ds = q \qquad (2-6)$$

$$\int E \cdot ds = \frac{q_t}{\epsilon_0}$$

جہاں q_t کل چارج ہے اور یہ ("حقیقی" چارج) q اور حجم پر $(\nabla \cdot P)$ کی تکمیل کا مجموعہ ہے ظاہر ہے کہ D ایک جزوی میدان اس معنی میں ظاہر کرتا ہے کہ اس کے ماخذ حقیقی چارج ہیں۔ دھیان رکھیے کہ D اور E کے درمیان رابطہ (2-3) بنیادی طور پر جوڑ کا ہے اور

$D \quad E\,\epsilon_0$ کا فرق قطبیت P ہے یہ بھی دھیان رکھیے کہ قطبیت ایک برقی میدان کے اوصاف رکھتی ہے حالانکہ ہم نے اس کی تعریف خالص جیومٹریائی انداز میں دو قطبی گردشہ فی اکائی حجم کی ہے۔ قطبیت میدان P وہ میدان ہے جس کے فلکس صرف قطبیتی چارجوں P_P کی وجہ سے پیدا ہوتے ہیں۔ اوپر کے الفاظ P اور D کو ان کے فلکس اور اس طرح ان کی ڈائیورجینس کے لحاظ سے بیان کرتے ہیں حالانکہ $\nabla \times P$ اور $\nabla \times D$ کا صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔ درحقیقت $\nabla \times D$ ایک کثافت گردش $\nabla \times P = c$ رکھتا ہے لہذا D کو ریاضیائی طور پر باب 1 کے جز 1 میں دیے گئے طریقہ P سے ثقل گردش و ثقل منبع اخذ کیا جاسکتا ہے۔ کیوں کہ اس کی گردش کثافت اور ماخذ کثافت دونوں دی ہوئی ہیں۔ تقطیت شدہ جسموں سے تعلق رکھنے والے کسی حقیقی میدانی مسئلہ کا حل اس بات پر منحصر ہوگا کہ قطبیت کا انحصار باہری میدان پر کس طرح کا ہے۔ زیادہ تر حالتوں میں قطبیت میدان کے تناسب سے ہوتی ہے اور اس کا اظہار اس طرح کے مساوات سے کیا جاسکتا ہے۔

$$P = \epsilon_0 \chi E \qquad (2\text{-}8)$$

جہاں χ کو برقی صلاحیت کہتے ہیں۔ اس طرح کے بیان میں الکٹریٹ (ایسی اشیا جن میں ایک مستقل دو قطبی گردشہ ہوتا ہے) شامل نہیں کیے جاسکتے بلکہ بالعموم پر ایلکٹریٹوں کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی ہے اگر ہمارے پاس ایسا سادہ وسیلہ ہو جس کی قطبیت عائد کردہ برقی میدان پر خطی رشتہ کے ذریعہ منحصر ہو جیسا کہ مساوات (8-2) سے ظاہر کیا گیا ہے تو تینوں ویکٹر D، E اور P تناسبی مستقلوں کے ذریعہ مربوط ہوں گے۔

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1\chi) E \qquad (2\text{-}9)$$

ہم مخصوص ترغیبی سمائی کی (جسے اکثر برق گزار مستقلہ کہتے ہیں) تعریف اس طرح کر سکتے ہیں۔

$$K = 1 + \chi \qquad (2\text{-}10)$$

اس لیے

$$D = K \epsilon_0 E \qquad (2\text{-}11)$$

اور

$$P = \epsilon_0 (K-1) E \qquad (2\text{-}12)$$

موجودہ شکل میں مساوات (3-2) پہلے سے فرض کرلیتا ہے کہ وسیلے کی قطبیت ہم سمتی ہوتی ہے یا یہ کہ وسیلے کی قطبیتی اوصاف قطبیت کی سمت پر منحصر نہیں ہوتی ہیں۔ یہ عام مسئلہ نہیں ہے اور درحقیقت اسکیلر تناسب صرف رقیقوں گیسوں، نقلما ٹھوسوں اور مکعبی قلموں میں ہی پایا جاتا ہے۔ ایسے قلم جن کا تشاکل مکعب سے کم ہے قطبیت ویکٹر کا اور برقی میدان ویکٹر کے ہر جز کے درمیانی رشتہ پھر بھی خطی ہوتا ہے لیکن تناسب مستقلے مختلف سمتوں میں مختلف ہوں گے اس کا مطلب یہ ہے کہ قطبیتی ویکٹر کے اجزا اور برقی میدانی ویکٹر کے اجزا کے درمیان رشتہ ایک ٹینسر سے ملے گا۔

$$P_\alpha = \epsilon_0 \chi_{\alpha\beta} E_\beta \qquad (2\text{-}13)$$

اور P اب اسی سمت میں نہیں ہوگا جس سمت میں E ہے۔ باب 6 میں توانائی کو مدنظر رکھ کر یہ دکھایا جائے گا کہ $\chi_{\alpha\beta}$ متشاکل ہے یعنی $\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}$ اس لیے $\chi_{\alpha\beta}$ کا اظہار خاص سمتی قدروں کی شکل میں صرف تین مستقلوں کے ذریعہ کرنا ممکن ہے اور کم سے کم تین ایسی سمتیں ہیں جن میں P اور E متوازی ہیں۔

ہم اس حالت پر جب کہ E اور P میں متناسب نہیں ہیں اور دونوں کے درمیان کوئی خطی رشتہ نہیں ہے یہاں بحث نہیں کریں گے لیکن اسی طرح کی حالت پر بحث مقناطیسی وسیلوں کے سلسلہ میں کی جائے گی جہاں غیر خطیت کی عملی اہمیت زیادہ ہوتی ہے۔ بہر حال اس بات پر دھیان دلانا اچھا ہوگا کہ ہم نے P اور E کے درمیان جو رشتہ مان لیا ہے وہ صرف

ایک خاص سہولیت کے لیے ہے اور وہ نظرے کا کوئی بنیادی مساوات نہیں ہے۔

2-2 حدی شرائط

میکسویل کے میدان مساوات جن پر بعد میں بحث کی جائے گی مساوات کا ایک سٹ ہیں جن کے ماخذ کو رسائی پذیر اور نا قابل رسائی دو طرح کے چارجوں میں بانٹا گیا ہے میکسویل کے مساوات کا حل حاصل کرنے کے لیے مزید مساوات کی ضرورت ہوگی جن کے ذریعہ رسائی پذیر چارجوں کا رشتہ نا قابل رسائی چارج کے ماخذ کی قدران کو پیدا کرنے والے باہری میدانوں کے لحاظ سے بتاتے ہیں۔ مساوات ترکیبی کہلاتے ہیں۔ ایسے مساوات کی ایک مثال مساوات (8-2) ہے مساوات ترکیبی لازمی طور پر اس مادے کے اوصاف پر منحصر ہوں گے جن میں نا قابل رسائی چارج پیدا ہوتے ہیں۔ جب کہ مساوات (8-2) لغایت (13-2) قطعی طور پر عام نہیں ہیں ان کا انحصار صرف خطی ہونے پر ہے اور ان میں متجانسیت شامل نہیں ہے۔ اس لیے صلاحیت اور مخصوص ترغیبی سمائی سمتی قدروں کے غیر پابند فنکشن ہو سکتے ہیں۔ ایک زیادہ دل چسپ حالت وہ ہے جب مخصوص ترغیبی سمائی غیر مسلسل طور پر بدلتی ہے جیسا کہ دو برق گزاروں کے درمیان حد پر ہوتا ہے۔

شکل (1-2) D کے عمودی جزو پر حدی شرائط دریافت کرنے کے لیے زیر غور حجم

کسی حد پر میدانوں کا رویہ دریافت کرنے کے لیے ہمیں پہلے شکل (1-2) کے مانند ایسے چھوٹے حجم کا تصور کرنا ہوگا جس کا بین السطح کے عمودی اس کے دوسرے ابعاد سے قدر کے کسی درجہ میں چھوٹا ہے اور اس طرح پر لیا گیا ہے کہ اس کی بڑی سطحوں میں کی ایک سطح ΔA وسیلہ 1 میں ہے اور دوسری وسیلہ 2 میں اور دونوں بین السطح کے متوازی ہیں

اس چھوٹے حجم کا استعمال میدانوں کے عمودی اجزا کے رویہ کو اخذ کرنے کے لیے کیا جا سکتا ہے۔

آیئے ہم اس چھوٹے حجم کے اوپر D کا سطحی تکمیلہ لیں۔

$$\int D\cdot ds = q \qquad (2\text{-}6)$$

انتہائی حالت میں جیسے جیسے h کا بعد صفر کے قریب پہنچتا ہے q، σ ΔA کے قریب پہنچتا جاتا ہے جہاں σ بین السطح پر حقیقی سطحی چارج کثافت ہے۔ حجم کے وہ بازو جو سطح کے عمودی ہیں ان کا تکمیلہ میں حصہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس طرح مساوات (2-6) مندرجہ ذیل ہو جاتا ہے۔

جہاں $n = \frac{ds}{ds}$ وہ اکائی ویکٹر ہے جو ΔA پر عمودی ہے۔ جہاں ΔA h حجم والے سلنڈر کا اوپری سرا ΔA ہے۔

شکل (2-2) E کے تماسی اجزا حد شرائط دریافت کرنے کے لیے زیر غور چھلّا

مساوات (2-11) کو جائز مان کر ہمیں ملتا ہے۔

$$n\cdot(K_2E_2 - K_1E_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$n\cdot(K_2\nabla\phi_2 - K_1\nabla\phi_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (2\text{-}15)$$

ہم نے یہ مان لیا ہے کہ ΔA اتنا چھوٹا ہے کہ اس رقبہ کے اوپر میدان واقعی یکساں ہیں۔

مساوات (2-15) کو زیادہ سہولیت والی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$K_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} - K_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (2\text{-}15')$$

جہاں $\frac{\partial}{\partial n}$ حد کے عمودی سمت میں مشتق کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر ایک خطی وسیلے نہ مان لیا جائے (یعنی مساوات (2-8) کو جائز نہ مانا جائے) لیکن اگر قطبیت P مقام کا دیا ہوا فنکشن ہو تو یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مساوات (2-15) کے مطابقت کی حد شرط مندرجہ ذیل ہو گی۔

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial n} - \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\left(\frac{\sigma + \delta P_n}{\epsilon_0}\right) \qquad (2\text{-}15'')$$

جہاں δP_n عمودی سمت میں P کے جز کا عدم تسلسل ہے جسے وسیلہ 1 سے وسیلہ 2 کی طرف مثبت لیا گیا ہے میدان کے تماسی اجزا کے رویّے کا تعین جب وہ بین السطح کو پار کرتے ہیں، چھوٹے چھلّے پر غور کرکے کیا جا سکتا ہے جیسا کہ شکل 2 2 میں دکھایا گیا ہے اس کا بڑا حصّہ سطح کے متوازی ہے اور جس کا ایک رُخ وسیلہ 1 میں اور دوسرا وسیلہ 2 میں ہے۔

برقی میدان کے بند خطی تکمیلہ کے لیے ہمیں مساوات (1-34) سے ملتا ہے۔

$$\oint E \cdot dl = 0 \qquad (1\text{-}34)$$

شکل میں دکھائے گئے راستے پر اس کا اطلاق کرنے پر ہمیں

$$E_2 \cdot dl - E_1 \cdot dl + \qquad E \cdot dl \quad = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

ملتا ہے۔ حقیقت میں اگر مساوات (1-34) نہ بھی مان کر چلیں تو بھی مساوات (2-16) تب تک جائز رہے گا جب تک $\nabla \times E$ بین السطح پر محدود رہے

اس حالت میں

$$E_2 \cdot dl - E_1 dl + \qquad E \cdot dh = (\nabla \times E) \cdot (dh \times dl) \qquad (2\text{-}16)$$

$$dh \to 0$$

$$E_{t_2} = E_{t_1} \qquad (2\text{-}17)$$

ملتا ہے جہاں E_t بین السطح کے مستوا میں برقی میدان کا جُز ہے مضمر کے لحاظ سے

$$-n \times (E_2 - E_1) = n \times (\nabla \phi_2 - \nabla \phi_1) = 0 \qquad (2\text{-}18)$$

جہاں n شکل (2-2) میں دکھائے گئے بین السطح پر اکائی عمود ہے۔ ہم نے مان لیا ہے کہ چھلّا اس حد تک چھوٹا ہے کہ میدان اس کی لمبائی کے لحاظ سے یکساں رہتے ہیں۔ مساوات (2-18) کا بین السطح کے اوپر انٹیگرل تکمیل کرنے پر

$$\phi_1 = \phi_2 + \text{مستقلہ} \qquad (2\text{-}19)$$

ملتا ہے۔ عام طور سے اس میں سہولیت رہتی ہے کہ مستقلہ کو چھوڑ دیا جائے۔

مساوات (2-15′) یا (2-15″) کا اطلاق اگر ہو سکے تو مساوات (2-19) کے ساتھ مل کر کسی بھی بین السطح کے آر پار سکونی مضر مسئلے کے لیے حدی شرائط کا کافی سٹ فراہم کرتے ہیں۔

2-3۔ ایک مادّی وسیلہ میں برقی میدان

ہم نے پہلے خلا میں آزاد چارجوں سے پیدا شدہ سکونی برقی میدان کی تعریف کی اور پھر ہم نے مادّی وسیلوں پر غور کیا جن میں ایسے چارج ہیں جو پیمائش کے لیے ناقابل حصول ہیں۔ ان وسیلوں کا رویہ ان کے اکائی حجم کے قطبی گردشہ کے لحاظ سے بیان کیا گیا ہے۔ ریاضیاتی طور پر مساوات (2-4)، (2-5) اور ان میں ملانے والے مساوات (2-3) کے ذریعہ میدانوں کی تعریف کرنے کی کوشش کی جائے تو کچھ مشکلات پیش آتی ہیں۔ میدان کی ایک عملیاتی تعریف نیچے دیے تین طریقوں میں سے کسی ایک سے کی جاسکتی ہے۔ ضروری نہیں ہے کہ نتیجہ میں ملنے والے جوابات ایک دوسرے سے مطابقت رکھتے ہوں۔

(A) ہم میدان کی تعریف ایک ایٹمی الیکٹرانی پیمانہ پر کر سکتے ہیں جہاں مانا جاسکتا ہے کہ مادّی وسیلوں تقطیب پذیری کا سوال نہیں اُٹھے گا۔ پھر اپنی کلاں پیمانے کی میدان کی تعریف کے لیے ہم ان ایٹمی میدانوں کا فضا۔ وقت اوسط لیں گے ایک بہت تیز رفتار الیکٹران ایسا اوسط میدان محسوس کرے گا۔

شکل (2-3) ایٹمی میدانوں کا اوسط نکالنے کے لیے سمتی قدریں

(B) ہم برق گزارشے میں ایک سوراخ کٹا ہوا مان سکتے ہیں اور میدان کی تعریف یوں کر سکتے ہیں کہ یہ سوراخ میں اکائی چارج کی شکل میں ناپا گیا ایسا میدان جیسا کہ خلائی تعریف کے لیے کیا گیا تھا میدان کی یہ جوفی تعریف میدانی شدّت کو جوف کی جیامیٹری اور وسیلہ میں

میدان کی سمت کے لحاظ سے اس کی تشریح پر منحصر بنا دے گی اس طرح سے ہم یکتا تعریف پر جب ہی پہنچ سکتے ہیں جب جوف کی شکل اور تشریح کو مانے طور پر معیار بند کر دیا جائے۔

(c) ہم میدان کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ یہ وہ میدان ہے جو برق گزار کے کسی ایک مالیکیول پر کام کرتا ہے آیئے ہم ان طریقوں کی الگ الگ جانچ کریں۔

(A). فضا۔ وقت اوسط والی تعریف

ایک فنکشن $f(x,y,z,t)$ لیجیے جس کی تعریف فضا کے کسی خطہ کے لیے اور کسی وقفہ کے دوران کی گئی ہے جیسا شکل (2-3) میں دکھایا گیا ہے۔

کا فضا۔ وقت اوسط وقفہ 2T کے لیے اور فضا کے ایک a نیم قطر کے کروی خطہ کے لیے ہے

$$\overline{f(x,y,z \cdot t)} = \frac{1}{2T\frac{4}{3}\pi a^3}\int_{-T}^{T}\iiint_{(\xi^2+\eta^2+\delta^2)\leq a} f\left[(x+\xi),(y+\eta),(z+\delta);(t+\theta)\right] \times d\xi\, d\eta\, d\delta\, d\theta \qquad (2\text{-}20)$$

اس تکمیلہ کو کرنا ایک خطی عمل ہے اور اس لیے اسے خطی تفرقی آپریٹروں کے ساتھ ادل بدل کیا جا سکتا ہے جیسے مثال کے طور پر

$$\overline{\nabla f} = \nabla \overline{f} \qquad (2\text{-}21)$$

ایٹمی پیمانے پر مساوات (2-5) سے مطابقت رکھنے والا مساوات لاگو ہوتا ہے۔

$$\nabla \cdot \varepsilon = \frac{\rho_\alpha}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}22)$$

جہاں ε ایٹمی برقی میدان ہے اور ρ_α ایٹمی تقسیم کی چارج کثافت ہے۔ ρ_α کا فضا۔ وقت کا اوسط لینے پر ہمیں

$$\nabla \cdot \overline{\varepsilon} = \overline{\nabla \varepsilon} = \frac{\overline{\rho_\alpha}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}23)$$

ملتا ہے۔

شکل 2.4 ایک برق گزار میں میدانوں کی تعریف کے لیے جوف جھری A جس کا چھوٹا بعد میدان کے متوازی ہے جھری B جس کا لمبا بعد میدان کے متوازی ہے اور کرّہ C

اور مساوات (21-2) اور (5-2) سے

$$\nabla \cdot \bar{E} = \nabla \cdot E \qquad (2\text{-}24)$$

اس لیے کلاں پیمانے کا میدان E درحقیقت برق گزار کی موجودگی ایٹمی میدان کا فضا۔ وقت اوسط ہے۔

(B) جوف والی تعریفیں

شکل 2.4 میں دکھائے گئے تین شکلوں کے جوف لیجیے۔ ان کی سرحدوں پر کوئی حقیقی چارج نہیں ہیں۔ مساوات (15-2) کی حدی شرط کے مطابق جھری A میں جس کا بڑا حصہ میدان کے عمودی ہے اس میں ناپا گیا میدان $K E_m$ ہے جہاں E_m وسیلے کے اندر میدان ہے صرف ایک انتہائی چپٹی ڈبیہ کی شکل کے جوف کے لیے بختگی کے ساتھ صحیح ہوگا۔ جھری B جس کے بڑے حصہ کی تشریق میدان کے متوازی ہے اس کے اندر کا میدان مساوات (18-2) کے مطابق ٹھیک E_m ہے

اگر جھری چوڑائی کافی کم ہو حدی قدر پر منحصر مسئلوں کے حل کے لیے باب 5 میں جن طریقوں پر بحث کی جائے گی ان سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ کرّوی جوف C کے اندر پایا گیا میدان

$$E = \frac{3KE_m}{2K+1} = E_m + \frac{\rho}{\epsilon_0}\,\frac{1}{(2K+1)} \qquad (2\text{-}25)$$

ہوگا۔ اسے یہاں صرف یہ دکھانے کے لیے شامل کیا گیا ہے کہ جوفی تعریفیں کس طرح جوف کی جیامٹری پر منحصر نہیں K کی بڑی قدروں کے لیے مساوات (25-2)

$$E = \tfrac{3}{2} E_m \qquad (2\text{-}26)$$

میں تخفیف ہو جاتا ہے شکل (5-2) میں ان جوفوں میں واقع تین طرح کے میدانوں کو بذریعہ گراف دکھایا گیا ہے۔

کسی جوف میں ناپے ہوئے میدان کو اصولاً وسیلے کے اندر کے میدان سے

مربوط کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح اسے اس میدان کی شدت کی تعریف کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ جوف کی جیامیٹری اور وسیلے کی مخصوص برقی سمائی معلوم ہوں۔

(c) مالیکیولی میدان

ایک ٹھوس میں کوئی ایک مالیکیول کسی خاص جگہ واقع ہے اور اس لیے اس پر کام کرنے والا میدان وہ فضا۔ وقت اوسط نہیں ہے جس کی اوپر بحث ہو چکی ہے۔ ہم اب کسی ایسے مالیکیول پر جو تقطیت شدہ وسیلے کے مالیکیولوں میں سے ایک ہے۔ کام کرنے والے میدان کا تخمینہ لگائیں گے۔ ایک برق گزار پر غور کیجیے جو متوازی پلیٹوں والے کنڈنسر کی پلیٹوں

شکل (2-5) شکل (2-4) A، B، C کے مرکزوں سے گزرنے والے ایک افقی خط پر جوئی تکنیک سے ناپے ہوئے میدان کا نقلی نقشہ

کے درمیان رکھا ہوا ہے جیسا شکل 6-2 میں دکھایا گیا ہے۔ برق گزار اور کپیسٹر کی متوازی سمتوں میں اتنے کافی وسیع ہیں کہ کناروں کے اثرات کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ برق گزار کے کسی ایک مالیکیول کو لیجیے آئیے ہم اس مخصوص مالیکیول کے چاروں طرف ایک a نیم قطر کا کرہ کھینچیں جس کا مطلب خاکہ کے ذریعہ مالیکیول سے متعلق سارے مظاہر کی خورد پیمانے و کلاں پیمانے کے بیچ کی حد بتانا ہے۔ اس طرح مالیکیول پر نیچے لکھے چارجوں سے پیدا ہونے والے میدان اثر انداز ہوتے ہیں۔

(1) کپیسٹر کی پلیٹوں کی سطح پر کے چارج

(2) برق گزار کی ان سطحوں پر کے چارج جو کپیسٹر کی پلیٹوں کے مقابل ہیں۔

(3) a نیم قطر کے کرہ کی اندرونی حد کی سطح پر کے چارج۔

(4) زیر غور مالیکیول کو چھوڑ کر ان سب انفرادی مالیکیولوں کے چارج جو a نیم قطر کے کرہ کے اندر ہیں۔ ان ماخذ سے پیدا ہونے والے میدانوں کا

الگ الگ حساب لگایا جا سکتا ہے۔

(۱) کپیسٹر کی پلیٹوں پر کا چارج زیرِ غور مالیکیول پر ایک میدان پیدا کرتا ہے جو

$$\frac{D}{\varepsilon_0} = E + \frac{P}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}27)$$

کے برابر ہے۔

شکل 6-2 جو بتاتی ہے کہ برق گزار کے کسی ایک مالیکیول پر کام کرنے والے میدان میں برق گزار کا کیا حصہ ہے۔

(۲) کپیسٹر کی پلیٹوں کے مقابل برق گزار کی سطح پر تقطیبی چارج $\sigma_P = P_n$ مالیکیول پر ایک میدان پیدا کرتا ہے جو

$$-\frac{P}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}28)$$

کے برابر ہے

(۳) کرہ کی اندرونی سطح پر تقطیبی چارج ایک میدان پیدا کرتا ہے جس کا حساب اس طرح لگایا جا سکتا ہے۔ جوف کی سطح پر کی قطبیت کی وجہ سے جوف حسبِ ذیل ہے۔

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma_P \cos\theta \, ds}{a^2} \qquad (2\text{-}29)$$

جہاں θ وہ زاویہ ہے جو P اور مالیکیول کو سطح کے قطعہ ds سے جوڑنے والے نیم قطر دیکٹر کے درمیان بنتا ہے۔ θ اور $\theta + d\theta$ کے بیچ کے تفرقی عنصر کا سطحی چارج

$$\sigma_P ds = |P|\, 2\pi a^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \qquad (2\text{-}30)$$

ہے۔ لہٰذا مساوات (2-29) اس طرح ہو جاتا ہے۔

$$E_P = \frac{|P|\, 2\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \qquad (2\text{-}31)$$

اور اسکیلر تکمیل کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔ $E_P = |P|/3\varepsilon_0$ یا

$$E_P = \frac{P}{3\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}32)$$

ملتا ہے۔ دھیان رکھیے کہ E_P برق گزار کے اندر ایک کرّوی کھوکھلے کی حدّی

قیمت کے مسئلہ کا حل نہیں ہے جیسا کہ مساوات (2-25) سے ملنے والا میدان تھا لیکن وہ برق گزار کے اندر ایک کرّوی جوف کے مسئلہ کا حل اس حالت میں ہے جب کہ جوف کی موجودگی سے قطبیت پر کوئی اثر نہ پڑتا ہو۔

(۴) کرّہ کے اندر کے انفرادی مولیکیولوں کی وجہ سے نیا میدان پانے کے لیے کرّہ کے اندر کے دو قطبوں سے پیداشدہ میدانوں کا جوڑ کرنا پڑے گا۔ باب 1 سے کسی انفرادی دو قطبہ کا مضمر کی عبارت مندرجہ ذیل ہوتی ہے۔

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cdot r}{r^3} \qquad (2\text{-}32)$$

کسی دو قطبہ سے فاصلہ r پر میدان

$$E = -\nabla\phi = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{p}{r^3} - \frac{3(p\cdot r)r}{r^5}\right] \qquad (2\text{-}33)$$

ہو جاتا ہے۔ کرّہ کے اندر کے سب دو قطبوں کے لیے جوڑ لینا میدان کے x-جز کا فضائی اوسط لینے کے لیے مرادف ہے۔

$$\Sigma E_x = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\sum\left[\frac{p_x}{r^3} - \frac{3(p_x x^2 + p_y xy + p_z zx)}{r^5}\right] \qquad (2\text{-}34)$$

چونکہ ہم نے برق گزار کو سمتی یک خواص مانا ہے اس لیے x-، y-، z- سمتیں مرادف ہیں اور

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{\overline{r^2}}{3}, \quad \overline{xy} = \overline{xz} = \overline{zx} \qquad (2\text{-}35)$$

اس لیے کرہ کے اندر کے دو قطبوں کی وجہ سے میدان صفر ہو جاتا ہے۔ عبارات (2-27)، (2-28) اور (2-32) کے جزوی میدانوں کو اور مساوات (2-34) کے صفر میدان کو جوڑنے پر ہمیں کسی ایک مالیکیول پر کام کرنے والا پورا میدان ملتا ہے۔

$$E_{eff} = E + \frac{P}{\epsilon_0} - \frac{P}{3\epsilon_0} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \qquad (2\text{-}36)$$

عبارت جو کہ سمتی یک خواص اشیا کے لیے اخذ کی گئی ہے ایک مکعبی قلم کے اندر کسی جالی نقطہ کے لیے بھی جائز ہے لیکن اس سے کم تشاکل والے قلموں کے لیے جائز نہیں ہے۔ دھیان رکھیے کہ ہم نے پڑوسیوں کے درمیان صرف دو قطبہ دو قطبہ تفاعلوں کو ہی لیا ہے ظاہر ہے کہ یہ ان اشیا کے لیے صحیح نہیں ہوگا جن میں مالیکیولوں کے بڑے منتشر قطبہ ہوں۔

طریقہ (A) اور مساوات (36 – 2) میں فرق یہ ہے کہ ہم کسی غیر مخصوص نقطہ پر میدان کا اوسط لینے کی بجائے اس پر غور کرتے ہیں کہ وسیلے کے کسی حقیقی مالیکیول کا کیا ہوتا ہے۔ جبھی ایٹمی میدانوں کے فضا۔ وقت اوسط کی طبعی اہمیت وہ اوسط میدان ہوگا جو وسیلے میں تیز رفتار سے گزرنے والے کسی چارج پر لگے گا۔

4 - 2 تقطیبیت پذیری۔ میدانی تعریف (c) کسی برق گزار کے کلاں پیمانے کے رویہ کا بیان اس کے مالیکیولوں کے مستقبلوں کے لحاظ سے کرنے کے لیے کار آمد ہے۔ ایسا بیان کرنے کے لیے مخصوص ترغیبی ساٹی کو ایک مفرد مالیکیول کی تقطیب پذیری سے منسک کرنا ہوگا۔ یہ رشتہ مساوات (38-2) کے ذریعہ کیا جا سکتا ہے جو کسی دیئے ہوئے باہری میدان کے لیے برق گزار شے کے اندر کا میدان اور اس طرح سے کسی انفرادی مالیکیول پر لگنے والی قوت کو بتاتا ہے۔ مقدار کی جسے تقطیب پذیری کہتے ہیں۔ تعریف اس مساوات سے کی جاتی ہے۔

$$p = \alpha \epsilon_0 E_{eff} \qquad (2\text{-}37)$$

جہاں p ایک مفرد مالیکیول کا ترغیبی دو قطبی گردشہ ہے۔ اگر اکائی حجم میں مالیکیولوں کی تعداد N ہے تو کل تقطیب یہ ہوگی۔

$$P = Np = \alpha N \epsilon_0 E_{eff} \qquad (2\text{-}38)$$

$$P = \frac{N_0 P_m \alpha}{M} \epsilon_0 E_{eff}$$

جہاں P_m شے کی کثافت اور M مالیکیولی وزن ہے اور N_0 ایوگیڈرو عدد ہے، اس طرح $N = \frac{N_0 P_m}{M}$ اس لیے اگر کسی مخصوص شے کے لیے

دیا ہوا ہے تو P معلوم کیا جا سکتا ہے۔ علاوہ اس کے مساوات (38-2) کو مساوات (12-2) اور (36-2) کے ساتھ ملا کر ہم میدانوں کو خارج کر سکتے ہیں اور مطلوب رشتہ پا سکتے ہیں۔

$$\frac{K-1}{K+2} = \frac{\alpha N}{3} = \frac{N_0 \rho_m \alpha}{3M} \qquad (2-39)$$

یہ فارمولا جو کلاسیس مساتی رشتہ کے نام سے جانا جاتا ہے وسیع اقسام کے ٹھوسوں اور رقیقوں کے لیے مخصوص ترغیبی سمائی کا کثافت پر انحصار صحیح طور پر دیتا ہے۔ ہلکی گیسوں کے لیے K کی قدر اکائی سے زیادہ مختلف نہیں ہوتی مساوات (39-2) یہ ہو جاتا ہے۔

$$K-1 = N\alpha = \frac{N_0 \rho_m \alpha}{M} \qquad (2-40)$$

جو ٹھیک ہے وہی جس کی ہم ایسے تخمینہ کے لیے امید کر سکتے تھے۔ جس میں ہر مالیکول کا اپنے ہمسایوں کے ساتھ تفاعل نظر انداز کر دیا جائے۔ مالیکولی تقطیب پذیری پن عام طور سے دو بنیادی طبعی اسباب سے ہوتی ہے۔ (1) ایٹموں کے بیچ کے بندشوں کا لمبا ہو جانا اور (2) میدان کی سمت میں مالیکولوں کی ترجیحی تشریق جو حرکی حرکات سے پیدا شدہ بے ترتیب تشرق کے خلاف ہوتی ہے۔ مخصوص ترغیبی سمائی کے ٹمپریچر پر منحصر ہونے کا ذمہ دار یہ دوسرا اثر ہے۔ شماریاتی میکانیات میں یہ دکھایا گیا ہے کہ حرّی تعادل کی حالت میں اس بات کا امکان کہ کسی ایک مالیکول کی توانائی U ہو
کے تناسب ہوتا ہے جہاں K بولزمین کا مستقلہ ہے اور T مطلق ٹمپریچر ہے۔ اگر کوئی مالیکول جس کا ذاتی گردشہ p_0 ہے میدان E میں واقع ہے تو سکشن 8-1 کے مطابق

$$U = -p_0 \cdot E$$

$$= -p_0 E \cos\theta \qquad (2-41)$$

جو میدان کے لحاظ سے مالیکول کے تشریق پر منحصر ہوتا ہے۔ پورے دو قطبی گردشے میں ہر مالیکول کا حصہ ہوگا جسے سب مالیکولوں کے لیے جوڑنا ہوگا۔ اگر اکائی حجم میں N مالیکول ہوں تو ان کی

موثر تقطیت پذیری۔

$$P = \frac{\int N p_0 \cos\theta \, e^{x\cos\theta} d\Omega}{\int e^{x\cos\theta} d\Omega} \quad (2-42)$$

ہو گی۔ جہاں ہم نے سہولیت کے لیے $x = \frac{p_0 E}{RT}$ لکھ دیا ہے نسب نما کل تکمیل آسانی سے کی جا سکتی ہے اور مستقل ضربیہ Np_0 کو چھوڑ کر شمار کنندہ محض نسب نما کا x کے لحاظ سے جزوی مشتق ہے۔ آخری تقویم ہمیں

$$P = N p_0 \left(\mathrm{Coth}\, x - \frac{1}{x}\right) \quad (2-43)$$

ملتا ہے جو x کے چھوٹے ہونے کی حالت میں

$$P = N p_0 \frac{x}{3} = \frac{N p_0^2 E}{3RT} \quad (2-43)$$

ہو جاتا ہے۔ اس اثر کو مالیکیولوں کی میدان کی وجہ سے مسخ سے پیدا شدہ تقطیت پذیری میں جسے ہم α کہہ سکتے ہیں جوڑنا ہوگا۔ یاد رکھیے کہ مسخ تقطیت پذیری α توانائی کی عبارت (2-41) میں ایک اور رقم

$$-\alpha_0 \epsilon_0 E_0^2 \, eff/2$$

جوڑ دے گا جو مالیکیول کی زاویائی دمقامی سمتی قدروں پر منحصر نہیں ہے اور اس لیے یہ ایک ٹمپریچر کے ساتھ بدلنے والی تقطیت پیدا نہیں کرتا۔ اس طرح مساوات (2-49)

$$K-1 = N\alpha_0 + \frac{N p_0^2}{3\epsilon_0 RT} \quad (2-44)$$

ہو جاتا ہے۔ یا اگر مساوات (2-40) اطلاق پذیر نہیں ہے تو مساوات (2-39)

$$3\,\frac{K-1}{K+2} = \frac{N_0 \rho_m}{M}\left(\alpha_0 + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 RT}\right) \quad (2-45)$$

ہو جاتا ہے۔ اس لیے K کی ناپی ہوئی قدر کے کثافت اور ٹمپریچر پر انحصار کا مطالعہ اکثر α اور p_0 کو الگ کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے

حوالہ کے لیے مشورہ

جتنے حوالے پہلے باب کے آخر میں خلائی برقی حرکیات کے اساسی

اصولوں کے لیے دیے گئے ہیں ان سب میں برق گزاروں اور حدّ شرائط پر بحث
ہے۔ برق گزاروں کے برقی سکونیات پر ایک عمدہ بحث L.D. Landon
and E.H.Lifshitz, Electrodynamics
of continuous Madia کے دوسرے باب میں دی گئی ہے۔
مساوات (2-43) جیسے لینجیوں فارمولا لیتے ہیں، کا اخذ شمار یاتی
میکانیات کی کسی بھی کتاب میں دیکھیے مثلاً:
R.H. Fowlder Statistical Mechanics.
جس میں پارٹیشن فنکشن پر مشتمل نہایت خوب صورت طریقے استعمال ہوئے ہیں
J.E.Mayer and M.G.Mayer Statistical Mechanics
ریاضیاتی نقطہ نظر سے فاؤلر سے زیادہ آسان اور ہمارے مطلب کے لیے،
کافی سے زیادہ ہے۔
J.H. Van Vleck, The Theory of electric
and Magnetic susceptebilities.

۱۔ برابر گردشوں اور ایک سی تشریق والے نقطہ دو قطبوں کی ایک سادہ کیبی جالی لیجیے اور دکھایئے کہ ایک سن چاہے نیم قطر کے کرہ کے مرکز پر واقع ایک دو قطبہ پر باقی سب دو قطبوں کی وجہ سے میدان صفر ہوگا۔

2 - K برق گزار مستقلہ والی کی ایک لمبی اور بہت پتلی چھڑ کی تشریق ایک یکساں باہری میدان E کے متوازی ہے۔ چھڑ کے اندر E اور D کیا ہیں؟ میدان سے عمودی تشریق والے برق گزار کے بہت پتلے طبق کے اندر میدان کیا ہیں؟

3 - دکھایئے کہ ایک الکٹریٹ (مستقل P) کے لیے سارے میدانی حجم کے اوپر لیا گیا تکملہ E.D dV صفر ہو جاتا ہے۔

۴۔ چارج e- کا ایک الکٹران لیجیے جو a نیم قطر والے دائرہ کے مدار میں ایک چارج e+ کے گرد ایسے میدان میں گھومتا ہے جو مدار کی ستوا کے عمودی ہے۔ دکھایئے کہ تقطیت پذیری α تخمیناً $4\pi a^3$ ہے۔

باب (3)

مضمر مسائل کے حل کے لیے عام طریقے

ہم نے دیکھا کہ اگر سارے تقسیم چارج معلوم ہوں تو اصولاً مضمر مسائل کا حل نکالا جاسکتا ہے۔ اور ہم کسی ایسے حل کی یکتائی کو ثابت کریں گے جو کسی خطے کی حدود پر مضمروں کی یا ان کے عمودی مشتقات کی دی ہوئی قدروں میں درحقیقت صرف کچھ ہی بہت زیادہ مثالی مسئلے سادگی کی کسی حد تک حل کیے جاسکتے ہیں۔ عملی اطلاقوں کے لیے تجرباتی اور عددی طریقے میدان کی نقشہ بندی کرنے کے لیے نکالے گئے ہیں۔ علاوہ اس کے گرافی اور جزوی طور پر گرافی طریقے بھی ہیں جن میں کچھ حساب بھی کرنا ہوتا ہے۔ تجزیاتی طریقے بہت ہی کم بند شکل کے حل دیتے ہیں جب کہ لاانتہا سلسلے جب ہی مفید ہوسکتے ہیں جب کہ تیزی سے گھٹنے والے ہوں۔ تاہم ایسی جیامٹریائی حدی شکلوں کے جو کہ حقیقی حالت کے قریب ہوں، تجزیاتی حل اسی حالت میں بھی ایک قیمتی پرکھ کا کام دیتے ہیں جب کہ تجرباتی نقشہ بندی بالآخر ضروری ہو اور گرافی طریقے مضمر کے عام رویے کی پہلے سے جانکاری پر منحصر ہوتے ہیں۔ اس لیے زیادہ پیچیدہ انجینیری اطلاقوں کے لیے بھی نسبتاً آسان حدود اور تقسیم چارج والے مسئلوں کا حل کارآمد ہوتا ہے۔

بدقسمتی سے مسائل کو حل کرنے کے کوئی ایسے عام طریقے دستیاب نہیں ہیں جو کہ جیامٹری طور پر سادے سب مسئلوں کے لیے لاگو ہوں اس لیے ہر انفرادی مسئلے کو کسی حد تک خاص طریقِ کار کی ضرورت ہوگی۔ پھر بھی کچھ طریقوں کا اطلاق کچھ عام قسم کے مسئلوں پر ہوسکتا ہے اور ان اقسام کے امتیازی خاصہ کے طور

بر ان پر الگ الگ بحث کی جا سکتی ہے۔

3-1 یکتائی مصدقہ

یہ مصدقہ یہ بیان کرتا ہے کہ اگر دیے حدود کے اندر کسی مضمر مسئلہ کا ایسا حل مل جائے جو اس حد پر دیے ہوئے تقسیم مضمر کے برابر ہو جائے یا اس حد پر دیے ہوئے عمودی مشتق کے برابر ہو جائے تو اس حد کے اندر یہ حل مضمر مساوات کا صرف واحد صحیح حل یہی ہے۔ یہ مصدقہ حل کا کوئی طریقہ اختیار کرنے کی توجیہہ پیش کرتا ہے جب تک کہ یہ دکھایا جا سکے کہ پایا ہوا حل چارج سے خالی خطہ میں لاپلاس مساوات کا تابع ہے۔ چاہے حل کسی طرح بھی حاصل کیا گیا ہو اگر وہ ان شرائط کی پابندی کرتا ہے تو مسئلہ کو حل مانا جاتا ہے۔

اس مصدقہ کا ثبوت اس سے بہت ملتا ہے جو (سکشن 1-1) میں ویکٹر میدانوں کی یکتا تعریف کے لیے ان ماخذ اور کثافت دوران کے لحاظ سے بتایا گیا تھا بجز اس کے کہ یہاں تکمیلیہ لا انتہائیہ تک نہیں لیا جاتا۔ اگر ہم گاس کے ڈائیور جینس مصدقہ میں $\phi\nabla\phi$ ویکٹر میدان کی جگہ رکھیں تو ہمیں

$$\int \phi\nabla\phi\cdot d\mathbf{S} = \int \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)\,dv = \int[(\nabla\phi)^2 + \phi\nabla^2\phi]\,dv. \qquad (3\text{-}1)$$

ملتا ہے لاپلاس مساوات کے مطابق آخری رقم صفر ہو جاتی ہے اگر ہم تکمیلیہ کی سطح اس طرح چنیں کہ تکمیلیہ خطہ کے اندر سے سارے چارج شدہ خطے باہر رہیں۔ چارجوں کو v سے باہر رکھنے کے لیے ضروری ہو سکتا ہے کہ باہری حدود کی اندرونی سطحیں لی جائیں۔

آئیے ہم یہ مان لیں کہ دو مختلف مضمر ϕ_1 اور ϕ_2، ایک دیے مضمر مسئلہ کے حل ہیں۔ ϕ_1 اور ϕ_2 دونوں ہی حدی شرائط کے پابند ہیں اس لیے حد پر یا تو $\phi_1 = \phi_2$ یا $(\nabla\phi_1)_n = (\nabla\phi_2)_n$ (کسی سطح سے عمودی $\nabla\phi$ کے جُز کو اکثر "عمودی مشتق" کہتے ہیں اور اسے $\partial\phi/\partial n$ سے دکھایا جا سکتا ہے)۔ اگر ہم فرق $\phi_1 - \phi_2$ کو ϕ کی جگہ مساوات (3-1) میں رکھیں تو ہمیں

$$\int(\phi_1 - \phi_2)\nabla(\phi_1 - \phi_2)\cdot d\mathbf{S} = \int[\nabla(\phi_1 - \phi_2)]^2\,dv. \qquad (3\text{-}2)$$

ملتا ہے۔ دونوں میں سے کوئی حدی شرط (مضمروں کا برابر ہونا یا ان کے

عمودی مشتق کا برابر ہونا) مساوات (3-2) کے بائیں جانب کو یقینی طور پر صفر کر دیتا ہے۔ چونکہ مساوات (3-2) کے داہنے طرف کا متکمل مثبت معین ہے اس لیے تکمیلیہ کے صفر ہونے کے لیے اسے صفر ہونا چاہیے۔ اس لیے سارے حجم v میں۔

$$\nabla\phi_1 = \nabla\phi_2, \quad \phi_1 = \phi_2 + \text{constant.} \qquad (3\text{-}3)$$

اس طرح دونوں مضمر جنھیں ہم نے مختلف لیا تھا لیکن ایک ہی حدی شرط کے پابند مانا تھا ایک دوسرے سے زیادہ سے زیادہ ایک مستقلہ کا فرق رکھتے ہیں جس سے گریڈیئنٹ میں کوئی فرق نہیں پڑتا۔ اس لیے یہ مضمر ایک جیسے برقی میدانی تقسیمیں دیں گے۔

اگر خطی برق گزار ہی زیر غور ہیں تو مساوات (3-1) کی جگہ

$$\int \phi\kappa\nabla\phi\cdot d\mathbf{S} = \int[\kappa(\nabla\phi)^2 + \phi\nabla\cdot(\kappa\nabla\phi)]\,dv. \qquad (3\text{-}1')$$

رکھ سکتے ہیں۔ برق گزاروں کے لیے لاپلاس مساوات مندرجہ ذیل ہوتا ہے۔

$$\nabla\cdot(\kappa\nabla\phi) = 0,$$

اور اس طرح یکتائی کا ثبوت جائز رہتا ہے۔ اگر غیر خطی برق گزاروں سے واسطہ ہے تو حجم کو ایسے چھوٹے خطوں میں بانٹا جا سکتا ہے جن کی تقطیب کثافتیں یکساں ہوں اور جن کے لیے یہ مقالہ فرداً فرداً لاگو ہو۔

3-2 گرین کا مصدقہ متکافیت

برق سکونی مسئلوں کے حل کے لیے کار آمد مصدقوں کی ایک بڑی تعداد ایک معلوم اور زیادہ آسان مسئلہ کے حل کو ایک دوسرے حل طلب مسئلے کے حل میں تبدیل کرنے کا کام دیتے ہیں۔ ایسے مصدقوں میں ایک سب سے زیادہ کار آمد گرین کا مصدقہ متکافیت ہے۔ n نقطہ چارجوں q_j کا ایک سٹ لیجیے جو ایسے مقامات پر واقع ہیں جہاں کہ دوسرے چارجوں کی وجہ سے مضمر عددوں کے ایک سٹ ϕ_j سے دیے ہوئے ہیں۔ نقطہ j کا مضمر دوسرے نقطوں پر کے چارجوں سے (جنھیں جمع کے مطلب کے لیے کہا گیا ہے) نیچے کی مساوات کے ذریعہ وابستہ ہے۔

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{q_i}{r_{ij}}. \tag{3-4}$$

جمع کے نشان پر زبر بتاتا ہے کہ جمع میں رقم $j = i$ شامل نہیں ہوگی۔ اب اگر دوسری طرف q'_j چارجوں کا ایک مختلف سٹ انھیں نقطوں پر رکھ دیا جاتا ہے اور یہ مطابقتی مضمر ϕ'_j پیدا کرتے ہیں تو ایک ویسا ہی رشتہ ملے گا۔ یعنی

$$\phi'_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{q'_i}{r_{ij}}. \tag{3-5}$$

اب ہم مساوات (3-4) کو q'_j سے اور مساوات (3-5) کو q_j، سے ضرب کرتے ہیں اور پھر عبارت کو انڈیکس j پر جوڑ لیتے ہیں۔

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j q'_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{q_i q'_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \phi'_j q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{q'_i q_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \tag{3-6}$$

چوں کہ i اور j جوڑ کے انڈیکس ہیں ہم ان کی ادلا بدلی q قسم کے کسی حاصل ضرب میں کر سکتے ہیں، اس طرح

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j q'_j = \sum_{j=1}^{n} \phi'_j q_j, \tag{3-7}$$

جو کہ مطلوبہ مصدقہ ہے۔

n نقط چارجوں کے سٹ کے لیے عائد اس مصدقہ کو زیادہ عام بنا کر ہم n چالکوں کے سٹ کے لیے عائد کر سکتے ہیں جن کے مضمرات ϕ_j اور چارج q_j ہیں۔ یہ نتیجہ مساوات (3-7) میں برابر ϕ_j والے نقطوں کو آپس میں ملا کر ایک رقم بنا دینے پر مل جاتا ہے۔ اس طرح مساوات (3-7) کا ایسے چالکوں کے نظام پر براہ راست اطلاق ہوتا ہے۔ اگر دو چالکوں i اور j کو چھوڑ کر سب چالک زمین سے جوڑ دیے جائیں تو مساوات (3-7) کا مطلب

ہوگا کہ وہ مضمر جس پر ہیں چارج شدہ چالک i چالک j پر چارج q رکھنے پر پہنچتا ہے، j کے مضمر کے برابر ہوگا جب غیر چارج شدہ ہو اور i پر چارج q رکھ دیا جائے۔ حجز 3-3. کے آخر میں مساوات (3-7) کا استعمال مضمر مسئلے کے حل کے لیے دکھایا گیا ہے۔

3-3 گرین فنکشن کے ذریعے حل

مضمر مسائل کے متعدد اقسام کے حل گرین فنکشن سے پیدا کیے جاسکتے ہیں۔ کسی مخصوص جیا مٹریائی ترتیب کے لیے گرین کا فنکشن زمین سے جڑے موصل حدود کی اس جیومٹریائی ترتیب کے لیے اور جبکہ واحد موجود چارج نقطہ r' پر ایک اکائی نقطہ چارج ہے۔ گرین کے مصدقہ متکافیت سے دکھایا جاسکتا ہے کہ کسی خاص دی ہوئی جیومٹری کے لیے گرین کا فنکشن r' نقطہ پر مقیم نقطہ چارج کی سمتی قدروں کا اور نقطہ مشاہدہ r کی سمتی قدروں کا متشاکل فنکشن ہے۔

گرین کے فنکشن کے استعمال سے دو عام طرح کے مسائل حل کیے جاسکتے ہیں۔ ایک قسم کے مسائل وہ ہیں جن میں کسی حد پر مضمر تقسیم ϕ دی ہوئی ہے اور دوسری وہ جس میں چالک حدود والے ایک خطّے کے اندر تقسیم چارج دی ہوئی ہے۔ گرین کے مصدّقہ کے ذریعہ اِن دونوں قسم کے مسائل کا حل ایک ساتھ دیا جاسکتا ہے۔

$$\int (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dv = \int (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot dS, \qquad (1\text{-}37)$$

جہاں ψ اور ϕ کوئی من مانے مقام کے فنکشن ہیں جن کے لیے یہ ضروری ہے کہ وہ سارے حجم v میں غیر نادر رہیں۔ مان لیجیے کہ ϕ کسی خاص مضمر مسئلہ کا دریافت طلب حل ہے اور مان لیجیے کہ $\psi = G$ اس مسئلہ کی جیومٹری کے لیے گرین کا فنکشن ہے یعنی $r = 0$ پر مقیم نقطہ چارج کے مسئلہ کا حل ہے جبکہ سطح S زمین سے جڑی ہے۔ تب G اس شکل کا ہوگا:۔

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} + \chi, \qquad (3\text{-}8)$$

جہاں χ S. پر ترغیبی چارج کی وجہ سے مضمر کو بتاتا ہے۔ یہاں χ

به لحاظ v ہارمونک ہے یعنی یہ لاپلاس مساوات کا ایک حل ہے۔ فاصلہ r سمتی قدروں x_0 اور x_0' کا متشاکل فنکشن ہے اور حجمی اور سطحی تکمیلیوں کو x_0 پر لینا ہے۔ اس لیے G میں ایک ندرت صرف $r = 0$ پر ہے جسے ہم δ فنکشن کے ذریعے قابو میں کرسکتے ہیں۔ گرین کے مقالہ میں مساوات (3-8) کو رکھنے پر

$$\int (G\nabla^2\phi - \phi\nabla^2 G)\, dv = \int\left[G\nabla^2\phi + \frac{\phi\,\delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\right] dv$$

$$= \int (G\nabla\phi - \phi\nabla G)\cdot d\mathbf{S}. \qquad (3\text{-}9)$$

اور تعریف کے مطابق $S.$ پر $G = 0$ اس لیے غیر صفر ارقام کو یکجا کرنے پر ہمیں x_0' پر ϕ کی قدر کے لیے

$$\phi = -\epsilon_0 \left(\int G\nabla^2\phi\, dv + \int \phi_0 \nabla G \cdot d\mathbf{S}\right) \qquad (3\text{-}10)$$

ملتا ہے۔ آئیے اب ہم ان دو حالتوں پر غور کریں جن کا ذکر پہلے کیا جا چکا ہے

(1). نقطہ x_0' کو گھیرنے والی سطح زمین سے جڑی ہے جس کی وجہ سے $\phi_0 = 0,$ اور سارے $v.$ کے اندر تقسیم چارج ρ کی وجہ سے ——— $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ ، تب مساوات (3-10) یہ بن جاتی ہے۔

$$\phi(x_0') = -\epsilon_0 \int G\nabla^2\phi\, dv = \int G\rho\, dv. \qquad (3\text{-}11)$$

یہ عبارت کچھ حد تک واضح ہے کیوں کہ یہ محض حجم $v,$ کے اندر نقطہ ماخذ کی کثافت پر کیا گیا اصول انطباق کا اطلاق بتاتا ہے جس میں ہر اکائی ماخذ جس پر کثافت ρ مشتمل ہے، اپنا حصہ مضمر $\phi(x_0')$ کو انطباق کے ذریعہ دیتا ہے جسے تکمیلیہ کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔

(2) مان لیجیے کہ سارے حجم $v,$ میں ϕ کے کوئی ماخذ نہیں ہیں اس لیے $\nabla^2\phi = 0,$ لیکن آئیے ہم یہ مان لیں کہ سطح $S.$ پر ϕ ایک دیا ہوا فنکشن ϕ_0 ہے۔ اس حالت میں مساوات (3-10) مندرجہ ذیل مساوات میں تحویل ہو جاتا ہے۔

$$\phi(x_0') = -\epsilon_0 \int \phi_0 \nabla G \cdot d\mathbf{S}. \qquad (3\text{-}12)$$

مساوات (3-12) حدود سے گھرے ایک دیئے ہوئے خطہ کے اندر مضمر دیتا ہے جہاں حدود کے مختلف حصے کے دیئے ہوئے سٹ پر پہنچا دیئے گئے ہیں۔ یہ حل اس حد کے اندر مضمر کا اظہار اس حد پر مضمر کے سطحی تکمیلیہ اور گرین فنکشن کے عمودی مشتق کے حاصل ضرب کے ذریعے کرتا ہے۔ طبیعی لحاظ سے گرین فنکشن کا عمودی مشتق وہ سطحی چارج کثافت کو بتاتا ہے جو نقطہ x_0' پر مقیم اکائی چارج کی ترغیب سے حدوں پر بن جاتا اگر حد زمین سے جڑی چالک ہوتی۔ اس طرح مساوات (3-12) مسئلہ مضمر کا حل حد پر کسی دیئے مضمر کے مطابق اس مضمر کے تکمیلیہ اور میدانی نقطہ پر رکھے اکائی چارج کی ترغیب سے زمین سے جڑے حد پر پیدا شدہ چارج کے حاصل ضرب کی شکل میں دیتا ہے۔ اگر ہم مساوات (3-12) کو واضح طور پر سیدھے حد پر کے ترغیب شدہ چارج $\sigma_{1\sigma}$ کے لحاظ سے دکھانا چاہیں تو ہم مساوات (2-15) سے دیکھتے ہیں کہ

$$\nabla G\cdot\frac{d\mathbf{S}}{dS}=+\frac{\sigma_{1s}}{\epsilon_0}.$$

اس طرح مساوات (3-12) صرف یہ ہو جاتی ہے

$$\phi(x_0')=-\int\phi_s\sigma_{1s}\,dS. \qquad (3\text{-}13)$$

مصدقہ (3-13) کو گرین کے مصدقہ متکافیت کے سیدھے استعمال سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(1) سطح S کو زمین سے جوڑ دیجیے اور ایک چارج q_0 کو نقطہ x_0' کو گھیرنے والے ایک چھوٹے چالک پر رکھ دیجیے۔ چارج q_0 کی وجہ سے سطح S کے i ویں خطہ پر ترغیب شدہ چارج کو ہم q_{1i} کہیں گے۔

(2) x_0' پر مقیم چارج ہٹا دیجیے لیکن سطح S کو ایسے ٹکڑوں میں بانٹیے کہ ہر ٹکڑے کا ایک مستقل مضمر ہو۔ S کے i ویں ٹکڑے کا مضمر ϕ_{si} ہے۔ اس حالت میں $\phi(x_0')$ نقطہ x_0' پر مضمر کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر ہم ان دونوں حالتوں کا رشتہ مساوات (3-7) کے ذریعہ قائم کریں تو ہمیں

$$q_0\phi(x_0') + \sum_{j=1}^{n} q_{1j}\phi_{j0} = 0 + 0.$$

ملتا ہے۔ داہنے طرف کے دو صفر اس حقیقت کی وجہ سے آتے ہیں کہ حالت (1) میں سارے حدود پر مضمر صفر ہے اور حالت (2) میں x_0' پر چارج صفر ہے۔ یہ یاد رکھتے ہوئے کہ ہم نے q_0 کو اکائی لیا ہے ہم پاتے ہیں:

$$\phi(x_0') = -\sum_{j=1}^{n} \phi_{j0}q_{1j}. \qquad (3\text{–}14)$$

یہ عبارت جو مساوات (3-13)، کے مماثل ہے لیکن اسے براہِ راست ترغیبی چارج کے لحاظ سے ایسے ڈھنگ سے حاصل کیا گیا ہے جو طبیعی طور پر زیادہ واضح ہے۔

زیادہ مخصوص مسئلوں پر غور کے دوران ہم مختلف چالک حدود کے لیے گرین فنکشن اخذ کریں گے۔ تب چارج تقسیموں کو گھیرے ہوئے زمین سے جڑے چالکوں کے لیے اور دیے ہوئے مضمر والے چالکوں سے گھرے غیر چارج والے خطوں کے لیے بھی مسئلوں کے حل فوراً لکھے جا سکتے ہیں۔

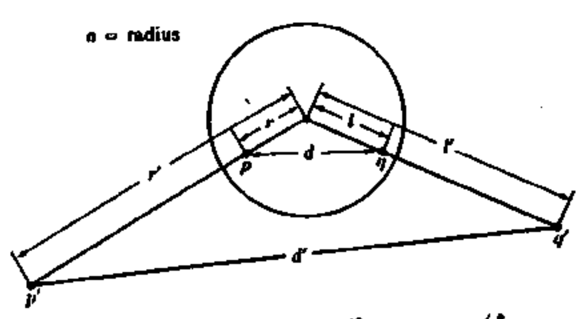
3-4 تقلیب کے ذریعہ حل

استحالے کی بہت سی قسمیں ہیں جن کے ذریعے کسی مضمر مسئلے کے حلوں کا ایک سٹ دوسرے مسئلے کے حلوں کے سیٹ میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ تقلیب کا عمل ایک خاص حالت ہے جس کی اہمیت اس وجہ سے ہے کہ یہ تین ابعاد اور دو ابعاد دونوں میں ہی جائز ہے۔ دو ابعادوں میں استحالے کی وہ قسمیں جو تقلیب سے زیادہ عام ہیں پائی جا سکتی ہیں۔

ان طریقوں میں جن سے ایک مسئلے کے حل کو ایک آسان تر مسئلے کے حل میں بدلا جا سکتا ہے ایک بہت آسان اور بہت مفید طریقہ ہے۔

ایک کرہ میں تقلیب ہے، جیسا کہ شکل 3-1. میں دکھایا ہے۔

سیدھے تفرق سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر $\Phi_P = \Phi(r, \theta, \varphi)$



شکل 3-1. تقلیب کے ذریعہ حل

لاپلاس کے مساوات کا ایک حل ہے تو

$$\psi(r', \theta, \varphi) = \frac{a}{r'}\,\phi\left(\frac{a^2}{r'}, \theta, \varphi\right) \qquad (3\text{–}15)$$

بھی لاپلاس مساوات کا ایک حل ہے۔ ایک a نیم قطر والے کرہ کے لحاظ سے رشتہ $rr' = a^2$, کے ذریعہ نقطہ r کا نقطہ r' میں استحالہ نقطہ $p(r, \theta, \varphi)$ کو نیم ریڈیس ویکٹر کی سمت میں کرہ کے اندر سے ہٹا کر باہر اس کے تقلیب نقطہ $p'(a^2/r, \theta, \varphi)$, پر پہنچا دیتا ہے۔ یا اسی عمل کا الٹا بھی کرتا ہے۔ ایک چارج q مرکز سے فاصلہ l پر اور ایک چارج q' فاصلہ l' پر اس طرح رکھیے کہ $ll' = a^2$. رشتوں $rr' = a^2$ اور $ll' = a^2$ کا مفہوم یہ ہے کہ $r/l' = l/r'$, اور اس لیے وہ مثلث جن کے اضلاع rld اور $r'l'd'$ ہیں مشابہ مثلث ہیں۔ اس طرح $r/l' = l/r' = d/d'$ تقلیب کے قبل p پر مضمر $\phi_p = q/4\pi\epsilon_0 d$ ہے اور تقلیب کے بعد p' پر مضمر $\phi_{p'} = q'/4\pi\epsilon_0 d'$, ہے۔ اس لیے

$$\frac{\phi_{p'}}{\phi_p} = \frac{q'}{d'}\,\frac{d}{q} = \frac{q'}{q}\,\frac{l}{r'} = \frac{q'}{q}\,\frac{r}{l'}. \qquad (3\text{–}16)$$

چارجوں کی تقلیب کا ایک قانون تشکیل کرنے کے لیے ہم اس حقیقت کا استعمال کرتے ہیں کہ صفر مضمر والی سطحیں تقلیب کے بعد صفر مضمر کی سطحیں ہی رہیں گی۔ ہم تقلیب کرہ کا مضمر صفر اس طرح بنا سکتے ہیں کہ شروع میں دو

چارج $q_I = q$ مرکز سے فاصلہ l پر اور $q_{II} = -qa/l$ فاصلہ l' پر اس طرح لیں کہ $ll' = a^2$. ہو۔ اب تقلیب کرہ جو ان دو چارجوں کے اثر سے صفر مضمر پر ہے تقلیب کے بعد بھی ایسا ہی رہتا ہے۔ ایسا بلاشبہ ہو جائے گا اگر دونوں چارج اپنی جگہیں آپس میں بدل لیں اس طرح :

$q_I = q$ پر l ہو جاتا ہے $q'_I = aq/l$ پر a^2/l,

$q_{II} = -qa/l$ پر a^2/l ہو جاتا ہے $q'_{II} = -q$ پر l.

دونوں حالتوں میں تبدیل شدہ چارج اصلی چارج اور تقلیب نیم قطر کے حاصلِ ضرب کو کرہ کے مرکز سے چارج کا شروع کے فاصلے تقسیم کر کے آتا ہے۔

$$\frac{q'}{q} = \frac{a}{l} = \frac{l'}{a} = \sqrt{\frac{l'}{l}}. \qquad (3\text{–}17)$$

اس میں زیادہ سہولت معلوم ہوتی ہے کہ کوئی چارج مقلوب حالت میں اپنا ابتدائی نشان قائم رکھے اور تبدیلی صرف اس کی قدر میں ہو۔ حالانکہ ایسا ضروری نہیں ہے اگر مقلوب شدہ سبھی چارجوں کو ایک ہی طرح برتا جائے۔ اب ہم مساوات (3–17) کو مساوات (3–16) میں رکھ کر مضمروں کی تقلیب کا قاعدہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\phi'_p / \phi_p = a/r' = r/a, \qquad (3\text{–}18)$$

جو $\phi'_p = \frac{a}{r'}\phi(r, \theta, \varphi)$. سے جو مساوات (3–15). سے مطابقت رکھتا ہے اتفاق کرتا ہے۔ حجمی یا سطحی چارج کثافتوں جیسی مقادیر کے لیے استحالہ مساوات چارج استحالہ مساوات (3–17) کو مناسب جیومٹریائی مقداروں کے استحالہ سے ضرب کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

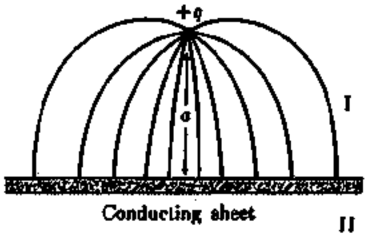
تقلیب استحالہ میں تبدیل شدہ جیومٹریائی کے اندر ایک نقطہ چارج اکثر تقلیب کے مرکز پر رونما ہوتا ہے۔ یہ نقطہ چارج اس وجہ سے پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی جیومٹری میں کل چارج کے ایسے برقی میدانی خطوط تھے جو لامتناہیہ پر مقیم برابر اور مخالف چارجوں پر ختم ہوتے تھے اور تقلیب کے عمل میں لامتناہیہ کو مبدا پر لے آیا جاتا ہے۔

تقلیب استحالہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اگر تقلیب کا مرکز کروی حد پر لیا جائے تو اس عمل سے کروی حدود کی تصحیح ہو جاتی ہے۔

دو آزاد چارج والے اور ایک دوسرے کو قطع کرنے والے کروں کو تقلیب کے ذریعے دو ایک دوسرے کو کاٹنے والے مستوا میں بدلا جا سکتا ہے اور مسطح حدی مسئلہ عموماً شبیہوں کے طریقے سے آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے۔

3-5 برقی شبیہوں کے ذریعہ حل

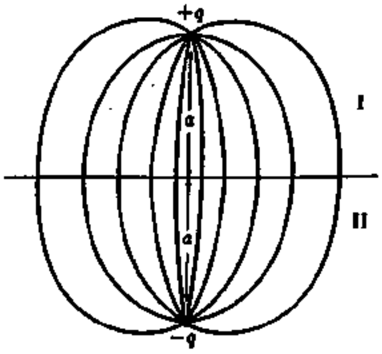
اگر دو برابر اور مخالف نقطہ چارج دیے ہوں تو صفر مضمر سطح ایسے نقطوں کا مستوا ہوگا جو دونوں چارجوں سے برابر فاصلہ پر ہو۔ صفر مضمر والے مستوا کی جگہ ہم ایک زمین سے جڑا ہموار چالک رکھ سکتے ہیں اور مضمر میدان میں کوئی تبدیلی نہیں آئے گی۔ اس طرح ایک نقطہ چارج اور زمین سے جڑے مستوا کے لیے حل ٹھیک وہی ہے جو دو نقطہ چارجوں کے لیے سارے خطہ I میں ہے (دیکھیے شکل 3-2.) جس میں میدان کا وجود ہے۔ اس غیر حقیقی چارج -q کو شیشہ میں انعکاس کی مشابہت سے q کا "عکس شبیہہ" کہتے ہیں۔



حقیقی تشکیل

Actual configuration

(a)



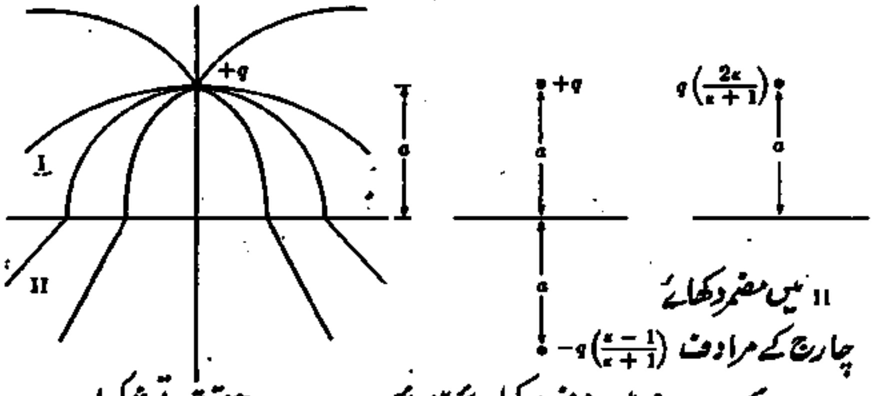
Potential in I is equivalent to that of image system shown.

(b)

خطہ I میں مضمر دکھائے ہوئے شبیہی نظام کے مرادف ہے۔

شکل 3-2. نقطہ چارج اور چالک مستوا (a) طبیعی نظام دکھاتا ہے (b) شبیہوں کا وہ نظام ظاہر کرتا ہے جو چالک چادر کو صفر مضمر پر لا دے گا اور

اس لیے خطہ I میں وہی میدانی تقسیم پیدا کرے گا جو اصلی طبیعی نظام میں ہے

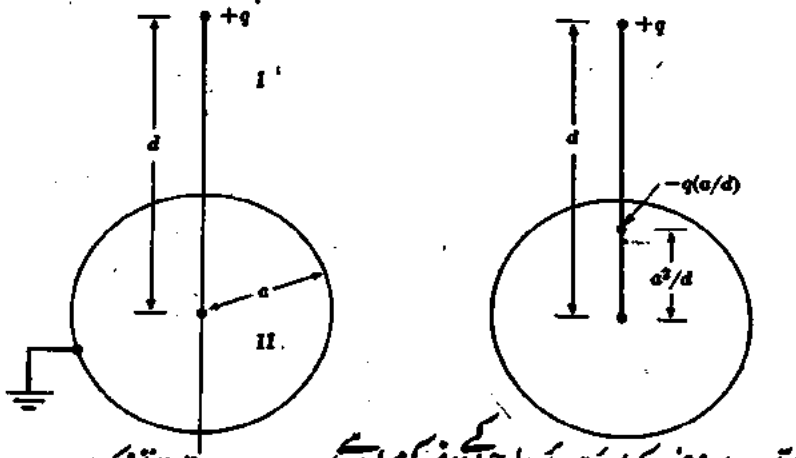


حقیقی تشکیل (D کے خطوط دکھائے گئے ہیں) (a)

I میں مضمر دکھائے ہوئے چارجوں کے مضمر کے مرادف ہے (b)

II میں مضمر دکھائے چارج کے مرادف ہے

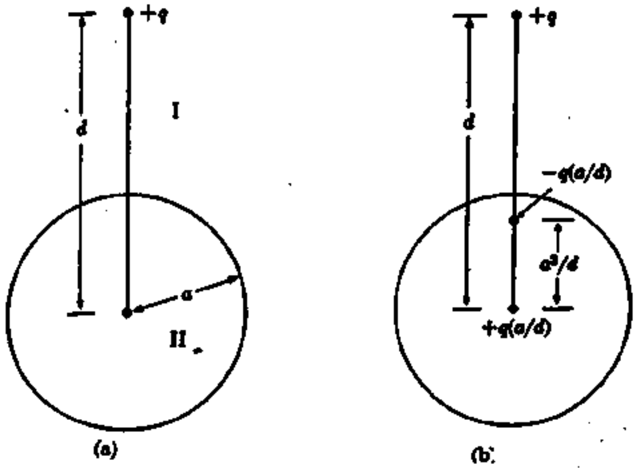
شکل 3-3. نقطہ چارج اور برق گزار نصف (a) مخصوص ترغیبی سمائی κ والے نصف جگہ برق گزار سے فاصلہ a پر واقع چارج q کا حقیقی طبیعی نظام دکھاتی ہے۔ (b) ایک شبیہوں کا نظام ہے جو تشکیل کو دکھاتا ہے: تقسیم کا بایاں حصہ چارجوں کا ایک نظام ہے جو خطہ I; کی صحیح میدانی تقسیم دیتا ہے ; داہنا حصہ خطہ II. کی صحیح میدانی تقسیم دیتا ہے۔



(a) حقیقی تشکیل

خطہ I میں مضمر دکھائے ہوئے چارجوں کے مضمر کے مرادف ہے (b)

شکل .3-4 نقطہ چارج اور زمین سے جُڑا کرہ (a) حقیقی طبیعی تشکیل دکھاتا ہے (b) شبیہوں کا وہ نظام دکھاتا ہے جو خطہ I. کی صحیح تقسیم دیتا ہے۔ خطہ II میں مضمر صفر ہے۔



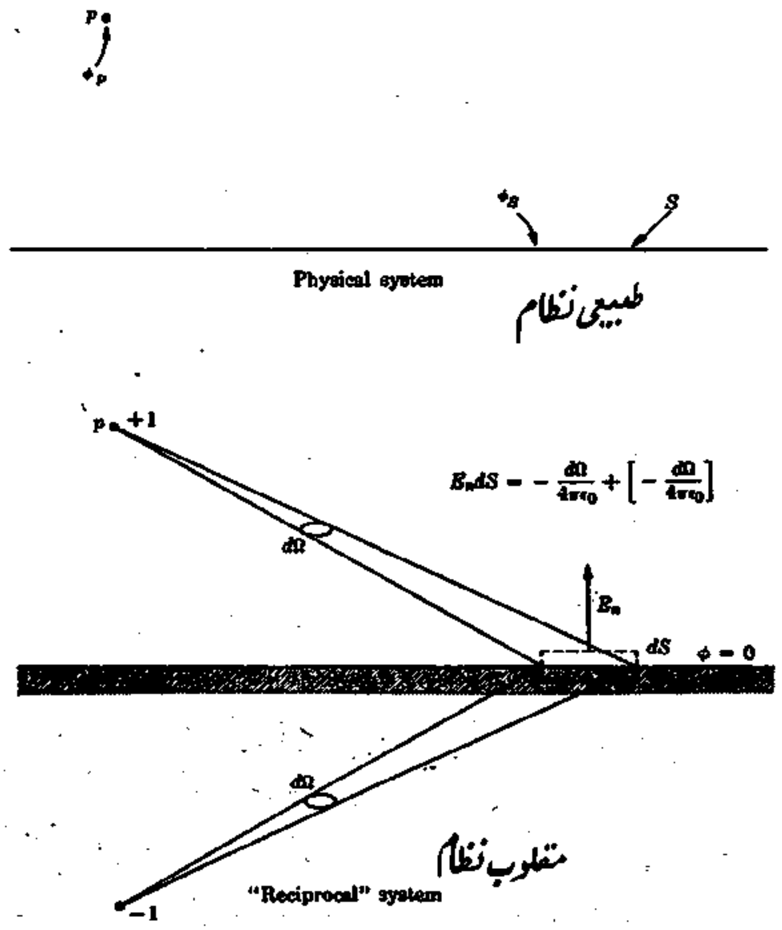
حقیقی تشکیل

خطہ I میں مضمر دکھاتے ہوئے چارجوں کے مضمر کے مرادف ہے

شکل .3-5 نقطہ چارج اور بلاچارج تنہا چالک کرہ (a) حقیقی طبیعی نظام دکھاتا ہے (b) شبیہوں کا وہ نظام دکھاتا ہے جو خطہ I. میں مضمر کی صحیح تقسیم دیتا ہے۔ خطہ II میں میدان صفر ہے لیکن مضمر نہیں۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ عام طور سے ایک لا متناہی مستوا اور کرّ دی چالکوں میں اور ایک مسطح برق گزار حد پر ترغیبی چارجوں سے پیدا مضمر ایک مناسب شبیہی چارج یا چارجوں کے مرادف ہوتے ہیں۔ شکل 3-2 سے لے کر .3-5 میں مخصوص حالتیں دکھائی گئی ہیں۔ ان نتائج کے صحت کی تفصیلی وضاحت مشقوں کے لیے چھوڑ دی گئی ہے۔ شبیہوں کے طریقے سے ہمیں ہموار یا کروی حدود کے سلسلے میں گرین فنکشن کے لیے جیومٹریائی لحاظ سے سادہ عبارتیں ملتی ہیں۔ آیئے ہم مساوات (3-13) کے مصدقہ کے استعمال سے کسی من چاہے نقطہ p کا مضمر دریافت کرنے کے مسئلے کو حل کریں جو ایک مستوا کے

اوپر واقع ہے جس پر مضمر فنکشن ϕ_S دیا ہے۔ (شکل 3-6.)۔ یہ شکل مذکورہ طبیعی نظام دکھاتی ہے اور مقلوب (گرین فنکشن) نظام بھی دکھاتی ہے جس میں ایک اکائی چارج p پر رکھا ہے اور S زمین سے جڑا ہے۔ اس مقلوب نظام میں حدی مسئلہ کو شبیہوں سے حل کیا گیا ہے۔



شکل 3-6. ایک من چاہے تقسیم مضمر والے مستوا کی وجہ سے مضمر کا تعین کرنا۔

باہمی نظام میں ترغیبی چارج کثافت $\sigma_{1e}\, dS = \epsilon_0 E_n$ رشتے سے ظاہر کی جاتی ہے۔

جہاں E_n چالک پر برقی میدان ہے۔ دوسری طرف E_n کو (جو چالک کے عمودی ہے) سطح قطعہ dS کو گھیرنے والے ایک بکس سے جیسے شکل 3-6. میں نقطہ دار لکیروں سے دکھایا گیا ہے۔ گزرنے والے فلکس پر گاس کے مصدقہ مساوات (1-26') کو عائد کر کے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ شکل سے یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ چارج اور شبیہہ دونوں کی وجہ سے بکس کی اوپری سطح سے گزرنے والا فلکس

$$\sigma_{1s}\, dS = \epsilon_0 E_n\, dS = -d\Omega/2\pi, \qquad (3\text{-}19)$$

ہے جہاں $d\Omega$ ٹھوس زاویہ کا وہ قطعہ ہے جو P پر dS گھیرتا ہے۔ اس لیے مساوات (3-13) سے ہمیں یہ سادہ عبارت ملتی ہے:

$$\phi_P = \frac{1}{2\pi}\int_s \phi_s\, d\Omega. \qquad (3\text{-}20)$$

عام طور سے اگر کسی نظام کا گرین فنکشن شبیہی طریقے سے معلوم کیا جا سکے تو وہ مسئلہ جس میں نظام کے حدود کو کوئی من چاہی تقسیم مفرد دی جائے آخر میں ایک سادہ جوڑ یا ٹھوس زاویہ پر تکمیلیہ میں تبدیل ہو جاتا ہے۔

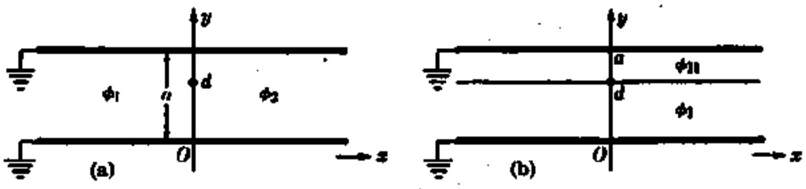
3-6 متغیروں کو الگ کر کے لاپلاس مساوات کا حل

ایک تقسیم چارج کے اندرون کو چھوڑ کر مضمر نظریے کا بنیادی مسئلہ لاپلاس کے مساوات کا ایسا حل پانا ہے جو زیرِ غور خطّہ کی حدود پر چند شرائط کا پابند ہو۔ اگر خطّے کی یہ حدود ایک آرتھوگونل سمتی قدروں کے نظام میں قدری سطحوں سے مطابقت رکھتی ہیں تو متغیروں کو الگ کر کے حل دریافت کرنا گرین فنکشن کے عام طریقے سے اکثر کہیں زیادہ سہل ہوتا ہے۔ ایک بات یہ ہے کہ حدّی شرائط کو سمتی قدروں کو مناسب نظام میں بیان کرنا بہت آسان ہے چاہے یہ شرط ϕ یا اس کے عمودی مشتق کا تسلسل ہو یا شرط یہ ہو کہ ϕ یا $\partial\phi/\partial n$، کی کوئی مخصوص قیمت رکھی جائے جب کہ ہر بیان ایک مخصوص سمتی قدر کی ایک مستقل قدر کے حوالے سے ہے۔ یہ سمتی قدروں کے کسی نظام کے لیے صحیح ہوگا لیکن کچھ نظاموں میں ہم کچھ آگے جا سکتے

ہیں اور حل کو الگ الگ سمتی قدروں کے فنکشن کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھ سکتے ہیں
تاکہ حدی شرائط الگ الگ منفرد تغیر پذیر اجزا پر عائد کیے جا سکیں۔ یہ مزید بتا دینا
چاہیے کہ جب جزوی تفرقی مساوات کے حل کا کوئی سیدھا عام طریقہ نہیں ہے
متغیروں کو الگ الگ کرنے سے لاپلاس کا مساوات معمولی تفرقی مساواتوں کے
ایک سٹ کی شکل میں تبدیل ہو جاتا ہے جن کو اصولاً ہمیشہ حل کیے جا سکتے ہیں۔

اس طریقے کے اہم پہلوؤں کو ایک مثال کے ذریعہ بہت اچھی طرح دکھایا
جا سکتا ہے۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے $y = 0$ اور $y = a$، پر ایک
جوڑا زمین سے جڑی متوازی چالک پلیٹوں کا لیجیے ساتھ میں نقطہ $(0, d)$، پر ایک
خطی چارج ہے جو z محور کے متوازی ہے۔ یہ جان کر کہ کوئی دوسرے چارج
نہیں ہیں ہمیں ایسا حل درکار ہے جو پلیٹوں کے درمیان کی جگہ کے لیے جائز ہو۔
اس طرح مسئلہ دو ابعادی ہے جس کے لیے کارتیسی سمتی قدریں مناسب ہیں۔
آئیے ہم یہ مان لیں کہ $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$، جہاں X صرف x کا فنکشن
ہے اور Y صرف y کا۔ نقطہ $(0, d)$ کو چھوڑ کر جس مساوات کی تعمیل
ہونی چاہیے وہ یہ ہے:

$$\nabla^2\phi = YX'' + XY'' = 0, \qquad (3\text{-}21)$$



شکل 3-7. ایسے مستوا کے ذریعہ جن میں $x = 0, y = d$، پر چارج کا خط واقع ہو کپیسیٹر کی پلیٹوں کے بیچ کی جگہ کو تقسیم کرنے کے دو طریقے دکھائے گئے ہیں۔

جہاں دو زیر فنکشن کا دوسرا مشتق اس کے متغیر کے لحاظ سے بتاتے ہیں
مساوات (3-21) کو ϕ سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں۔

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0. \qquad (3\text{–}22)$$

چونکہ x اور y بدلنے میں خود مختار ہیں اس لیے مساوات (3-22) کے دونوں ارقام دونوں ہی متغیروں سے آزاد ہوں گے اور ہم لکھ سکتے ہیں کہ:

$$X''/X = -Y''/Y = K. \qquad (3\text{–}23)$$

مستقلہ K کو فارقی پیرامیٹر (separation parameter.) کہتے ہیں۔ اگر K پر کوئی پابندیاں نہیں ہیں تو معمولی تفرقی مساواتوں کے عام حلوں کا حاصل ضرب دو ابعادی لاپلاس مساوات کا ایک عام حل ہے۔ پھر بھی طبیعی مسئلے کی حدی شرائط حلوں کی فطرت اور فارقی پیرامیٹر کی قدر دونوں پر روک لگا دیں گی۔ جس حل کے ہم متلاشی ہیں وہ (یا تکمیلیہ جو اس پر منحصر ہے کہ آیا پیرامیٹر کی جائز قدریں مجرد ہیں یا مسلسل) جائز حاصل ضرب حلوں کا ایک جوڑ ہے جن کے ضریبے اس طرح معلوم کیے گئے رہیں کہ حدی شرائط کی سختی سے پابندی ہوتی ہے۔ ان ضریبوں کو معلوم کرنے کے لیے ہم فنکشنوں کی ایک صفت کا استعمال کریں گے جسے عمودیت کہتے ہیں۔

فارقی مستقلہ K کے نشان (مثبت یا منفی) اور اس طرح سے مطابق حلوں کی فطرت کے انتخاب میں ہم آزاد ہیں۔ آئیے ہم پہلے یہ مان لیں کہ مساوات (3-23) کا K مثبت ہے $K = k^2,$ اس لیے معمولی تفرقی مساوات یہ ہو جاتی ہیں

$$\begin{aligned} Y'' + k^2 Y &= 0, \\ X'' - k^2 X &= 0, \end{aligned} \qquad (3\text{–}24)$$

جس کے عام حل یہ ہیں

$$\begin{aligned} Y &= A \sin ky + B \cos ky, \\ X &= Ce^{kx} + De^{-kx} \end{aligned} \qquad (3\text{–}25)$$

حدی شرائط جن کی پابندی ہونی ہے وہ یہ ہیں کہ $y = 0, y = a,$ اور

$x = \pm\infty$ پر $\phi = 0$ ہوگا۔ صرف $B = 0$ رکھ کر اور k کی قدروں کو $n\pi/a,$ تک ہی محدود کرکے، جہاں n کوئی عدد ہے، ہم آسانی سے پلیٹوں کا مضمر صفر کرسکتے ہیں۔ پھر بھی $x,$ کی سمت میں مثبت اور منفی لاانتہا ہیہ پر $X,$ کی دونوں میں سے کوئی رقم ایک ساتھ شرائط کی پابندی نہیں کرسکتی اس لیے ہم کو x کے مثبت اور منفی خطوں کے لیے الگ الگ حل لکھنا ہوں گے؛

$$\underset{-\infty<x<0}{\phi_1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{n\pi x/a} \sin\frac{n\pi y}{a}, \qquad \underset{0<x<\infty}{\phi_2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi x/a} \sin\frac{n\pi y}{a}. \tag{3-26}$$

$x = 0$ پر مضمر ϕ مسلسل ہے اس لیے دونوں سلسلوں میں ضربیے رقم بہ رقم برابر ہیں یعنی $C_n = A_n.$ بہرحال ہمیں ابھی ان ضربیوں کو معلوم کرنا ہے اور ہم نے خطی چارج سے نکلے فلکس کا حساب نہیں کیا ہے۔ چونکہ مضمر کی قیمت یکتا ہے۔ اس لیے اس طبیعی ضرورت کو A_n کے ریاضیاتی تعین کے ساتھ پوری مطابقت رکھنی ہوگی۔

اب ایک خطی چارج کو دو ابعادی δ فنکشن کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے لیکن چونکہ ہم خطہ 1 اور 2 کے لیے حل جداگانہ لکھ رہے ہیں یہ ممکن ہے کہ ہم ایک سطحی چارج پر حدی شرائط کے اپنے علم کا استعمال کریں اور سطح $x = 0.$ پر کسی من چاہے تقسیم چارج کی ایک مخصوص حالت کے طور پر ایک ایک۔ ابعادی فنکشن $\delta(y - d)$ کو کام میں لائیں۔ دوسرے الفاظ میں $x = 0,$ پر

$$\sigma(y) = q\,\delta(y - d), \tag{3-27}$$

جہاں xy مستوا کے عمودی اکائی لمبائی پر چارج q ہے اور $\delta(y - d)$ کی تعریف ان مساواتوں سے ہوتی ہے۔

$$\int_0^a \delta(y - d)\,dy = 1,$$
$$\int_0^a f(y)\,\delta(y - d)\,dy = f(d), \qquad 0 < d < a. \tag{3-28}$$

مضمروں کو تب نیچے لکھی شرائط کا پابند ہونا چاہیے۔

$$\frac{\sigma(y)}{\epsilon_0} = \frac{q\,\delta(y-d)}{\epsilon_0} = \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right]_{x=0} = \sum A_n \frac{2n\pi}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}. \quad (3\text{-}29)$$

فوریر ضریبے حسب معمول مساوات (3-29) کے دونوں طرفوں کو $\sin(m\pi y/a)$ سے ضرب کرکے اور 0 سے a تک تکمیل کرکے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ سلسلے کے داہنے طرف کی سب ارقام سوا اس کے جس کے لیے $m = n$, صفر ہو جائیں گے یعنی اس وقفہ کے لیے سائن فنکشن " عمودی ہیں۔ اس لیے

$$\frac{q}{\epsilon_0}\sin\frac{m\pi d}{a} = \frac{2m\pi}{a}A_m\frac{a}{2},$$

یا m, کی جگہ n لکھنے پر

$$A_n = \frac{q}{\epsilon_0 n\pi}\sin\frac{n\pi d}{a}. \quad (3\text{-}30)$$

تب پورا حل یہ ہو جاتا ہے:

$$\phi_1 = \frac{q}{\epsilon_0\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi d}{a}e^{n\pi x/a}\sin\frac{n\pi y}{a},$$
$$\phi_2 = \frac{q}{\epsilon_0\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi d}{a}e^{-n\pi x/a}\sin\frac{n\pi y}{a}, \quad (3\text{-}31)$$

اور مسئلہ حل ہو گیا۔

یہ دھیان رکھنا سبق آموز ہوگا کہ وہی مسئلہ بالکل مختلف دکھائی پڑ سکتا ہے اگر مساوات (3-23) میں فارقی پیرامیٹر کا نشان الٹا چنا جائے۔ اگر ہم $K = -k^2$, رکھیں تو $X(z)$ کا حل تب $\cos kz$, ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ مضمر z, کا جفت فنکشن ہے لیکن k. پر کوئی پابندیاں نہیں عائد کی گئی ہیں۔ بہرحال کوئی بھی اکیلا فنکشن Y دونوں چالک پلیٹوں پر صفر نہیں ہوگا اور ہمیں پھر خطہ کو دو حصوں میں بانٹنا ہوگا اس بار مستوی $y = d$. کے ذریعہ اس بات کی آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے کہ k کی کسی قدر کے لیے دو دو حل جو $y = 0$ اور $y = a$, پر صفر ہو جاتے ہیں اور $y = d$, پر مسلسل رہتے ہیں

یہ ہیں:

$$Y_{\text{I}} = \frac{\sinh ky}{\sinh kd}, \quad 0 < y < d,$$
$$Y_{\text{II}} = \frac{\sinh k(a-y)}{\sinh k(a-d)}, \quad d < y < a. \tag{3-32}$$

چونکہ مضمر k کے اوپر تکمیلیہ ہوتے ہیں جن کے ضربیوں کو ہم $A(k)$ کہہ سکتے ہیں، لہٰذا

$$\phi_{\text{I}} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos kx \frac{\sinh ky}{\sinh kd}\, dk,$$
$$\phi_{\text{II}} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos kx \frac{\sinh k(a-y)}{\sinh k(a-d)}\, dk. \tag{3-33}$$

مستوا $y = d$ پر چارج کثافت اب x کا فنکشن ہے اور مضمروں پر شرط یہ ہے:

$$\frac{q\,\delta(x)}{\epsilon_0} = \left[\frac{\partial\phi_{\text{I}}}{\partial y} - \frac{\partial\phi_{\text{II}}}{\partial y}\right]_{y=d}$$
$$= \int A(k) \cos kx \left[\frac{\cosh kd}{\sinh kd} + \frac{\cosh k(a-d)}{\sinh k(a-d)}\right] k\, dk$$
$$= \int A(k) \frac{\cos kx \sinh ka}{\sinh kd \sinh k(a-d)}\, k\, dk. \tag{3-34}$$

لیکن یہ فوریئر تکمیلیہ مصدقہ کے رسمی اطلاق سے حاصل ہوتا ہے اور پہلے باب کے آخر میں دیے ایک مسئلہ میں دکھایا گیا ہے کہ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos kx\, dk = 2\pi\, \delta(x) \tag{3-35}$$

اس معنیٰ میں کہ ان دونوں کا رویہ بالکل ایسا ہی ہوتا ہے جیسا کہ کسی تکمل میں اجزا کا اس لیے

$$A(k) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sinh kd \sinh k(a-d)}{k \sinh ka} \tag{3-36}$$

اور مضمر واضح طور پر مندرجہ ذیل عبارتوں سے ظاہر کیا جاتا ہے :-

$$\phi_{I} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{\sinh k(a-d)}{k \sinh ka} \cos kz \sinh ky \, dk,$$

$$\phi_{II} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{\sinh kd}{k \sinh ka} \cos kz \sinh k(a-y) \, dk. \tag{3-37}$$

اگر $q = 1$ تو یہ حل [مساوات (3-31) (3-37)] دو ابعادی متوازی پلیٹ جیومٹریائی کے لیے گرین کا فنکشن ہے اور ہم دیکھیں گے کہ برابر سمتی قدروں کے مستوا کے ایک سٹ کے لیے گرین کا فنکشن حاصل کرنے کا یہ طریقہ عام ہے لیکن ہمارے فوری مطلب کے لیے اس مخصوص مسئلہ کی تفصیل اتنی اہم نہیں ہے جتنے کہ وہ اصول جنہیں وہ دکھاتے ہیں۔ عام طور سے پیرامیٹروں اور مطابق فنکشنوں کا ایک انتخاب دوسرے سے زیادہ آسان ہوتا ہے لیکن کوئی ایک انتخاب کرنا ضروری ہے۔

تین ابعاد میں متغیروں کو الگ کرنے کے لیے ہم وہ طریقہ کار اپناتے ہیں۔ کارتیسی سمتی قدروں $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, میں اور لاپلاس کے مساوات میں رکھنے پر

$$\frac{\nabla^2\phi}{\phi} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0. \tag{3-38}$$

ملتا ہے۔ اس لیے ہم

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = K_1,$$

$$\frac{X''}{X} = K_1 - \frac{Y''}{Y} = K_2. \tag{3-39}$$

رکھ سکتے ہیں۔ اب فارقی پیرامیٹر دو ہیں۔ عام طور سے N آزاد متغیروں کے لیے ان پیرامیٹروں کی تعداد $N - 1$ ہوتی ہے۔ جز و ضربی حلوں کے لیے مساوات میں تشاکل کا نہ ہونا لاپلاس کے مساوات میں فطرتاً ہے۔ اور کہا جا سکتا ہے کہ یہ لاپلاسی آپریٹر میں خود سمتی قدروں کے نشان مکمل تشاکل سے مطابقت

رکھتا ہے۔ تین ابعادی مستطیلی سمتی قدروں میں جز وضربی میں سے دو دائری فنکشن ہو سکتے ہیں۔ لیکن سب تینوں نہیں۔ تیسرے متغیر کی مستقل سطح پر ضربیے دریافت کیے جا سکیں اس کے لیے ضروری ہے کہ فنکشن عمودی ہوں لیکن ہر اس حالت میں جس میں تفریق ممکن ہو یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ یہ لاپلاس کے مساوات کے حلوں کا ایک عام خاصہ ہے چاہے کوئی بھی سمتی قدریں استعمال کی جائیں۔

جائز فنکشنوں کا عمودی ہونا گرین کے مصدقہ کے ذریعہ سے دکھایا جا سکتا ہے۔ آیئے ہم یہ ثبوت کروی قطبی سمتی قدروں کے لیے استعمال کریں جس کی جیومٹری کا تصور آسان ہے اور پھر دیکھیں کہ یہ دوسری سمتی قدروں کے نظاموں کے لیے بھی لاگو ہے۔ مان لیجیے کہ لاپلاس کے مساوات کو الگ الگ کیا جا سکتا ہے۔ تاکہ $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, اور یہ بھی مان لیجیے کہ فنکشنوں کی یا علیحدگی سے متعلق پیرامیٹروں کی فطرت کچھ بھی ہو ϕ_1 اور ϕ_2 دو جائز حل ہیں۔ اگر ہم ان دو مضمروں کو گرین کے مصدقہ میں رکھیں تو ہم

$$\int(\phi_1\nabla^2\phi_2 - \phi_2\nabla^2\phi_1)\,dv = \int[R_1Y_1\nabla(R_2Y_2) - R_2Y_2\nabla(R_1Y_1)]\cdot d\mathbf{S}. \tag{3-40}$$

پاتے ہیں۔ بایاں بازو صفر ہو جاتا ہے کیونکہ ϕ_1 اور ϕ_2 لاپلاس مساوات کے حل ہیں۔ اگر ہم کو ایک کرہ کی سطح مان لیں تو S کے متوازی ∇ کا جز Y فنکشن پر کام نہیں کرتا اور اس لیے

$$\left(\frac{R_2'}{R_2} - \frac{R_1'}{R_1}\right)\int Y_1Y_2\,dS = 0. \tag{3-41}$$

لیکن اگر دونوں نیم فطری فنکشن کے لیے فارقی پیرامیٹر کی مختلف قدروں سے مطابقت رکھتے ہیں تو عام طور سے اُن کا r پر انحصار بھی مختلف ہوتا ہے اور اس طرح اُن کے لاگرتھمی مشتق بھی برابر نہیں ہوتے۔ اس طرح مساوات (3-41) اس بات کا بیان ہے کہ دو فنکشن Y_1 اور Y_2 ایک دوسرے کے عمودی ہیں

جب کہ ان کا تکمیلیہ ایک کرّہ کی سطح پر لیا جائے۔ اگر سمتی قدری سطح بند نہیں ہے تو بھی ثبوت بالکل اسی طرح سے ہوگا سوا اس کے کہ ہمیں اس حقیقت کا استعمال کرنا ہوگا کہ لامتناہیہ مضمر صفر ہیں ان ماخذ کے لیے جو ایک محدود خطّے میں مقیم ہیں مضمر کافی تیزی سے صفر کی طرف جاتے ہی ہیں اس لیے لامتناہیہ سطح پر تکمیلیہ صفر ہو جاتا ہے۔
اس لیے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ عام طور سے لاپلاس مساوات کے حل میں عمودی فنکشن وجود میں آتے ہیں اور یہ کہ اگر مساوات کو تفرق پذیر ہے تو اصولاً حل پورا کر لینا ممکن ہے۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ جاز فنکشنوں کا سٹ مکمّل بھی ہے اور عمودی بھی ہم اس ثبوت کو یہاں نہیں لیں گے لیکن یہ بتا دینا چاہیے کہ ایک اطمینان بخش مضمر نظریہ کے لیے سٹ کا مکمل ہونا ضروری ہے۔ بغیر اس کے سطحوں پر من چاہے مضمر یا چارج تقسیموں کے اظہار کی ذمّہ داری نہیں لی جا سکتی۔

حوالہ کے لیے مشورے

E. Weber, *Electro-magnetic Fields*, Vol. 1, *Mapping of Fields*.

عملی حلوں پر یہ عمدہ تصنیف اصولوں کو بھی صاف اور مربوط طریقہ سے پیش کرتی ہے۔

O. D. Kelloog, *Foundations of Potential Theory*.

ریاضیاتی بنیادوں کا کلاسکی اظہار ہے۔

J. C. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, Vol. 1.

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*.

پہلے باب میں دلچسپ مسائل شامل ہیں اور ساتھ ہی چالکوں کے نزدیک برق سکونی میدانوں کا ایک مختصر لیکن مکمّل بیان بھی ہے۔
جن تصنیفات کی فہرست باب 1 کے آخر میں دی گئی ہے ان میں برق سکونی مسئلوں کے لیے سب سے زیادہ کارآمد Jeans, Smythe; اور Stratton. کی تصنیفات ہیں۔

P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Mathematical Physics*.

ریاضیاتی طریقوں پر یہ بہت جامع تصنیف ہے۔

E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis.* Much more formal

سے کہیں زیادہ رسمی یہ تصنیف عام طور سے مختلف فنکشنوں کے اوصاف کے لیے اور یہاں خاص طور سے مرکوزیت پر بحث کے لیے کارآمد ہے۔

H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics.*

اس عمدہ تصنیف کا باب مضمر نظریے پر مشتمل ہے۔
کارآمد ریاضیاتی موضوعات پر ان سے کسی قدر زیادہ ابتدائی کتابیں یہ ہیں:

W. E. Byerly, *Fourier's Series and Spherical Harmonics.*
R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems.*

مشق

ـ اگر $\phi(x, y, z)$ لاپلاس مساوات کا ایک حل ہے تو دکھائیے کہ

$$\frac{1}{r}\phi\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

بھی ایک حل ہے [کرّوی سمتی قدروں کا استعمال کیجیے۔ مساوات (3-15).]
سے موازنہ کیجیے]

2. ـــ مان لیجیے کہ ایک نقطہ (r, z) پر محوری تشاکل کی حالت میں برق سکونی مضمر $\phi(r, z)$ ہے جبکہ r دو ابعادی نیم قطر اس طرح پر ہے کہ ــــ $r^2 = x^2 + y^2$. مان لیجیے a ایک چھوٹی مقدار ہے اور مان لیجیے کہ $r = na$. تو دکھائیے کہ

$$\phi(r, z) = \{2n[\phi(r, z + a) + \phi(r, z - a)] + (2n + 1)\phi(r + a, z)$$
$$+ (2n - 1)\phi(r - a, z)\}/8n,$$

فضا کے کسی بلا چارج نقطہ پر a^3 کے درجہ تک صحیح ہے۔ یہ اس طرح کے مصدقوں میں سے ایک ہے جو کہ میدانی نقشہ بندی کے "جال نقطہ" طریقے میں کارآمد ہیں۔

3. ــ ایک ہی قطر کے دو یک محوری پائپ جن کے بیچ میں تھوڑی جگہ ہے ایک مضمر فرق V پر بنائے رکھے جاتے ہیں۔ خالی جگہ کے نزدیک پائپ کے اندر کے خطہ کو

ایک مستطیل جالی میں بانٹیے اور ہر نقطے کے مضمر کا قیاس کیجیے ۔ اپنے قیاسوں کی درستی کی جانچ اوپر دیے مشق کے مصدقہ کے نتیجے سے کیجیے اور غلط قیمتوں کی تصحیح کیجیے اسے جاری رکھیے، حتیٰ کہ ایک خاص صحیح تقسیم نہ مل جائے اسے استراحت کا طریقہ کہتے ہیں۔

4۔ تجزیاتی طریقے سے مشق 3 حل کیجیے ۔ اس کے ممکن طریقے یہ ہیں :

(a) متغیروں کی تفریق اور ضربیوں کو بٹھانا۔

(b) جو طریقہ شکل 3-7، کے مسئلہ کے حل کے لیے اختیار کیا گیا تھا اس سے ملتے جلتے طریقوں سے ایک گرین فنکشن اخذ کیجیے اور تب مساوات 3-4 استعمال کیجیے ۔

(c) شبیہی گرین فنکشن استعمال کیجیے جس پر جز 3-8، میں بحث کی گئی ہے۔

5۔ دکھائیے کہ شکل 3-3 کا شبیہی نظام صحیح ہے۔

6 - دکھائیے کہ شکل 3-2 اور شکل 3-4 کے عکسی شبیہی نظام آپس میں تقلیب استحالے کے رشتے سے جڑے ہیں ۔

7۔ وہ شرط معلوم کیجیے کہ جس سے دو ابعادی یک مضمروں کا ایک سٹ $\phi_2 = f(x, y)$ محور x کے گرد گھمانے پر مساوی مضمروں کا ایک سٹ پیدا کر سکے۔ دکھائیے کہ اگر ایسا ممکن ہو تو مضمر یہ ہوتا ہے۔

$$\phi = A\int \exp\left[-\int F(\phi_2)d\phi_2\right] d\phi_2 + B$$

جہاں

$$F(\phi_2) = \frac{1}{y}\,\frac{1}{(\nabla\phi_2)^2}\,\frac{\partial\phi_2}{\partial y}.$$

(دیکھیے Smythe. یا Jeans)

8. ۔ مومینٹ p والے برقی دو قطبہ کے میدان کو لیجیے ۔ ایک کرہ پر جس کا مرکز p ہے کیا تقسیم چارج دینی ہوگی جس سے کرہ کے

باہر میدان صفر ہو جائے۔؟

9. وہ تقسیم چارج معلوم کیجیے جو یوکاوا مضمر

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{r}$$

پیدا کرے گی۔ پورے چارج کا صفر ہونا کیوں ناگزیر ہے۔؟

10 دو بند مساوی مضمر ϕ_1 اور ϕ_0 اس طرح کے ہیں کہ ϕ_1 کے اندر ϕ_0 ہے دونوں کے درمیان کسی نقطہ پر مضمر ϕ ہے۔ اب اگر ایک چارج q پر رکھ دیا جائے اور مساوی ضمیروں کی جگہ زمین سے جڑی چالک سطحیں لے لیں تو دکھائیے کہ ان دونوں چالکوں پر ترغیبی چارج q_1 اور q_0 اس رشتہ کی پابندی کرتے ہیں۔

$$q_1/(\phi_0 - \phi) = q_0/(\phi - \phi_1) = q/(\phi_1 - \phi_0).$$

11. دکھائیے کہ مساوات (3-31) اور (3-37) مرکوز ہوتے ہیں اور یہ بھی کہ دونوں طبیعی حالات سے مطابقت رکھتے ہیں۔

12. ایک لامتناہی لمبے مستطیل پرزم کے اندر جس کی زمین سے جڑی چالک دیواریں $x = 0, a,$ اور $y = 0, b,$ پر ہیں مضمر معلوم کیجیے جو کہ پرزم کے اندر نقطہ (c, d) پر مقیم ایک خطی چارج q فی اکائی لمبائی کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔

13. شکل 3-4 میں ماخذ نقطہ کو لامتناہیہ پر پہنچا دیجیے اور اس طرح ایک کروی زمین سے جڑے چالک پر ایک یکساں میدان E میں تقسیم چارج کا حساب لگائیے۔ اس تقسیم چارج کا دو قطبی گردشہ بھی معلوم کیجیے (جو شبیہوں کے دو قطبی گردشے کے برابر ہے۔

14. اس مسئلہ کا حل معلوم کیجیے :

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}, \quad 0 < x < \pi,$$

$$\phi(0) = A, \quad \phi(\pi) = B,$$

جس میں $\rho(x)$,A اور B من چاہے دیے ہیں۔ یہ حل گرین کے فنکشن کے لحاظ سے ہونا چاہیے جس کی تعریف یہ ہے :-

$$\epsilon_0 \frac{d^2}{dx'^2} G(x', x) = -\delta(x' - x), \quad 0 < x' < \pi$$

$$G(0, x) = G(\pi, x) = 0.$$

باب (4)

دو ابعادی مضمر مسئلے

سہ ابعادی مضمر مسئلوں کی بہ نسبت اکثر ایسے مضمر مسئلوں کے حل زیادہ آسان ہوتے ہیں جن کی جیومٹریائی ترتیب کو تقریباً ایسی دو ابعادی جیومٹری کا مانا جاسکتا ہے جس کی تیسری سمت لامتناہی یکساں ہو۔ کچھ طریقے درحقیقت صرف دو ہی ابعاد میں زیادہ آسان ہوتے ہیں اور سہ ابعادی جیومٹری کے مطالعہ کے لیے انھیں زیادہ عام بنایا جاسکتا ہے۔ دوسری طرف کچھ ایسی ریاضیاتی تکنیکوں کو جن کا کوئی صحیح جواب تین ابعادوں کے لیے نہیں ہے۔ دو ابعادی مسئلوں پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مخلوط تغیری مضمر کے بیان کا طریقہ جس کے ساتھ ہم شکل استحالہ شامل ہو اس دوسری قسم کا ایک خاص طور سے طاقت ور طریقہ ہے۔

4-1 زوجی مخلوط فنکشن

ہم یہ دکھائیں گے کہ دو ابعادوں میں ایک مخلوط متغیرہ $z_1 = x_1 + iy_1$ کے کسی تجزیاتی فنکشن W کے حقیقی اور قیاسی حصے ہوں گے جو لاپلاس کے دو ابعادی مساوات کے فرداً فرداً پابند ہوں گے اس طرح کے کسی مخصوص مسئلے کی مضمری سطحوں اور میدانی خطوں کو کوئی مناسب فنکشن $W = W(z_1)$ پوری طرح بیان کرسکتا ہے۔ اگر $\phi + i\psi = W = W(z_1) = W(x_1 + iy_1)$, ہو تو ہم حقیقی اور قیاسی حصوں کو الگ کرسکتے ہیں اور $\psi(x_1, y_1) . \phi(x_1, y_1)$ حاصل کرسکتے ہیں۔ مساوات مستقلہ $= \phi$ اور مستقلہ $= \psi$ مساوی مضمری و میدانی

خطی سطحوں کا اظہار کریں گے یا اس کے برعکس بھی۔ اس لیے ایک مخلوط متغیرہ سے دوسرے میں کوئی استحالہ ایک مضمر مسئلے کے حل کو جسے متغیرہ کے ذریعے بیان کیا گیا ہے ایک دوسرے مضمر مسئلہ کے حل میں جسے دوسرا متغیرہ بیان کرتا ہے تبدیل کر دیتا ہے۔ عام طور سے دو ابعادی مضمری تقسیم مسئلوں کی ایک پوری قسم مندرجہ ذیل طریقہ کار سے حل کی جا سکتی ہے۔

(1) ایسا استحالہ $z_2 = f(z_1)$ معلوم کیجیے جو z_1 سمتی قدری نظام کی جیومٹریائی ترتیب کو z_2 سمتی قدری نظام کی ایسی ترتیب میں تبدیل کر دے کہ مسئلہ کو سادہ بنا دے اس سمتی قدری استحالہ $z_2 = f(z_1)$ $z_1 = g(z_2)$ کو اس طرح چننا ہوگا کہ یہ اصلی مسئلہ کی مخلوط مضمری جیومٹری $W = W_1(z_1)$ کو ایک آسان تر مخلوط مضمر جیومٹری $W = W_1(g(z_2)) = W_2(z_2)$. میں لے جائے۔

(2) مضمر حل ϕ کو تبدیل ہوئے مستوا (یعنی z_2) میں اس طرح ظاہر کیجیے کہ $\phi + i\psi$ ایک مخلوط متغیرہ کا ایک تجزیاتی فنکشن ہو۔

(3) اس حل کو واپس ابتدائی مستوا z_1 میں تبدیل کر لیجیے۔

اب ہم اس طریقہ کار کے بجا ہونے پر بحث کریں گے۔ ایک فنکشن $W = \phi + i\psi = f(z)$ لیجیے جہاں $z = x + iy$ ہو۔ ان سب نقطوں پر جہاں فنکشنی رشتہ تجزیاتی ہے ϕ اور ψ مندرجہ ذیل کاشی ریمین تفرقی مساوات کو ضرور مطمئن کریں گے۔

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad (4\text{-}1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}. \qquad (4\text{-}2)$$

کے لحاظ سے مساوات (4-1) کے جزوی تفرق اور (4-2) کے لحاظ سے کے جزوی تفرق سے ملے مساواتوں کو ایک میں ملا دینے پر

$$\nabla^2 \psi = 0 = \nabla^2 \phi. \qquad (4\text{-}3)$$

اور y کے کرداروں کی ادلا بدلی کرکے جزوی تفرق کو دُہرانے پر آخری مساوات ملتا ہے۔ اس طرح ϕ اور ψ دونوں ہارمونی فنکشن $W = f(z)$ ہر جگہ تجزیاتی نہیں ہو سکتا جب تک کہ وہ صفر کے برابر نہ ہو یہ جیسا جز میں بتایا جا چکا ہے اس حقیقت سے میل کھاتا ہے کہ لاپلاس کے مساوات کی پابندی ہر جگہ نہیں ہو سکتی۔ اگر مضمر صفر نہیں ہے۔ فنکشن $W = f(z)$ کی ندرتیں ماخذ کو ظاہر کرتی ہیں۔ عام طور سے W کی کوئی ندرت ایک حقیقی مضمر فنکشن ϕ . ψ میں سے ایک کا "غیر مرکوزی قسم" کا ماخذ بناتی ہے اور دوسری کا "گردشی قسم کا۔

شکل (4-1) فلکس اور بہاؤ خطوط کے درمیان رشتہ دکھاتی ہے

فنکشن W کو اس کے حقیقی اور خیالی حصوں میں الگ الگ کرنے کے بعد $z = x + iy$ مستوا میں خطوط مستقلہ $= \phi$ اور خطوط مستقلہ $= \psi$ پلاٹ کرکے (شکل 4-1) فنکشنی رشتہ $W = f(z)$ کو گرافی طریقہ سے دکھایا جا سکتا ہے دھیان رکھیے کہ کاشی ریمین رشتے مساوات (4-1) اور (4-2) یہ لازم کردیتے ہیں کہ یہ خطوط ایک دوسرے کے عمودی ہوں۔ مستقلہ ϕ کے خم جنھیں W کی یکے بعد دیگرے قدروں سے حاصل کیا جا سکتا ہے، کسی مسئلہ کے مضمر میدان کا اظہار مانے جا سکتے ہیں اور مطابق خم کو برقی میدان کا اظہار مانا جا سکتا ہے گو کہ آخرالذکر کو عام طور سے بہاؤ خطوط کہتے ہیں۔

سطح کے پار جانے والے برقی میدان کے فلکس کی تعریف اس مساوات سے کی جا سکتی ہے:

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \qquad (4\text{-}4)$$

ایک ایسی سطح لیجیے جو کہ مساوی مضمر خموں $\phi =$ مستقلہ میں سے کسی ایک کی سمت میں دو بہاؤ خم ψ_1 اور ψ_2 کے درمیان واقع ہے اور xy مستوا کے عمودی جس کی اونچائی اکائی ہے۔ اس ثبوت کے مقصد کی خاطر مان لیجیے کہ x, y, z کے بڑھنے کی سمتوں میں i, j, k اکائی ویکٹر کو بتاتے ہیں اور مان لیجیے کہ جیسا شکل 4-1. میں دکھایا ہے، ϕ خم کی سمت میں لمبائی t ہے۔ چونکہ سطح اکائی اونچائی کی ہے $dt = k \times dS$. تب مساوات (4-4)

$$\Phi = \int_1^2 E \cdot dS = -\int_1^2 \nabla\phi \cdot dS = -\int_1^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j\right) \cdot dS.$$

ہو جاتا ہے۔ مساوات (4-1) و (4-2) کو اوپر کے مساوات میں رکھنے پر ہم

$$\Phi = -\int_1^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} i - \frac{\partial\psi}{\partial x} j\right) \cdot dS = -\int_1^2 (\nabla\psi \times k) \cdot dS$$

$$= -\int_1^2 \nabla\psi \cdot dt = \psi_1 - \psi_2. \qquad (4\text{–}5)$$

پاتے ہیں۔ اس طرح دو روانی فنکشنوں ψ_1 اور ψ_2 کا فرق وہ برقی فلکس بتاتا ہے جو دو مستقل خطوط ψ_1 اور ψ_2 کے ذریعہ بنائے گئے اکائی اونچائی والے سیدھے سلنڈروں کے درمیان سے گزرتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ مستقلہ ψ خطوط کو کوئی قوت خطوط نہیں کاٹتے۔ ψ کو روانی فنکشن کہنے کی یہی وجہ ہے کیونکہ دو ابعادی رقیق حرکیاتی مسئلوں میں ψ خطوط ہی رقیق کے روانی خطوط کا خاکہ مہیا کرتے ہیں۔ ہمارے مسئلہ میں ψ کی مختلف مستقل قیمتیں دے کر کھینچے گئے روانی خطوط برقی میدان کا نقشہ بنا دیں گے۔ جبکہ ϕ خطوط ψ میدان کے مساوی مضمر خطوط ہیں۔ دوسری طرف اگر ψ کو مضمر مانا گیا ہوتا تب ϕ روانی فنکشن ہوتا۔ ϕ اور ψ کے معنی کے آپسی تبادلے کا امکان اکثر دو ابعادی مسئلوں کے حل میں کارآمد ہوتا ہے۔

4-2 صلاحیت اور میدانی شدت

اوپر کے خیالات سے ہم ایسے دو چالکوں کے بیچ

صلاحیت فوراً معلوم کر سکتے ہیں جن کے حدود دو مساوی مضمری خطوط ϕ_1 اور ϕ_2 سے منطبق ہیں اور جو دو روانی خطوط ψ_1 اور ψ_2 کے درمیان پھیلے ہوئے ہیں مساوات (1-26) اور Φ کی تعریف

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0.$$

سے صلاحیت کی عبارت مندرجہ ذیل آتی ہے :

$$C = \frac{q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{\epsilon_0 \Phi}{\phi_1 - \phi_2} \qquad (4\text{-}6)$$

چونکہ فلکس Φ روانی فنکشن ψ کی وہ تبدیلی ہے جو زیر غور چالک سطحوں کے کناروں کے بیچ ہوتی ہے، مساوات (4-6)

$$C = \epsilon_0 \frac{\psi_1 - \psi_2}{\phi_1 - \phi_2}. \qquad (4\text{-}7)$$

ہو جاتا ہے۔ دھیان رکھیے کہ ایسا مان لیا گیا ہے کہ سب چارج حدودی ϕ سطحوں پر واقع ہیں۔ اگر چارج میدان میں موجود ہیں۔ عام طور سے روانی فنکشن کثیر قدری ہوگا۔ اگر چالک بند ہیں تو $\psi_1 - \psi_2$ ، ψ کی کثیر قدری کی ناپ ہوگی۔

میدانی شدت کی مطلق قدر کا حساب $W = W(z)$ کے شکل کے ایک معلوم فنکشن کے ذریعہ لگایا جا سکتا ہے جو ایک خاص جیومٹری بتاتا ہے جیسا شکل 4-1 میں ہے۔ W کے مشتق کے ماڈولس کو لیجیے :

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = \left|\frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial y}\frac{dy}{dz}\right|,$$
$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + i\frac{\partial\psi}{\partial y}dy + i\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy\right|\left|\frac{1}{dz}\right|. \qquad (4\text{-}8)$$

کاشی ریمین مساوات کی مدد سے ہم

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = \left|\frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2} = |\nabla\phi| = |\mathbf{E}|. \qquad (4\text{-}9)$$

پاتے ہیں۔ اس طرح dW/dz کے حقیقی اور خیالی حصے بالترتیب مضمر کی ڈھال کے x اور y اجزا ہیں اور اس لیے dW/dz کا ماڈولس برقی میدانی شدت کی قدر کے برابر ہے۔

4-3 یکساں میدان کا مضمر قبل اس کے ہم کچھ ان استحالوں کی جانچ کریں جو پیچیدہ مسئلوں کو سادہ بنانے کے لیے کارآمد ہیں ہم ایک نظر ایسے دو بنیادی مضمروں پر ڈالیں گے جن سے استحالوں اور انطباقوں کے ذریعہ بہت سے عام مسئلے پیدا کیے جا سکتے ہیں۔ سب سے زیادہ آسان مضمر ایک یکساں میدان $\mathbf{E}$ کا ہے جس کی طرف x کی طرف ہے اور جس کے لیے $\phi = -|\mathbf{E}|x$، معائنہ سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ مخلوط مضمر مندرجہ ذیل ہے:

$$W = -|\mathbf{E}|z = -|\mathbf{E}|(x + iy) = \phi + i\psi, \qquad (4\text{-}10)$$

اور روانی فنکشن $\psi = -|\mathbf{E}|y$ (مضمر ϕ کو y محور پر صفر مان لیا گیا ہے) ہے۔

4-4 خطی چارج کا مضمر خطی چارج کثافت q ایک خطی چارج کے چاروں طرف کولوم میدان گاس کے برقی فلکس مصدقہ مساوات (1-26) سے حاصل کیا جا سکتا ہے تکیلیہ کی سطح ایک دائری سلنڈر کی سطح ہوگی جس کا نیم قطر r اور اونچائی اکائی ہے اور جو خطی چارج کا اہم محور ہے۔ اگر چارج سمتی قدروں کے مبدا پر xy مستوا میں مقیم ہے تو میدان یہ ہوگا:

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (4\text{-}11)$$

اس میدان کو مساوات 1-31 میں رکھ کر تکمیل کرنے سے مطابق مضمر پایا جا سکتا ہے۔

$$\phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}(\ln r - \ln r_0). \qquad (4\text{-}12)$$

ہم پھر دیکھتے ہیں کہ دو ابعادی مضمر عبارات میں یہ ممکن نہیں ہے کہ لامتناہیہ پر مضمر کو صفر لے لیا جائے کیونکہ درحقیقت یہ دو ابعادی عبارت ایسے چارج تقسیموں کے مضمروں کا اظہار کرتی ہیں جو xy مستوا کے عمودی سمت میں لامتناہیہ تک پھیلے

ہیں۔ یہ کہہ دینا ضروری ہے کہ ایک دو ابعادی مسئلہ زیادہ سے زیادہ طبیعی حقیقت کے قریب آسکتا ہے کیونکہ اس کے ساتھ نہ صرف لامتناہی وسعت وابستہ ہے بلکہ لامتناہی چارج بھی۔ ایک طبیعی مسئلہ پر دو ابعادی طریقوں کا اطلاق اسی حالت میں کیا جاسکتا ہے جب کہ کناروں کے اثرات کو جو طبیعی ترتیب کی محدود خطی وسعت کی وجہ سے ظہور میں آتے ہیں نظر انداز کرنا ممکن ہو۔ مساوات (4-12) میں خطی چارج کا فاصلہ r_0 پر محیط کرنے والے سلنڈر کا مضمر من چاہے طریقے سے صفر رکھ دیا گیا ہے۔

کسی من مانے نقطہ z_q پر مقیم ایک خطی چارج سے مطابق مخلوط مضمر فنکشن کو کاشی ریمین مساوات کے ذریعے اخذ کیا جاسکتا ہے لیکن یہ صرف ساوات (4-12) کے معائنہ سے آسانی سے لکھا جاسکتا ہے۔ ہم مخلوط ترقیم $z = re^{i\theta}$ اور $z_q = r_q e^{i\theta_q}$ استعمال کریں گے۔ مخلوط مضمر

$$W = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln(z - z_q), \qquad (4\text{–}13)$$

پہ غور کیجیے جس کا مخلوط زوج

$$W^* = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln(z^* - z_q^*),$$

ہے۔ اور اس لیے W حقیقی حصہ ϕ کا مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{W + W^*}{2} \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln[(z - z_q)(z^* - z_q^*)]^{1/2} \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln[r^2 + r_q^2 - 2rr_q\cos(\theta - \theta^*)]^{1/2}.\end{aligned} \qquad (4\text{–}14)$$

یہ مساوات (4-12) سے صاف طور سے مطابقت رکھتا ہے۔ اسی طرح کے تجزیہ سے دیکھا جاسکتا ہے کہ روانی فنکشن مندرجہ ذیل ہے:

$$\psi = \left(\frac{W - W^*}{2}\right) = \theta - \theta_q \qquad (4\text{–}15)$$

خطی چارجوں کے کسی نظام کے لیے مخلوط مضمر فنکشن کو ہر خطی چارج کے لیے مساوات (4-13) کی شکل کی مناسب طور پر ہٹی ہوئی عبارتوں کے انطباق سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

4-8 مخلوط استحالے

اب ہم مخلوط مضمر مستوا کے ایک چھوٹے خطہ میں واقع خموں کے رویے کے تجزیہ کی طرف رجوع کرتے ہیں جب اس مستوا کا استحالہ کیا جاتا ہے۔ ایسے استحالے پر غور کیجیے جو z_1 مستوا سے z_2 مستوا میں بذریعہ مساوات $z_2 = f(z_1)$ کیا گیا ہے اور یہ مان لیجیے کہ تبادل فنکشن ایک محدود تعداد کی ندرتوں کو چھوڑ کر تجزیاتی ہے۔ سبھی غیر نادر نقطوں پر ایسا استحالہ ہم شکل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ z_1 مستوا میں دو قطع کرنے والے خطوط کا درمیانی زاویہ جیسا کہ شکل 4-2(a) میں θ_1 ہے z_2 مستوا میں تبادل شدہ خطوط کے درمیان ایک برابر زاویہ میں تبدیل ہوتا ہے جیسا θ_2 شکل 4-2(b) میں ہے۔ اسے مندرجہ ذیل طور پر دکھایا گیا سکتا ہے چونکہ چونکہ ایک مخلوط متغیرہ کے کسی تجزیاتی فنکشن کے سبھی مشتقات ہوتے ہیں اور مسلسل ہیں اس لیے مشتق dz_2/dz_1 ندرتوں کے علاوہ سب نقطوں پر محدود ہوگا۔ نقطہ P_1 پر کاٹنے والے دو خطی قطعوں کو لیجیے۔ دونوں کے لیے $dz_2/dz_1 = f'(z_1)$ جس کی قدر نقطہ P_1 پر معلوم کی گئی ہے۔ ایک حاصل ضرب کا آرگومینٹ اجزا کے آرگومینٹوں کے جوڑ کے برابر ہے اس لیے تفرقی خطی قطعہ P_2Q_2 کے آرگومنٹ کے لیے ہمیں

$$\arg(dz_2) = [\arg f'(z_1)]_{P_1} + \arg(dz_1), \qquad (4\text{-}16)$$

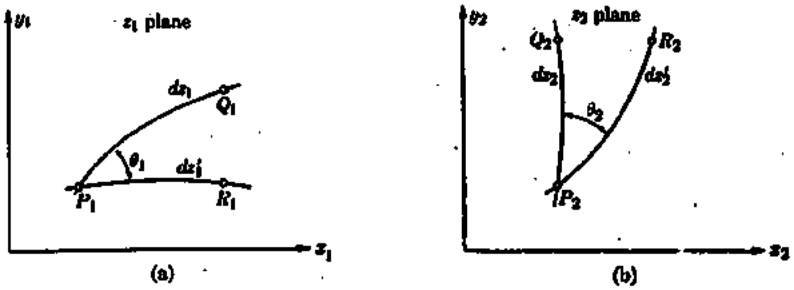
ملتا ہے اور P_2R_2 کے آرگومنٹ کے لیے

$$\arg(dz'_2) = [\arg f'(z_1)]_{P_1} + \arg(dz'_1). \qquad (4\text{-}17)$$

مساوات (4-16) میں سے مساوات (4-17) گھٹانے پر اور یہ دھیان رکھتے ہوئے کہ زاویے θ_1 اور θ_2 متعلقہ dz کے آرگومینٹوں کے فرق ہیں۔

$$\theta_1 = \theta_2. \qquad (4\text{–}18)$$

مشتق $dz_2/dz_1 = f'(z_1)$ کا ماڈولس پیمانے کے اس ضربیے کو بناتا ہے جس سے ایک نقطہ کے پاس کے سب مکانی وقفوں کو ضرب کر دیا جاتا ہے۔ یہ نتیجہ اس حقیقت سے نکلتا ہے کہ ایک حاصل ضرب کا ماڈولس اجزا کے ماڈولسوں کے



(شکل 4-2. یہ دکھانے کے لیے کہ ایک مخلوط استحالے میں زاویے برقرار رہتے ہیں)

ضرب کے برابر ہے۔ اس طرح ایک انتہائی چھوٹا مثلث تبادل کے بعد نئے نظام میں ایک ویسا ہی انتہائی چھوٹا مثلث بن جاتا ہے اور

$$|dz_2| = |f'(z_1)_{P_1}| \cdot |dz_1|. \qquad (4\text{–}19)$$

تبدیل شدہ انتہائی چھوٹے مثلث میں اور اصلی مثلث میں مشابہت یہ دیکھنے کا ایک دوسرا طریقہ مہیا کرتی ہے کہ تجزیاتی مخلوط استحالے میں زاویے برقرار رہتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ مخلوط متغیر پذیر استحالوں میں رواں فنکشنوں اور مساوی مضمروں کے درمیان عمودی رشتہ متغیرہ ہوتا ہے۔

4-6 عام شوارز استحالے

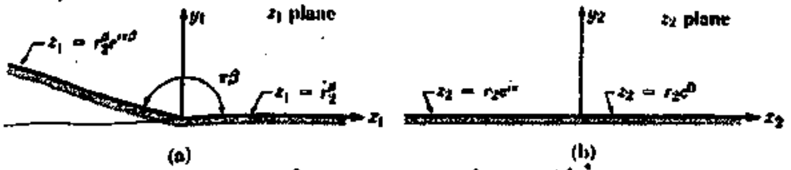
شوارز کا استحالہ ایسا استحالہ ہے جو z_1 مستوا میں سیدھے خطوط والی حدود کی کسی بھی تعداد کو z_2 مستوا میں ایک مفرد سیدھے خط والی حد میں تبدیل کر دیتا ہے۔ شوارز استحالہ z_1 مستوا میں واقع ایک کثیر الاضلاع شکل کے اندر کے

حصّہ کو (چاہے کثیر الاضلاع شکل بند نہ ہو) z_2 مستوا کے اوپری نصف حصّہ میں نقشہ بند کر دے گا۔ اس کی بنیاد ایک از خود مفید مخصوص استحالے پر ہے جو کہ z_1 مستوا میں کسی زاویہ کی جسامت کو جس کی راس مبدا پر ہو بدل دیتا ہے جیسا شکل 4-3 میں دکھایا ہے۔

اس سادہ تبادل کو لیجیے :

$$z_1 = z_2^{\beta} \qquad (4\text{-}20)$$

جہاں β حقیقی ہے لیکن ضروری نہیں ہے کہ وہ کوئی صحیح یا ناطق عدد ہو۔ اس استحالے سے وہ نقطے جو مثبت حقیقی محور پر ہیں مثبت حقیقی محور پر نقشہ بند ہوتے ہیں۔ حالانکہ محور کی سمت میں ان کا پیمانہ z_1 کو $1/\beta$ قوت پر اٹھا دینے سے بدل جاتا ہے۔ یا کم از کم استحالے کی ایک شاخ چنی جا سکتی ہے جہاں ایسا ہو۔ دوسری طرف ان نقطوں کے لیے جو z_2 مستوا میں ($z_2 = r_2 e^{i\pi}$) منفی حقیقی شاخ پر واقع ہیں، z_1 مخلوط ہے چونکہ استحالے کی وجہ سے z_1 برابر ہے $r_2^{\beta} e^{i\pi\beta}$ کے اس لیے z_2 مستوا کی منفی حقیقی شاخ z_1 مستوا میں ایک سیدھے خط کی نقشہ بندی ہے جو کہ استحالے کی ہم شکلی کی صفات کا تقاضا ہے لیکن یہ خط z_1 کے مثبت حقیقی محور سے زاویہ $\pi\beta$ بنائے گا۔ اس لیے مساوات (4-20) کا استحالہ $1 > \beta$ لینے پر z_1 مستوا کے اوپری نصف حصّہ کے اس رقبہ کو جو $\theta_1 = 0$ اور $\theta_1 = \pi\beta$ کے درمیان واقع ہے z_2 مستوا کے سارے اوپری نصف حصّہ میں نقشہ بند کرتا ہے۔



شکل 4-3. ایک مفرد زاویہ کے لیے شوارز استحالہ

شکل 4-4
عام شوارز
استحالہ

θ بیشک ایک سے زیادہ ہوسکتا ہے۔ لیکن اس حالت میں زاویہ زاویہ منفرجہ ہوگا۔ اس استحالہ میں ایک شاخ۔ نقطہ $z_2 = 0$ پر ہے جس پر ظاہر ہے کہ زاویے برقرار نہیں رہتے لیکن اور سب جگہ تجزیاتی ہے۔ شکل 4-4 کی زیادہ عام حالت میں z_1 مستوا میں کسی ایک نقطے b_i ہیں جو ایک کثیرالاضلاع شکل کے کونے ہیں جس کے اندرونی زاویے α_i ہیں۔ ہم کثیرالاضلاع شکل کے اندرون کو z_2 مستوا کے اوپری نصف میں نقشہ بند کرنا چاہتے ہیں۔ ایک استحالے پر غور کیجیے جس کی تعریف نیچے تفرقی مساوات سے ہوتی ہے۔

$$\frac{dz_1}{dz_2} = C_1 \prod_{i=1}^{n} (z_2 - a_i)^{\beta_i}. \qquad (4\text{–}21)$$

یہاں C_1 ایک مستقلہ ہے جو مخلوط بھی ہوسکتا ہے۔ یہ استحالہ سب جگہ تجزیاتی ہے بجز نقطوں $z_2 = a_i$ پر جو حقیقی ہیں لیکن ابھی تک نامعلوم ہیں۔ اس لیے اس طرح کے استحالہ کے ہم شکلی صفات کی وجہ سے حقیقی z_2 محور، $z_2 = x_2$ مستوا z_1 میں سیدھے خطی قطعوں کی نقشہ بندیوں پر مشتمل ہوگی۔ وہ زاویے جنھیں ان سیدھے خطی قطعوں میں سے ہر ایک حقیقی محور سے بناتا ہے dz_1/dz_2 کے آرگومینٹ سے دستیاب ہوں گے جس کی قیمت زیر غور قطعہ میں دریافت کی گئی ہے۔ ہم مساوات (4-21) کا آرگومنٹ لے سکتے ہیں۔

$$\arg\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right) = \arg C_1 + \beta_1 \arg(z_2 - a_1) + \beta_2 \arg(z_2 - a_2) + \cdots + \beta_n \arg(z_2 - a_n). \qquad (4\text{–}22)$$

لیکن چونکہ dz_2 حقیقی ہے

$$\arg\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right) = \arg dz_1, \qquad (4\text{–}23)$$

اس لیے i ویں وقفہ میں قیمت نکالنے پر مساوات (4-23)

$$\arg\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right) = \theta_i. \qquad (4\text{–}24)$$

ہو جاتا ہے ۔ اب جب کہ حقیقی محور پر a_i اور a_{i+1} کے درمیان z_2 واقع ہے z_2 کا آرگومینٹ نفی بائیں طرف کوئی نقطہ صفر ہوگا اور z_2 کا آرگومینٹ نفی داہنی طرف کا کوئی نقطہ π ہوگا ۔ اس لیے مساوات (4-22) اور (4-24) کو ملانے پر ہم اس پر پہنچتے ہیں کہ

$$\theta_i = \arg C_1 + \pi(\beta_{i+1} + \beta_{i+2} + \cdots \beta_n). \qquad (4\text{-}25)$$

اس طرح حقیقی محور کے قطعہ $a_{i+1} - a_i$ کے سب نقطے مستوا میں ایک خطی قطعہ کی نقشہ بندیاں ہیں جس کا ڈھال θ_i ہے ۔ اگر ہم مساوات (4-25) کو θ_{i+1} کے لیے اسی طرح کی عبارت میں سے گھٹا دیں تو ہم پاتے ہیں :

$$\theta_{i+1} - \theta_i = -\pi\beta_{i+1}. \qquad (4\text{-}26)$$

شکل 4-4(a) کی جیومٹری سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ b_{i+1} پر یہ زاویائی فرق $-\pi\beta_{i+1}$ ہر کونے کے اندرونی زاویہ α_{i+1} سے اس رشتہ سے بندھا ہوا ہے ۔

$$_{i+1} = \pi + \pi\beta_{i+1}. \qquad (4\text{-}2i)$$

سہولت کے لیے ہم زیریں نشان کو بدل کر i کر دیں اور β_i کے لیے حل نکالیں ۔

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\pi} - 1. \qquad (4\text{-}28)$$

اس لیے مساوات (4-21)

$$\frac{dz_1}{dz_2} = C_1 \prod_{i=1}^{n} (z_2 - a_i)^{(\alpha_i/\pi - 1)}, \qquad (4\text{-}29)$$

ہو جاتا ہے، جہاں پیمانہ ضربیہ C_1 دونوں جیومٹریوں کا اضافی پیمانہ اور اضافی زاویائی تشرتی دونوں دیتا ہے ۔ یہی ایک α_i اندرونی زاویہ والے کثیر الاضلاع کا دریافت طلب استحالہ ایک کارآمد استحالہ ہے، بشرطیکہ مساوات (4-29) ابتدائی فنکشنوں کے لحاظ سے تکمیل پذیر ہو ۔ مخصوص حالتوں کو چھوڑ کر یہ جب ہی ممکن ہے، جب زاویے 90° کے اضعاف ہوں اور دو سے زیادہ کونے شریک نہ ہوں ۔ شوارز استحالہ کے عملی اطلاق میں ایک اور مشکل یہ ہے کہ اس میں حاصل استحالہ $z_1 = f(z_2)$ کے لحاظ سے ملتا ہے جس میں z_2 مستوا میں حقیقی

محور کی سمت میں سمتی قدریں غیر پابند متغیرہ کے طور پر ہوتی ہیں۔ اس لیے یہ معلوم کرنے کے لیے کہ z_2 مستوا میں سمتی قدریں α_i دیے ہوئے مسئلے کی جیومٹری کے لحاظ سے حقیقت میں کیا ہیں، اکثر بہت حسابی محنت کی ضرورت ہوتی ہے۔ α_i کا ایک بار تعین ہو جانے کے بعد مضمر مسئلہ کے حل کا باقی حصہ عموماً آسان ہوتا ہے کچھ مخصوص سہل مسئلوں پر غور اس طریقے کی طاقت کا اندازہ کرنے اور اس کے استعمال کی وضاحت کا کام کرے گا۔

4-7 یک زاویہ استحالے

ایک مفرد زاویے کا استحالہ ہمیشہ z_2 مستوا کے مبدا میں کیا جا سکتا ہے تاکہ ہر حالت $\alpha_i = 0$

کچھ خاص زاویوں کے لیے مساوات (4-29) کا تکملیہ فوراً نکالا جا سکتا ہے،

(a) $\alpha = \pi$۔ مساوات (4-29) کی تکمیل سے

$$z_1 = C_1 z_2 + C_2. \tag{4-30}$$

ملتا ہے۔ یہ محض ایک یکساں انتقال اور گردش ہے اور کسی طبیعی دلچسپی کا نہیں ہے۔

(b) $\alpha = \pi$, کی تکمیل سے

$$z_1 = C_3 z_2^{1/2} + C_2. \tag{4-31}$$

ملتا ہے۔ اگر ہم مان لیں کہ انتقال کا مستقلہ C_2 صفر ہے تو مساوات (4-31) z_1 مستوا کے پہلے چوتھائی کو z_2 مستوا کے اوپری نصف میں نقشہ بند کرے گا۔ اگر مثال کے طور پر z_2 مستوا میں مخلوط مضمر ایک یکساں میدان E کے مطابق مخلوط مضمر حل سے ملتا ہے تو

$$W = -|\mathbf{E}|z_2 = \phi + i\psi,$$

$$\phi = -|\mathbf{E}|x_2, \quad \psi = -|\mathbf{E}|y_2, \tag{4-10}$$

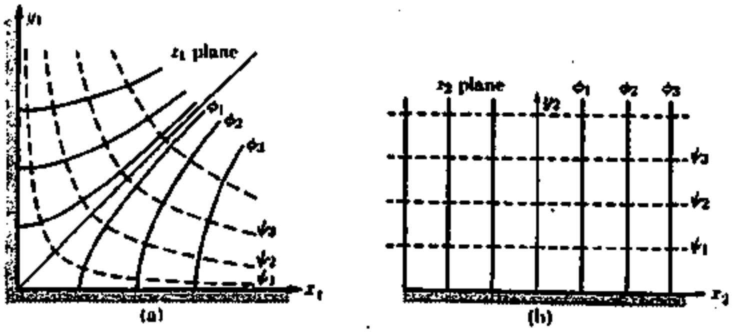
تب z_1 مستوا میں مساوات (4-31) کے مطابق W یہ ہوگا

$$W = -C_4|\mathbf{E}|z_1^2$$

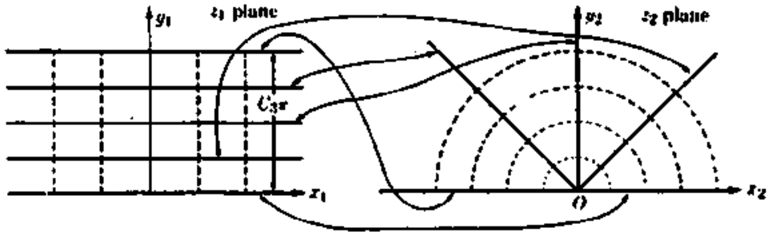
$$= -C_4|\mathbf{E}|(x_1^2 - y_1^2 + 2ix_1y_1),$$

$$\phi = -C_4|\mathbf{E}|(x_1^2 - y_1^2),$$

$$\psi = -C_4|\mathbf{E}|(2x_1y_1).$$



شکل 4-5. $\alpha = \pi/2$ کے لیے شوارز استحالہ



شکل 4-6. $\alpha = 0$ کے لیے شوارز استحالہ

اس کی مدد سے چارج شدہ مستطیلی گھیرے کا حل (دیکھیے شکل (4-5)) مل جائے گا یا اگر ϕ اور ψ کی تفسیروں کی ادل بدل کی جائے تو ایسے مسئلوں کا حل مل جائے گا جو برقائے ہائی پربولی سلنڈروں سے متعلق ہیں۔

اگر z_2 مستوا میں مخلوط مضمر کو ایک خطی چارج کا متعلقہ لاگرتھمی مضمر (مساوات (4-12)) لیا جائے اور پھر مساوات (4-31) کا تبادل عائد کیا جائے تو ہمیں اندرونی مستطیل کونے کا دو ابعادی گرین کا فنکشن ملتا ہے بشرطیکہ ہم نے خطی چارج کو ہٹا کر z_2 ہموار کے اوپر نصف میں پہنچا دیا ہے۔ یہی استحالہ ایسے مسئلہ کے لیے گرین فنکشن دے گا جس کے ہائپربولی سلنڈری حدود ہوں اور اسی طرح اس قسم کی جیامیٹری والے مسائل کا حل نکالا جا سکتا ہے۔

(c) $\alpha = 0$. اس حالت میں تکمیلیہ سے ہمیں

$$z_1 = C_3 \ln z_2 = C_3 \ln r_2 + C_3 i\theta_2, \qquad (4\text{-}32)$$

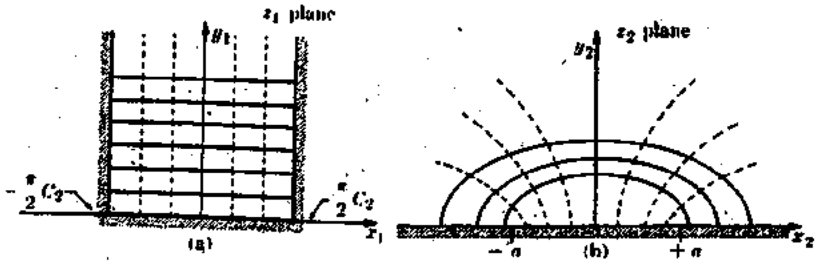
ملتا ہے۔ اگر ہم انتقالی مستقلہ کو چھوڑ دیں۔ اگر C_3 حقیقی ہے تو z_1 کا حقیقی

حصہ $C_3 \ln r_2$ ہے، مثبت حقیقی z_2 محور سارے حقیقی z_1 محور کی نقشہ بندی ہے اور z_2 مستوا کا اوپری نصف ایک $C_3\pi$ چوڑائی کی پٹی میں نقشہ بند ہوتا ہے جیسا شکل 4-6 میں دکھایا ہے اس استحالے کو دیکھنے کے لیے خیال کیجیے کہ z_2 مستوا میں مبدا کو ہٹا کر منفی لا انتہا پر پہنچا دیا گیا ہے اور z_2 مستوا کے منفی حقیقی محور کو ساعت وار گھما کر حقیقی مثبت محور کے متوازی لیکن اس سے اوپر فاصلہ $C_3\pi$ پر مطابق شکل 4-6. لا دیا گیا ہے۔ اس استحالہ کے نتیجہ میں ہمیں ایک دوری شکل z_1 مستوائیں ملتی ہے جس کا پہلا اعادہ $C_3\pi$ چوڑی پٹی ہے۔ z_2 مستوا کا اوپری نصف حصہ z_1 مستوا کی اس تشکیل کی پہلی پٹی کی نقشہ بندی ہے z_2 مستوا کا نیچے کا نصف حصہ z_1 مستوا کی اس پٹی کی نقشہ بندی ہے جو $y_1 = C_3\pi$ اور $y_1 = 2C_3\pi$ کے درمیان واقع ہے وغیرہ۔ یہ استحالہ ایسے مضمر مسئلوں کے حل کے لیے بہت کارآمد ہے جو جالیوں کیپسٹر کی متعدد دہرائی جانے والی پلیٹوں یا ایسی جیومیٹریوں پر جو ایک سمت میں بار بار دہرائی جاتی ہیں مشتمل ہو۔

انتہائی کارآمد ایک سیدھی مثال ہے۔

4-8 کثیر زاویہ استحالے

اگر z_1 مستوا میں واقع دو عمودی خطوط کو گھما کر حقیقی مثبت اور منفی محوروں کی سمت میں کر دیے جائیں تو z_2 مستوا کا اوپری نصف ایک عمودی تشرق والی نصف لا متناہی پٹی کی نقشہ بندی ہوگا جیسا کہ شکل 4-7(a) میں دیکھا جا سکتا ہے۔ دونوں متبادل کونوں کو $\pm a$, $= z_2$ پر لیا جا سکتا ہے اور تفرقی مساوات



یہ ہو جاتا ہے۔

$$\frac{dz_1}{dz_2} = C_1(z_2 - a)^{-1/2}(z_2 + a)^{-1/2} = \frac{C_1}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} = \frac{C_2}{\sqrt{a^2 - z_2^2}} \quad (4\text{–}33)$$

رشتہ $C_1 = iC_2$ اس لیے استعمال کیا گیا ہے جس سے شکل °90 گھما کر دکھائے ہوئے تشرق میں لے آیا جائے تکمیل کرنے سے ہمیں

$$z_1 = C_2 \sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right), \qquad z_2 = a \sin\left(\frac{z_1}{C_2}\right). \qquad (4\text{–}34)$$

ملتا ہے۔ عملاً z_1 مستوا کے ایک حل کو z_2 مستوا میں تبدیل کرنے کے لیے یہ استحالہ سب سے زیادہ موقعوں پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر ہم z_1 مستوا میں ایک یکساں مخلوط مضمر میدان W لیں جہاں

$$W = -|\mathbf{E}|z_1 \qquad (4\text{–}10)$$

جسے z_2 مستوا میں بذریعہ مساوات (4–34) نقشہ بند کیا گیا ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں ایک چارج شدہ $2a$ چوڑی پٹی کے گرد کے مضمر کا عرضی تراش ملتا ہے یا اگر مضمر اور روانی فنکشنوں کو ادل بدل کر دیا جائے تو ایک چالک چادر میں ایک شگاف کے مضمر کا عرضی تراش ملتا ہے۔ شگاف یا پٹی کا بڑا محور شکل 4-7 کے مستوا کے عمودی ہے۔ اگر تبادل شدہ W کے حقیقی اور قیاسی حصوں کو مستقل قدروں کے سٹ دیے جائیں تو وہ ترتیب کے میدان کی نشان دہی کریں گی۔ یہ مساوات ہم فوکس کی اپسی اور ہائپر بولی سلنڈروں کی مساوات ہیں جیسا شکل 4-7 میں دکھایا گیا ہے۔

دو زاویائی استحالوں کی بہت سی اور مثالیں ہیں جو آسانی سے تکمیل پذیر ہوتے ہیں اور جیسا اس باب کے آخر میں دی ہوئی فہرست کے حوالوں میں بتایا گیا ہے اور بھی دوسری مثالیں آسان یکے بعد دیگرے استحالوں سے مل سکتی ہیں۔ اکثر حل ایسی شکل میں آتا ہے کہ اس پر آسان ہونے کا دھوکا ہوتا ہے کیونکہ جیسا ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کبھی کبھی z_2 سمتی قدروں کے لیے z_1 کا فنکشن کے طور پر حل نکالنا بہت مشکل ہوتا ہے۔ ان مشکلات کے ہوتے ہوئے بھی ظاہر ہے کہ یہ طریقہ بڑا طاقت ور ہے۔

۹-۴ ہارمونکوں کے طریقے سے لاپلاس مساوات کا سیدھا حل :

بہت سے دو ابعادی مسئلوں کو ایسے طریقوں سے جن کے لیے تین ابعادی نمونے موجود ہیں کم سے کم اتنی ہی آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے جتنی کہ مخلوط مستمر طریقوں سے ۔ دو ابعادی تقلیب اور شبیہوں کے طریقے پہلے بیان کیے گئے عام طریقوں کی خاص مثالیں ہیں ۔ مستوی قطبی سمتی قدروں کے لیے دو ابعادی لاپلاس مساوات کا متغیروں کو الگ کر کے حل خاص طور سے کارآمد ہے کیونکہ جب کبھی دائری یا نیم قطری حدود سے واسطہ ہوتا ہے تو یہ طریقہ عام طور سے جائز مانا جاتا ہے ۔ آیئے ہم اس طریقہ کے استعمال پر کسی قدر تفصیل سے غور کریں لاپلاس کا مساوات مستوا قطبی سمتی قدروں r اور θ میں

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}=0. \qquad (4\text{–}35)$$

ہے ۔ علیحدگی حاصل کرنے کے لیے ہم $\phi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ رکھتے ہیں اور اس کو مساوات (4–35) میں رکھ کر ϕ سے تقسیم کرتے ہیں ۔ نتیجہ یہ ہے

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}=0 \qquad (4\text{–}36)$$

دونوں ارقام الگ الگ طور پر مستقل ہونی چاہئیں اور ہم فارقی پیرامیٹر کا نشان ایسا چن سکتے ہیں کہ وہ زاویہ θ میں دائری فنکشن دے ۔ چونکہ θ کا پھیلاؤ ہمیشہ محدود ہے ، ایک طرح سے θ کی حدود کو 'بند' سمجھا جا سکتا ہے اور پیرامیٹر کی صرف کچھ ہی قدریں ٹھیک اسی طرح سے جائز ہوں گی جیسے کہ سیکشن 3–6. کی مثال کے پہلے حل میں ۔ دوسرے لفظوں میں ہم مساوات (4–36) کی پہلی رقم کو k_n^2 کے برابر رکھ سکتے ہیں جس سے

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}+k_n^2\Theta=0,$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)-k_n^2R=0, \qquad (4\text{–}37)$$

ملتا ہے۔ جہاں فارقی پیرامیٹر k_n^2 عام طور سے الگ الگ قدروں والا ہی ہو سکتا ہے $k_n \neq 0$ کے لیے حل یہ ہیں:

$$\Theta_n = A_n \cos k_n\theta + B_n \sin k_n\theta,$$

$$R_n = C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n},$$

اور اگر $k_n = 0$,

$$\Theta_0 = E + F\theta,$$

$$R_0 = G + H \ln r.$$

منفرد (ہارمونک) حلوں کے ایک خطی انطباق سے عام حل ملتا ہے:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} R_n\Theta_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n\theta + B_n \sin k_n\theta)(C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n})$$

$$+ (E + F\theta)(G + H \ln r). \qquad (4\text{–}38)$$

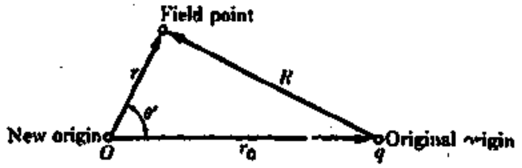
کسی عملی مسئلے کے حل میں مساوات 4-38 کا استعمال کرنے کے لیے ہم کچھ پہلے سے معلوم مضمروں کو اس شکل میں ظاہر کریں گے اور تب اسی عام شکل کے غیر دریافت شدہ ضربیوں والے مزید مضمروں کا انطباق کریں گے۔ دیے ہوئے مسئلے کے حدی شرائط سے ضربیے ٹھیک اسی طرح معلوم کیے جاتے ہیں جیسے فنکشن 3-6 میں۔

4-10 مثال: خطّی چارج اور برق گزار سلنڈر

ایک خطی چارج کو جو نیم قطر a اور مخصوص ترغیبی سمائی κ والے برق گزار سلنڈر کے محور سے فاصلہ r_0 پر بمطابق شکل 4-8 واقع ہے۔ مسئلہ حل کرنے کے لیے ہمیں پہلے صرف خطی چارج کے لاگر تھمی مضمر کو مساوات (4-38) کی شکل میں ظاہر کرنا چاہیے۔ یہ مضمر کے مبدا کو ہٹانے کے برابر ہے جیسا کہ شکل 4-8 میں ظاہر کیا گیا ہے ہم اختیاری حوالہ مضمر کو چھوڑ سکتے ہیں۔ اس طرح مساوات (4-12)

$$\phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln R. \qquad (4\text{–}39)$$

میں تخفیف ہو جاتا ہے، چونکہ مساوات (4-38) مبدا $r = 0$ کو چھوڑ کر عام طور سے غیر نادر ہے مساوات (4-39) کو عام طور سے نئے مبدا کے گرد ایک اکیلے پھیلاؤ کے ذریعہ ظاہر نہیں کیا جا سکتا، بلکہ اسے دو مختلف حلوں کی شکل میں لکھنا پڑے گا ایک جو اس خطہ کے لیے جائز ہے جہاں $r < r_0$ اور دوسرا وہاں جائز ہے جہاں $r > r_0$. یہ دونوں حل $r = r_0$ پر اس طرح سے صحیح بیٹھنے چاہئیں کہ مشتق صرف اس نقطہ پر غیر مسلسل ہو جہاں خطی چارج واقع ہے اور باقی سب نقطوں پر مسلسل ہو۔ یہ عدم تسلسل ایسا ہے کہ اس نقطہ سے نکلنے والا کل فلکس



(شکل 4-8. مضمر کے لیے سمتی قدروں کے بنیادی نقطہ ہٹانا)

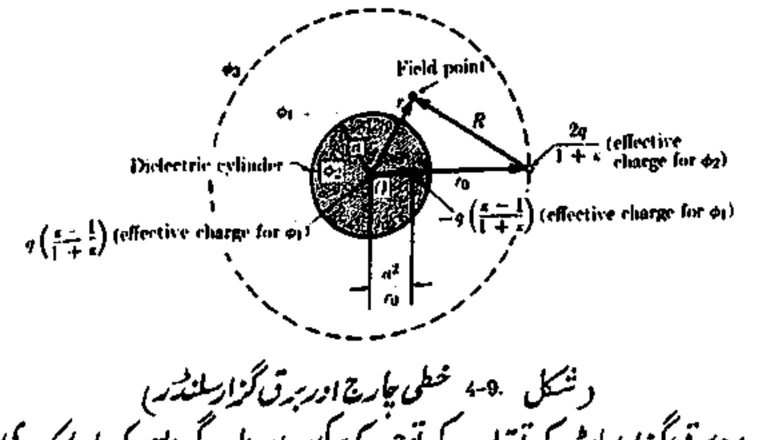
اکائی لمبائی کے خطی چارج کی قدر سے مطابقت رکھتا ہے۔

مبدا پر مقیم ایک خطی چارج کے لاگرتھمی مضمر کے مساوات (4-39) کو شکل 4-8. کے مطابق ایک $\theta = 0$ اور $r = r_0$ پر مقیم تنہا خطی چارج کے مضمر مساوات (4-38) کی شکل میں رکھا جا سکتا ہے اگر ہم نیم قطری فاصلہ R کو کوسائن کے قانون، $R = (r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta)^{1/2}$ کے ذریعہ ظاہر کریں اور نسبت بہ لحاظ r/r_0 ایک قوت سلسلہ میں پھیلائیں جہاں $r < r_0$ کے لیے استعمال کرنا ہے اور جہاں $r > r_0$ ہو وہاں کو ایک قوت سلسلہ میں بہ لحاظ r_0/r پھیلالیں یہ دونوں سلسلے اپنی اس مطابق وسعت کے اندر جہاں پر وہ جائز ہیں مرکوز ہوتے ہیں۔ نتیجہ کے طور پر ہمیں ایک خطی چارج کا مضمر ملتا ہے:

$$\phi_{0<r<r_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n\theta - \ln r_0\right\}, \qquad (4\text{–}40)$$

$$\underset{r_0<r<\infty}{\phi} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\theta - \ln r\right\}. \qquad (4\text{–}41)$$

خطی چارج اور برق گزار سلنڈر کے لیے ہم قطبی آتی تہ مددوں کا بنیادی بسدا برق گزار سلنڈر کے مرکز پر لیں گے اور ہم قطر و یکٹر مطابقتہ $\theta = 0$ چارج میں سے ہو کر گزرے گا جیسا شکل 4-9. میں دکھایا گیا ہے۔ یہ وہی سمتی قدری نظام ہے جس میں مساوات (4–40) اور (4–41) لکھے گئے ہیں۔ اس خاطر کی سلنڈر $r = a$ کی سطح پر حدی شرائط کی پابندی ہو ہم خطی چارج کے حل (4–40) پر مساوات (4–38) کی طرح کے ایک عام حل کا انطباق کریں گے جس میں $k_n = n$ اور جس کے غیر دریافت شدہ ضریبے A_n, B_n, E, F, ہیں اور تب مضمر کو دو حصوں ϕ_1 اور ϕ_2 میں الگ کریں گے جو ترتیب سے سلنڈر کے باہر اور اندر جائز ہیں۔ ضریبوں کا تعین ایسا ہونا چاہیے کہ



(شکل 4-9. خطی چارج اور برق گزار سلنڈر)

وہ برق گزار سلنڈر کی تقطیب کی توجیہہ کرسکیں اور علیحدگی ایسی کی جائے کہ ضروری طور پر مضمر کی قدر بنیادی نقطہ پر محدود ہو اور ہر عبارت کا دوسرا سلسلہ مرکوز ہو۔

$$\underset{a<r<r_0}{\phi_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0\right\}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n}\cos n\theta + F, \qquad (4\text{–}42)$$

$$\underset{0<r<a}{\phi_2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0\right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + E. \quad (4\text{–}43)$$

چونکہ سلنڈر میں ترغیبی تقطیبی چارجوں کا اثر مبدا اور لامتناہیہ دونوں
پر غیر نادر ہے اور حل واضح طور پر خط $\theta = 0$ کے گرد متشاکل ہے اس لیے
لاگر تھم، زاویہ اور اُس کے سائن کو حذف کر کے اور مرکوزیت کے لیے ضروری
r کی صرف مثبت یا منفی قوتوں کا ہی استعمال کر کے عبارت (4-38) کو آسان
بنانا ممکن ہو سکتا ہے۔ کسی زاویہ θ کے لیے جزو 2-2 کی حدی شرائط برق گزار
کی سطح $r = a$ کے لیے صرف

$$\phi_1 = \phi_2, \qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \kappa\frac{\partial\phi_2}{\partial r} \qquad (4\text{–}44)$$

ہیں۔ ان شرطوں کو مساوات (4-42) اور (4-43) پر عائد کر کے اور پھر
$\cos n\theta$ کے ضربیوں کو رقم بہ رقم صفر کے برابر رکھ کر ہم ضربیوں A_n, B_n, E, F
کی قیمت نکال سکتے ہیں۔ یہ طریقہ کار ریاضیاتی نقطہ نظر سے اس حقیقت کی
وجہ سے جائز ہے کہ یہ فوریر سلسلہ کے فنکشن ایک مکمل عمودی سٹ بناتے
ہیں۔ یہ حاصل حل یہ ہے:

$$\underset{a<r<r_0}{\phi_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)\left(\frac{a^2}{r_0}\right)^n\frac{1}{r^n}\right]\cos n\theta - \ln r_0\right\} \quad (4\text{–}45)$$

$$\underset{0<r<a}{\phi_2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0(1+\kappa)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n\theta - \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln r_0 \quad (4\text{–}46)$$

r_0 سے بڑے r کے لیے مساوات (4-40) اور (4-41) کی طرح پر حل فوراً لکھا
جا سکتا ہے، اگر ہم مساوات (4-45) میں

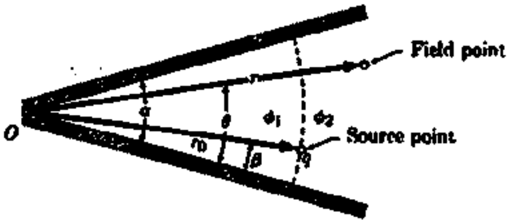
$$q\,\frac{(\kappa-1)}{(1+\kappa)}\,\frac{\ln r}{2\pi\epsilon_0},$$

کو جوڑ کر اور گھٹا کر صفر کا اضافہ کر دیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ سلنڈر کے باہر مضمر Φ_1 ایسے موثر خطی چارجوں کی ترتیب کے مطابق ہو جاتا ہے جس میں سلنڈر کا کردار دو خطی چارجوں کے ذریعہ ادا کیا گیا ہے۔ یہ ترتیب مبدا پر مقیم ایک موثر چارج — $q(\kappa - 1)/(1 + \kappa)$ اور اصل باہری چارج کے تقلیب نقطہ پر مقیم ایک موثر چارج $-q(\kappa - 1)/(1 + \kappa)$ اور اصل چارج پر مشتمل ہے۔ تقلیب نقطہ ویکٹر r_0 پر مبدا سے a^2/r_0 فاصلہ پر واقع ہے۔ اس لیے اس مسئلے کو شبیہوں کے طریقے سے حل کیا جا سکتا تھا جو ایک ایسی حقیقت ہے جس کی لاگرتھمی مضمروں کا براہِ راست استعمال کر کے تصدیق کی جا سکتی ہے۔ دوسری طرف یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ سلنڈر کے اندر کا مضمر Φ_2 حقیقی چارج کے مقام پر واقع ایک واحد موثر چارج $2q/(1 + \kappa)$ سے ہے بجز ایک جمعی مستقلہ کے مطابقت رکھتا ہے۔ اس طرح سب جگہوں پر مضمر کسی خطی چارج کی ترتیب کے مترادف ہے جب کہ برق گزار سلنڈر موجود نہ ہو۔

4-11 خطی چارج جو دو چالکوں کے بیچ کے زاویہ میں واقع ہے

دائری ہارمونکس کے لحاظ سے کسی مسئلہ کے حل کی دوسری مثال کے طور پر آیئے ہم ایک پچڑ کی شکل کے خطہ کو لیں جو زمین سے جڑی چالک سطحوں سے گھرا ہے جو مبدا پر اندرونی زاویہ α بناتی ہوئی بمطابق شکل 4-10 ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں اور ساتھ ہی ایک خطی چارج بھی لیں جس کی طاقت فی اکائی لمبائی q ہے اور جو زاویہ کے اندر نقطہ (r_0, β) پر واقع ہے۔ اس مسئلے کا حل ہمیں قطع کرنے والے چالک مستوا سے گھرے خطّے کے لیے گرین فنکشن دے گا۔ ایک بار یہ پھر واضح ہے کہ ہم ایک واحد مساوات کے ذریعے جو سارے خطہ میں $r = 0$ سے $r = \infty$ تک جائز ہو حل کو ظاہر کرنے کی امید نہیں کر سکتے۔ اس لیے حل کو دو حصوں میں لکھنا ہوگا۔ ایک جو $r < r_0$ کے لیے جائز ہے اور دوسرا جو $r > r_0$، کے لیے جائز ہے۔ یہ دونوں حل سلنڈری سطح $r = r_0$ پر چارج q کے مطابق فلکس کی شرط سے جڑے ہوں گے۔

چونکہ مضمر سطح $\theta = 0$ اور $\theta = \alpha$ پر صفر غائب ہو جاتا ہے اس لیے حل کا زاویائی حصہ $\sin\,(n\pi\theta/\alpha)$ کی فنکشن کا ہونا چاہیے :



(شکل 4-10. دو قطع کرنے والے مسطح چالکوں کے متوازی خطی چارج)

اس طرح مساوات (4-38) میں $k_n = n\pi/\alpha$ ، اور تب مضمر قاعدے کے مطابق یہ ہوں گے :

$$\underset{r<r_0}{\phi_1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha}\,\theta,$$

$$\underset{r>r_0}{\phi_2} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha}\,\theta. \qquad (4\text{-}47)$$

اس کی ضمانت کے لیے کہ سلنڈری سطح $r = r_0$ کے آر پار مضمر مسلسل ہو ضروری ہے کہ C_n اور D_n برابر ہونا چاہیے۔ اس لیے اگر ہم C_n معلوم کر لیں تو مسئلہ حل ہو گیا۔

خطی چارج سلنڈر $r = r_0$ پر واقع ایک سطحی چارج $\sigma(\theta)$ کے مرادف ہے جہاں $\sigma(\theta) = q\,\delta(\theta - \beta)$ زاویائی δ فنکشن کی تعریف ان مساوات سے کی جا سکتی ہے :

$$r_0 \int_0^{\alpha} \delta(\theta - \beta)\, d\theta = 1,$$

$$\int_0^{\alpha} f(\theta)\, \delta(\theta - \beta)\, d\theta = f(\beta)/r_0, \quad 0 < \beta < \alpha. \qquad (4\text{-}48)$$

اس طرح فلکس کی شرط یہ ہے :

$$q\,\delta(\theta - \beta) = -\epsilon_0 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right]_{r=r_0} \qquad (4\text{-}49)$$

ضربیوں کا تعین تقریباً جز 3-6 کے مماثل ہے اور یہیں

$$C_n = \frac{q}{n\pi\epsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right) \qquad (4\text{-}50)$$

ملتا ہے اس لیے پورا حل یہ ہے:

$$\underset{r<r_0}{\phi_1} = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n\pi/\alpha} \sin\frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin\frac{n\pi\theta}{\alpha},$$

$$\underset{r>r_0}{\phi_2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n\pi/\alpha} \sin\frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}. \qquad (4\text{-}51)$$

ٹھیک متوازی پلیٹوں والی حالت کسی طرح یہ حل مطلوبہ گرین کا فنکشن ہے جب q کو اکائی کے برابر رکھ دیا جائے۔ اس طرح یہ صاف ظاہر ہے کہ یہ طریقہ برابر سمتی قدروں والے مستوا کے مطابق حدود کے ایک سٹ کے اندر گرین فنکشن اخذ کرنے کے لیے ایک عام طریقہ ہے۔

مجوزہ حوالے

W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity.*

باب IV میں دو ابعادی مضمر مسئلے بہت سی مثالوں کے ساتھ دیے ہیں۔

J. C. Maxwell, *Electricity and Magnetism,* Vol. 1.

مضمر نظریے میں میکسویل کے وقت سے اب تک بہت سی کارپردازیاں ہوئی ہیں لیکن یہ اب تک بنیادی تصانیف میں ایک بہترین کتاب ہے۔

J. H. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.*

میکسویل کا عام طرز بیان اپنایا ہے اور بہت سی مثالیں دی ہیں۔

E. Weber, *Electro-Magnetic Fields,* Vol. 1 — ایک زیادہ جدید پیشکش

L. A. Pipes, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists.*

باب XX زوج فنکشنوں کے واضح اور سادہ طرز بیان کی اچھی مثال
ہے جو اطلاقی ریاضیات کی متعدد کتابوں میں ملتی ہے

H.B. W. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics.*

ہم شکل اظہار سے باب 13 خاص طور سے کارآمد ہے
ہم شکل نقشہ بندی اور متعلقہ وجودی مقالوں کا بیان ہے

R. COURANT, *Dirichlet's Principle.*

مشقیں

1. ۔ ایک خطی چارج کے لیے جو ایک چالک دائری سلنڈر کے متوازی ہے تقلیب کے ذریعہ شبیہہ بننے کا قانون دریافت کیجیے۔ اس طریقے کو ایک b نیم قطر والے بڑے سلنڈر پر عائد کیجیے جس کے اندر ایک نسبتاً چھوٹا سلنڈر ہے جبکہ دونوں محوروں کے بیچ فاصلہ $c < b - a$ ہے۔ فی اکائی لمبائی صلاحیت معلوم کیجیے اور دکھائیے کہ $c = 0$ کے لیے نتیجہ وہی ہو جاتا ہے جو ہم محوری سلنڈروں کے لیے ہے۔

2. ۔ گرین کے جذری قدر نظریہ کی دو ابعادی شکل کو اخذ کیجیے: اگر $\phi(x, y)$ دو ابعادی مضمر ہو تو دکھائیے کہ

$$\phi(x', y') = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_S (\log r)\, \nabla^2\phi\, dS - \oint_c \left(\log r \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial (\log r)}{\partial n}\right) dl\right\}$$

جہاں S وہ رقبہ ہے جو خط c سے گھرا ہوا ہے اور نقطہ x, y اور نقطہ x', y' کے درمیان فاصلہ r ہے۔ n باہری سمت میں عمودی ہے۔

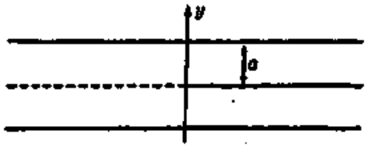
3. ۔ ایک چارج شدہ چالک سلنڈر کے جس کا عرضی تراش ایک ایلپس ہے چاروں طرف کا میدان دریافت کیجیے۔

4. ۔ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرنے والے دو مستوا لیجیے جن کے مضمر ترتیب سے $V/2$ اور $-V/2$ ہیں۔ برق سکونی میدان کا حساب لگائیے۔

5. - استحالہ

$$z_2 = \frac{a}{2}\left(\frac{z_1}{a_1} + \frac{a_1}{z_1}\right)$$

کے ذریعے z_1 مستوا کا وہ خط جو سلنڈر $r_1 = a_1$ کے باہر ہے پورے z_2 مستوا میں تبادل ہوجاتا ہے جس میں $-a < x < a$. کے لیے حقیقی محور پر ایک شگاف ہوتا ہے۔ ایک یکساں میدان میں واقع ایک چالک سلنڈر کے مخلوط مضمر فنکشن کو تبادل کر کے ایک $2a$ چوڑی پٹی کا مخلوط مضمر فنکشن معلوم کیجیے (a) جب کہ پٹی کا مستوا عائد میدان E_0 کی سمت میں ہے (b) عائد میدان E_0 کے عمودی ہے۔



(شکل 4-11)

6. - ایک لامتناہی وسعت والا متوازی پلیٹوں کا کپیسٹر $y = \pm a$, لیجیے اور پلیٹ $y = 0$ نیم لامتناہی ہے، جیسا شکل 4-11. میں دکھایا ہے۔ دونوں باہری پلیٹیں ایک ہی مضمر پر ہیں z کی سمت میں فی اکائی لمبائی صلاحیت کا حساب لگائیے جو کناروں کے اثرات کی وجہ سے ہے یعنی وہ فرق جو اکائی کی واقعی صلاحیت میں اور اس صلاحیت میں ہے جس کا تخمینہ $x < 0$ کے لیے صفر میدان اور $x > 0$. کے لیے یکساں میدان مان کر لگایا گیا ہے۔

7. - ایک لامتناہی دائری سلنڈری چادر جس کا نیم قطر a ہے طولی سمت میں چار برابر حصوں میں تقسیم کر دی گئی ہے جن کے مضمر بالترتیب $V, 0, -V, 0.$ ہیں۔ دکھائیے کہ سلنڈر کے اندر مضمر ϕ ہے جہاں

$$\phi = \frac{V}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2ay}{a^2 - r^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2ax}{a^2 - r^2}\right)\right\}.$$

باہر مضمر کیا ہے؟

8. - فضا کے اس حصے پر غور کیجیے جو سلنڈر $x^2 + y^2 = b^2$ اور

== مستوا کے درمیان ہے۔ ساری خمیدہ حد اور ہموار حد کا وہ حصّہ جس کے لیے $a < |z| < b$ صفر مضمر پر ہیں۔ ہموار حد کا وہ حصّہ جس کے لیے $-a < |z| <$ مضمر V پر ہے۔ دکھائیے کہ قوت خطوط کا مساوات اس خطّہ میں جس کے لیے $a < r < b$ ہے ایہ ہے

$$\sum_n \frac{a^n}{n}\left[\frac{1}{r^n} + \left(\frac{r}{b^2}\right)^n\right]\cos n\theta = \text{مستقلہ}$$

9. ۔ مان لیجیے کہ ایک دو ابعادی میدان میں مضمر $\phi(x, y)$ ہے ۔ مان لیجیے کہ $F(x) = \phi(x, 0)$ اور F_n، F کا n واں مشتق بہ لحاظ x ہے دکھائیے کہ اگر $\phi(x, y) = \phi(x, -y)$ تو

$$\phi(x, y) = \Sigma A_n y^{2n} F_{2n},$$

جہاں ! $A_n = (-1)^n/(2n)!$

باب (5)

سہ ابعادی مضمر مسائل

لاپلاس کے مساوات کو آسانی کے ساتھ کسی بھی عمودی سمتی قدری نظام میں لکھا جاسکتا ہے جس کے انتہائی چھوٹے خطی قطعوں کا علم ہو۔ آپریٹر ∇^2 محض گریڈینٹ کا ڈائیورجنس ہے اور ایک انتہائی چھوٹے حجمی قطعہ کی سطح پہ کے گریڈینٹ پر ڈائیورجنس مصدقہ عائد کرنے سے مطلوب عبارت مل جاتی ہے۔[1] ان نظاموں میں سے کئی ایک میں مساوات الگ کیا جا سکتا ہے جس سے اس سکشن 3-6 کے طریقے استعمال کیے جاسکتے ہیں۔ وہ دو سمتی قدری نظام جن کا اس باب میں ذکر ہے عام طریقے کی مزید مثال مہیا کرتے ہیں۔ ور ایسی جیاٹریائی تشکیلوں سے مطابقت رکھتے ہیں جو عملی طور پر اکثر سامنے آتی ہیں یعنی کرے اور دائری سلنڈر یا ان کے حصّے کروّی سمتی قدریں بھی مبدا کے نزدیک کسی خط میں مقید کسی بھی اختیاری تقسیم چارج سے پیدا مضمر کا ایک مفید اظہار مہیا کرتی ہیں۔

5-1 لاپلاس کے مساوات کا کروّی سمتی قدروں میں حل

کروی قطبی سمتی قدروں میں ظاہر کرنے پر لاپلاس کا مساوات مندرجہ ذیل شکل اختیار کرلیتا ہے۔

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{5-1}$$

(1) دیکھیے ضمیمہ III

اس مساوات کے نیم قطری اور زاویائی حصّوں کو الگ کرنے کے لیے ہم

$$\phi = R(r)Y(\theta, \varphi) \qquad (5\text{–}2)$$

رکھتے ہیں اور حسبِ معمول آگے بڑھتے ہیں۔ الگ کے مساوات یہ ہیں :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) - n(n+1)R = 0, \qquad (5\text{–}3)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\,Y = 0. \qquad (5\text{–}4)$$

فارقی مستقلہ $n(n+1)$، کی یہ شکل جس میں n ایک حقیقی ہندسہ ہے اس ضرورت کی وجہ سے لینا پڑی ہے کہ Y کے لیے مساوات کی مندرجہ ذیل قطبوں پر جو $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ پر آتے ہیں[1] باقاعدہ حل مل سکیں۔ عام طور سے $Y(\theta, \varphi)$ ایک کروی ہارمونک کہلاتا ہے۔ یہ پہلے ثابت کیا جا چکا ہے کہ $Y_n(\theta, \varphi)$ فنکشنوں کا سٹ فوریر فنکشنوں کی طرح جن پر ہم نے دو ابعادی حلوں کے سلسلے میں غور کیا تھا۔ عمودی ہونے کی صفات رکھتے ہیں۔ ϕ کے نیم قطری حصے کے لیے تفرقی مساوات (5–3) کا عام حل صرف یہ ہے :

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}. \qquad (5\text{–}5)$$

کروی سطحی ہارمونکس کو حسبِ ذیل بدل کے ذریعہ مزید الگ کیا جا سکتا ہے۔

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi). \qquad (5\text{–}6)$$

اگر نئے فاصل مستقلہ کو m^2 کہیں تو زیادہ سہولت کے قطبی زاویائی متغیرہ $\mu = \cos\theta$ کے لحاظ سے، دو حاصل ہوئے مساوات مندرجہ ذیل ہوں گے :

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]\Theta = 0, \qquad (5\text{–}7)$$

---

[1] اگر حدود ایسی ہیں کہ $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ (یعنی قطبی محور) شامل نہیں ہیں تو n کا عدد صحیح ہونا ضروری نہیں ہے۔

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0. \tag{5-8}$$

ان مساوات کے حل یہ ہیں :۔

$$\Theta = C_n P_n^m(\mu) + D_n Q_n^m(\mu). \tag{5-9}$$

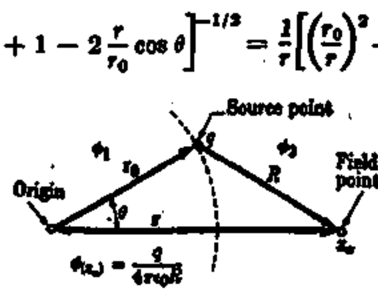
$$\left.\begin{aligned} \Phi &= E_m \cos m\varphi + F_m \sin m\varphi, & m \neq 0, \\ \Phi &= G\varphi + H, & m = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5-10}$$

فنکشن P_n^m اور $Q_n^m(\cos\theta)$ بالترتیب پہلے اور دوسرے قسم کے متلازم لیجنڈر فنکشن ہیں ان کے ریاضیاتی اوصاف بہت سے حوالوں میں مل سکتے ہیں جن میں سے کچھ اس باب کے آخر میں دیے گئے ہیں، یہاں ہمیں صرف یہ کہنے کی ضرورت ہے کہ P_n^m وہ حل ہے جو $\mu = \pm 1,$ کے لیے محدود ہے اس طرح سے یہ اس حالت میں واحد جائز حل ہے جب کہ مسئلہ سے متعلقہ خطے میں قطبی محور شامل ہو۔

5-2 ایک نقطہ چارج کا مضمر

ایسے مسئلوں کے حل کے لیے جن میں سمتی تشاکل ہو تاکہ حل سمتی قدر کی قیمت پر منحصر نہ ہو یعنی مستقلہ $= \Phi(\varphi)$ ہو تو فاصل متغیرہ m صفر کے برابر ہوتا ہے۔ سمتی قدروں کے مبدا سے فاصلہ r_0 پر ایک نقطہ چارج کا مضمر ایسا ہی تشاکل رکھتا ہے اگر چارج کا نیم قطر ویکٹر قطبی محور کو لیا جائے تو $1/R$ کے (دیکھیے شکل (5-1)) کوسائن قانون کی عبارت کو r/r_0 اور r_0/r کی قوتوں میں پھیلا کر ہم ایک نقطہ چارج کا مضمر دستیاب کر سکتے ہیں جس کا اظہار اوپر کی سمتی قدروں کے الگاؤ میں پائے گئے نیم قطری و زاویائی فنکشنوں میں ایک سلسلہ کے پھیلاؤ کے لحاظ سے ہوگا۔

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 1 - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + 1 - 2\frac{r_0}{r}\cos\theta\right]^{-1/2} \tag{5-11}$$



[شکل 5-1 ایک نقطہ چارج کے مضمر کے لیے نئی قطبی سمتی قدریں]

مرکوزیت کے خطّ کے مطابق ہوجاتا ہے۔

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\mu) = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\mu). \qquad (5\text{-}12)$$

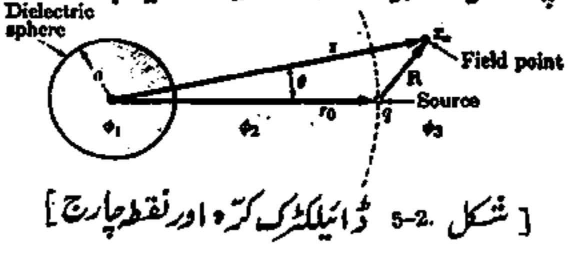
مساوات (5-12) کو اکثر $P_n(\mu)$ کی تعریف مانا جاتا ہے۔ پھیلاؤ کا عمل کرنے سے یہ صاف ظاہر ہوجاتا ہے کہ یہ فنکشن متغیرہ μ میں n ڈگری کے پولی نامیل ہیں۔ μ کے لحاظ سے، اور پھیلاؤ کے متغیرہ کے لحاظ سے $1/R$ کے تفرق سے یہ آسانی سے دکھایا جاسکتا ہے کہ $P_n(\mu)$ مساوات (5-7) کی پابندی کرتا ہے اگر $m = 0$ ہو۔ انھیں وجوہات سے جز باب 4 کے ہارمونک پھیلاؤ میں تھے ہمیں دو مضمر استعمال کرنے پڑیں کے ایک اس جگہ جائز ہوگا جہاں r کی قدر r_0 سے کم ہے اور دوسرا جہاں r_0 سے r زیادہ ہے اس طرح دو مضمر ہوں گے:

$$\underset{r<r_0}{\phi_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\mu), \qquad \underset{r>r_0}{\phi_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\mu) \qquad (5\text{-}13)$$

اس لیے نقطہ چارج کا نتیجہ کے طور پر ملا مضمر محض r میں ٹیلر لارینٹ پھیلاؤ ہے جس کے ضریبے $\cos\theta$ میں لیجنڈر پالینامیل ہیں۔

5-3 ایک ڈایلکٹرک کرہ اور نقطہ چارج کا مضمر

نقطہ چارجوں اور کروی تشاکل رکھنے والے حدود پر مشتمل مسائل پچھلے جز کے نتائجوں کے لحاظ سے حل کیے جاسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم ایک نقطہ چارج اور a نیم قطر کے ایک ڈائیلکٹرک کرہ کے آسان مسئلہ پر غور کریں گے جیسا شکل 5-2 میں دکھایا ہے



[شکل 5-2 ڈائیلکٹرک کرہ اور نقطہ چارج]

جہاں r_0 کرہ کے مرکز سے نقطہ چارج کا فاصلہ ہے۔ ہمیں ϕ کے تین عبارتوں کی ضرورت ہوگی:

$$\underset{0<r<a}{\phi_1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu),$$

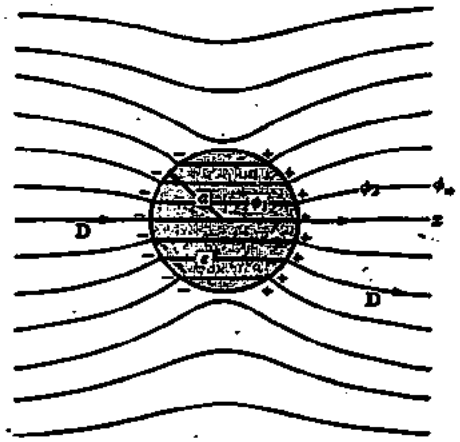
$$\underset{a<r<r_0}{\phi_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu) \qquad (5\text{–}14)$$

$$\underset{r_0<r<\infty}{\phi_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu).$$

$r = a$ پر ϕ_1 کا ϕ_2 کے ساتھ میل اسی طرح بٹھایا جا سکتا ہے جیسا کہ دو ابعادی مسئلہ میں۔ مساوات (2-15) اور (2-19) کی حدودی شرائط زاویہ θ کی سب قیمتوں کے لیے مانی جائیں گی اور اس حقیقت کے پیش نظر کہ زاویائی فنکشن آرتھوگونل ہیں یہ ممکن ہو جاتا ہے کہ ضربیوں A_n اور B_n کی قیمتیں نکالنے کے لیے سلسلے کی رقموں کو الگ الگ برابر رکھا جائے۔ مساوات (5-13) کے حلوں کی فطرت سے ϕ_2 کا ϕ_3 سے میل ناگزیر ہے۔ $\kappa = \infty$ کے لیے حل وہی ہو جاتا ہے جو باب 3 میں بتائے تقلیبی طریقے سے ملا تھا۔

5-4 یکساں میدان میں ایک ڈائیلکٹرک کرّہ کا مضمر

کروی جیامٹری والے مسئلے کی دوسری مثال کے طور پر آیئے ہم نوعی ترغیبی سمائی κ کا ایک ڈائیلکٹرک کرّہ ایک یکساں میدان کی موجودگی میں لیں جس کے قوت خطوط z محور کے متوازی ہیں جیسا شکل 5-3 میں دکھایا ہے۔ برقی نقل D کے خطوط یہاں دکھائے گئے ہیں:



[شکل 5-3. ڈائیلکٹرک کرہ ایک یکساں میدان میں]

چونکہ لامتناہیہ پر میدان یکساں ہوتا ہے، اس لیے مضمر مندرجہ ذیل عبارت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے ۔

$$\phi_\infty = -E_0 x = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r\mu = -E_0 r P_1(\mu) \qquad (5\text{-}15)$$

مساوات (5-5) اور (5-9) کے معائنہ سے ہم کرے کے اندر اور باہر کے مضمروں کے لیے لکھ سکتے ہیں کہ

$$\phi_1 = \sum A_n r^n P_n(\mu),$$

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu) = E_0 r P_1(\mu), \qquad (5\text{-}16)$$

زاویہ کی سب قیمتوں کے لیے $r = a$ پر حدودی شرائط $\phi_1 = \phi_2$ اور $\kappa(\partial\phi_1/\partial r) = (\partial\phi_2/\partial r)$ کی پابندی ضروری ہے۔ اس لیے ہم اسی n، کے لیے $P_n(\mu)$ کے ضربیوں کو برابر رکھ کر مستقلوں A_n اور B_n کی قیمتیں نکال لیتے ہیں اور پاتے ہیں کہ

$$A_0 = B_0 = 0 = A_n = B_n$$ جب n ایک سے زیادہ ہو

$$A_1 = \frac{-3E_0}{\kappa + 2},$$

$$B_1 = \frac{(\kappa - 1)E_0 a^3}{\kappa + 2}. \qquad (5\text{-}17)$$

چنانچہ مضمر اس طرح لکھے جاسکتے ہیں:

$$\phi_1 = -\frac{3E_0 r}{\kappa + 2}\cos\theta,$$

$$\phi_2 = \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa + 2)}\frac{E_0 a^3 \cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta. \qquad (5\text{–}18)$$

$r_0 \to \infty$ کی حد میں یہ مساوات (5-14) مساواتوں سے مطابقت رکھتے ہیں۔ دھیان رکھیے کہ کرّہ کے اندر کا میدان E یکساں ہے لیکن لامتناہیہ کے میدان سے $3/(\kappa + 2)$ کی نسبت سے چھوٹا ہے۔ یہ بھی دیکھا جاسکتا ہے کرّہ کے باہر کے خطے میں کرّے کا ترغیبی میدان ایسے دو قطبہ کا میدان ہے جس کا گردشہ

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}\right)E_0. \qquad (5\text{–}19)$$

ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک مقدار L جسے ایک ڈائیلکٹرک جسم کا بے قطبیتی جبر کہتے ہیں کی تعریف اس طرح ہے؛

$$\frac{L}{\epsilon_0} = \frac{|E_0| - |E|}{|P|} \qquad (5\text{–}20)$$

یہ یاد ہوگا کہ مساوات (2-12) سے $P = \epsilon_0(\kappa - 1)E$, اس لیے ایک کرّہ کے لیے $L = \frac{1}{3}$, جب کہ ایک پتلے چھڑ کے لیے جو میدان متوازی ہے $L \simeq 0$, اور ایک پتلے ڈسک کے لیے جس کی تشریق میدان کے عمودی ہے $L = 1$. اس لیے ایک یکساں میدان میں واقع ایک ڈائیلکٹرک جسم کے اندر کا میدان بڑے فاصلہ پر کے میدان سے ہمیشہ کم ہوگا جبکہ ڈائیلکٹرک نقل ہمیشہ زیادہ ہوگی۔

5-5 اختیاری محور کے گرد متشاکل کرّوی مضمر تقسیم کا مضمر

a نیم قطر کے کرّے کے اوپر کسی دیے ہوئے مضمر تقسیم $\phi(a, \theta)$ کی وجہ سے فضا کے کسی نقطہ پر مضمر کو لیجنڈر پالینامیلوں کے ذریعے سے

لکھا جاسکتا ہے، مساوات (5-5) اور (5-9) سے ہمیں دو مضمر ملیں گے ایک جو سطح کے اندر جائز ہوگا اور دوسرا سطح کے باہر۔

$$\underset{r<a}{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu),$$
$$\underset{r>a}{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu). \qquad (5\text{-}21)$$

ہم فنکشنوں $P_n(\mu)$ کے آرتھوگونل ہونے کا فائدہ اٹھاکر A_n اور B_n معلوم کرسکتے ہیں اگر ہمیں نارمل کاری جز معلوم ہو یعنی P_n^2 کا اینٹگرل اپنے متغیرہ کے پورے پھیلاؤ کے لیے معلوم ہو، دریافت طلب اینٹگرل جسے اس طرح عام طریقہ بیان کیا گیا ہے کہ آرتھوگونلٹی کی صفات شامل ہوں یہ ہے:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \qquad (5\text{-}22)$$

جہاں $\delta_{mn} = 1$ اگر $m = n$، اور اس کے علاوہ حالت میں صفر ہے۔

(5-21) کی دونوں مساواتوں میں سے کسی کو $r = a$ کے لیے $\phi(a, \theta)$ کے برابر رکھا جاسکتا ہے اور ملے ہوئے مساوات کو $P_m(\mu)$ سے ضرب کرکے $\mu = -1$ سے $\mu = +1$; تک کے لیے تکمیل کیا جاسکتا ہے سلسلے کی صرف ایک رقم باقی رہ جاتی ہے۔ یعنی وہ جس کے لیے $n = m$ سے A_n کا حل نکالنے کے نتیجے کے طور پر

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^{+1} \phi(a, \theta) P_n(\mu)\, d\mu \qquad (5\text{-}23)$$

اور

$$B_n = a^{2n+1} A_n \qquad (5\text{-}24)$$

اس لیے مضمر کی عبارتیں مندرجہ ذیل ہو جاتی ہیں:

$$\underset{r<a}{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2a^n} r^n P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} \phi(a, \theta') P_n(\mu')\, d\mu',$$

$$\underset{r>a}{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} a^{n+1} r^{-n-1} P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} \phi(a, \theta') P_n(\mu')\, d\mu' \qquad (5\text{-}25)$$

5-6 ایک چارج شدہ چھلّے کا مضمر

آیئے ہم ایک چارج شدہ چھلّے کے مضمر پر غور کریں جس کا کل چارج q ہے اور جو مبدا سے فاصلہ r_0 پر بمطابق شکل 5-4. واقع ہے جب کہ r_0 تشاکل کے محور سے زاویہ θ_0 بناتا ہے۔ اگر مبدا سے قطبی محور کی سمت کے فاصلے کو z کہا جائے، تو قطبی محور پر کا مضمر جو $1/R$ کو کولوم مضمر میں بذریعہ مساوات (5-13) پھیلانے پر ملتا ہے یہ ہے:

$$\underset{r<r_0}{\phi}(z, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta_0),$$

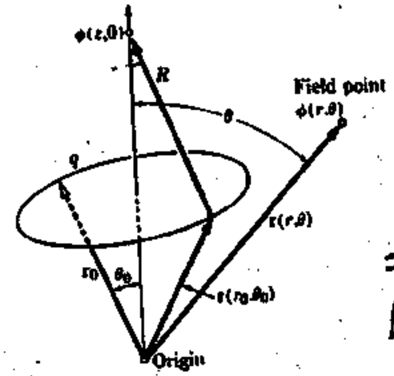
$$\underset{r>r_0}{\phi}(z, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{z}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_0) \qquad (5\text{-}26)$$

مساوات (5-12) کے سلسلے سے ظاہر ہے کہ $P_n(1) = 1$. اس لیے کسی عام نقطہ کے لیے جو قطبی محور پر واقع نہیں، یہ مضمر اس طرح مل سکتا ہے کہ سلسلے کی n ویں رقم کو $P_n(\mu)$ سے ضرب کر کے z کی جگہ r لکھ دیا جائے۔

$$\underset{r<r_0}{\phi}(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta_0) P_n(\cos\theta),$$

$$\underset{r>r_0}{\phi}(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_0) P_n(\cos\theta) \qquad (5\text{-}27)$$

جس دلیل سے اوپر کا نتیجہ ملا ہے اسے جائز ٹھہرانے کے لیے واحدیت کا نظریہ ضروری ہے۔



[شکل 5-4. ایک چارج شدہ چھلّے کی وجہ سے مضمر کو دریافت کرنے کے لیے سمتی قدریں]

5-7 وہ مسائل جن میں محوری تشاکل نہیں ہے

اگر کسی مسئلہ کی جیامٹری میں محوری تشاکل نہیں ہے لیکن اس کے حدود کروی ہیں تو ایسے مسئلہ کے مضمر حلوں کو ٹھیک اسی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جیسا اوپر کے مسئلوں میں۔ غیر تشاکل ظاہر کرنے کی غرض سے ضروری ہوگا کہ مستقلہ m صفر سے مختلف قیمتیں لے، کروی ہارمونکس $Y_n^m(\theta, \varphi)$ میں پیرامیٹر ہوتے ہیں، اور سلسلوں والا حل ایک دوہرا جوڑ ہوتا ہے؛ ہر n کے لیے کی قیمتوں کا ایک سیٹ ہوگا اس شرط کے ساتھ کہ $m \leq n.$ فنکشن Φ محض فوریر فنکشن ہیں اور فنکشن Θ متلازم لیجنڈر فنکشن $P_n^m(\mu)$ اور $Q_n^m(\mu)$ ہیں۔ اس طرح سے الگ کئے ہوئے فنکشنوں کی شکل مختلف ہے لیکن ایسے کہنی نئے اصولوں سے واسطہ نہیں پڑتا جن کی مثالیں ایسے مسئلوں میں نہ دے دی گئی ہوں جن کے لیے Φ ایک مستقلہ ہے۔ اس لیے ہم ایسے مسئلوں پر تفصیل میں بحث نہیں کریں گے۔ ہم ایسے مسئلوں پر غور نہیں کریں گے جن کے حدود مخروطی ہیں اور جن میں قطبی محور مضمروں کے پھیلاؤ میں شامل نہیں ہے اور جن کے لیے $Q_n^m(\mu)$ کے استعمال کی ضرورت پڑتی ہے تاکہ حدودی شرائط کی پابندی ہو سکے۔ ایسے بہت سے مسئلوں کے حل کے لیے حوالے اس باب کے آخر میں دیے گئے ہیں۔

5-8 لاپلاس کے مساوات کا سلنڈری سمتی قدروں میں حل

سلنڈری سمتی قدروں r, φ, z میں لاپلاس کا مساوات یہ ہے۔

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \tag{5-28}$$

ضربیہ فنکشنوں

$$\phi(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z), \tag{5-29}$$

کے ذریعہ الگ کرنے پر آئیں؛

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+(k^2r^2-n^2)R=0, \tag{5-30}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0, \qquad (5\text{–}31)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0, \qquad (5\text{–}32)$$

ملتے ہیں جہاں k اور n فاصل پیرامیٹر ہیں۔ مساوات (5–30) کو بیسل مساوات Bessel's equation, کہتے ہیں اور اس کے حل بیسل فنکشن کہلاتے ہیں۔ حلوں کی نوعیت فاصل مستقلہ کے نشان پر نمایاں طور سے منحصر ہو گی یعنی اس پر کہ آیا n اور k حقیقی ہیں یا خیالی۔ اگر ایسے حل درکار ہیں جو ازیمتھ زاویہ φ میں واحد قیمت والے ہوں تو حلوں کو φ میں دوری ہونا پڑے گا اور n ایک حقیقی عدد صحیح ہوگا۔ اگر k حقیقی ہے تو حل $Z(z)$ ایک حقیقی اکسپوننشی ہے اور نیم قطری حل بیسل فنکشنوں کے جوڑ ہوں گے جنہیں $J_n(kr)$ اور $N_n(kr)$ سے دکھایا جاتا ہے۔ اس باب کے آخر میں بیسل فنکشنوں اور ان کے اوصاف پر نہایت عمدہ تصنیفات کی فہرست دی گئی ہے ہمیں یہاں صرف یہ کہنے کی ضرورت ہے کہ J_n اور N_n اپنے آرگومینٹوں کے دوری فنکشن ہیں اور جیسے ہی $kr \to \infty$ دونوں صفر کی طرف جاتے ہیں اور یہ کہ J_n وہ حل ہے جو $r = 0$ پر ریگولر ہے۔ $r=0$ ایسا نقطہ ہے جس کے لیے مساوات (5–30) میں ایک ندرت موجود ہے۔ تب حقیقی n اور k، کے لیے انٹگرل اس شکل کے ہوں گے؛

$$
\begin{aligned}
R(r) &= A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr), && k \neq 0,\\
R(r) &= Ar^n + Br^{-n}, && k = 0,\\
\Phi(\varphi) &= C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi, && n \neq 0,\\
\Phi(\varphi) &= C\varphi + D, && n = 0,\\
Z(z) &= E_k e^{kz} + F_k e^{-kz}, && k \neq 0,\\
Z(z) &= Ez + F, && k = 0.
\end{aligned}
\qquad (5\text{–}33)
$$

اگر n اور k دونوں صفر ہیں تو

$$\phi = (A \ln r + B)(C\varphi + D)(Ez + F)$$

ہم ان سلنڈری فنکشنوں کے استعمال کو ایک نمونے کے مسئلہ کے حل کا خاکہ دے کر دکھائیں گے۔ ایک ایسے مسئلہ کو لیجیے جو سمتی تشاکل رکھتا ہے اس لیے $n = 0$. اگر حل قطری سمت میں انتہا تک جاتا ہے جس کی وجہ سے کوئی سلنڈری حدود نہیں ہیں جو قطری فنکشن $R(r)$ پر پابندیاں عائد کر سکے تو k پر بھی کوئی مطابقہ یا بندیاں نہیں ہیں اور حل سارے k پر ایک تکمیلیہ ہوگا۔ تکمیلیہ شکل یہ ہوگی:۔

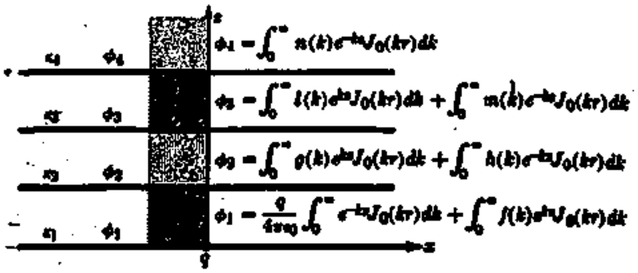
$$\int_0^\infty e^{\pm kz} f(k) J_0(kr)\, dk. \qquad (5\text{-}34)$$

ایک جوڑ میں ضربیوں کے ایک سٹ کو دریافت کرنے کی بجائے ہمیں اب فنکشن $f(k)$ کی قیمت نکالنا ہے ایک نقطہ چارج کے مضمر کا اظہار اسی قسم کے ایک تکمیلیہ کے ذریعہ کیا جا سکتا ہے اور حقیقت میں ایک ریاضیاتی مساوات

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^\infty e^{\pm kz} J_0(kr)\, dk \qquad (5\text{-}35)$$

ہے جہاں $z > 0$ کے لیے ایکسپونینشل مثبت ہے اور $z < 0$ کے لیے منفی۔ کولم مضمر $\phi = q/4\pi\epsilon_0 R$ کا مساوات اب مندرجہ ذیل ہے:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty e^{\pm kz} J_0(kr)\, dk. \qquad (5\text{-}36)$$



[شکل 5-5. ایک نقطہ چارج کے زیر اثر برق گزار اشیا کے متوازی پرت]

تب مبدا پر مقیم ایک نقطہ چارج کے زیر اثر z محور کے عمودی ہموار حدود کے مسئلہ کے حل کے لیے مساوات (5-36) کے مضمر کو مساوات (5-34) کی شکل کے

ترغیبی مضمر کے ساتھ ملا کر استعمال کیا جا سکتا ہے ۔ شکل 5-6 میں دکھائی گئی اس پرتوں کی ترتیب کے جو مختلف ترغیبی سمائیوں κ_1, κ_2، وغیرہ کے بہت سے پرتوں پر مشتمل ہے، شکل میں دکھائے ہوئے مضمر ہیں ۔ اگر ہم حدی شرطوں کو سب مشترک سطحوں پر عائد کریں اور تکمیلیہ نشان کے اندر کے فنکشنوں کو حاصل کرنے کے لیے اور اس طرح ہر پرت میں حل دریافت کرنے کے لیے مساوات کی کافی تعداد مل جائے گی ۔

اگر سلنڈری حل کو z سمت میں دوری ہونا ہے تو k خیالی ہوگا اور نیم قطری مساوات کے مناسب حل خیالی آرگومنٹ کے بیسل فنکشن ہوں گے ۔ ik کی جگہ k رکھنے کا رواج ہے، اس لیے مساوات (5-30) اس شکل میں آجاتا ہے جسے تبدیل شدہ بیسل کی مساوات کہتے ہیں :

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - (k^2r^2 + n^2)R = 0. \qquad (5\text{-}37)$$

دریافت طلب حلوں کو $I_n(kr)$ اور $K_n(kr)$ کہا جاتا ہے جن کا خیالی آرگومنٹ والے بیسل فنکشنوں سے جن کی فہرست Jahnke اور Emde نے Tables of Functions میں دی ہے، یہ رشتہ ہے

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix), \qquad (2/\pi)K_n(x) = i^{n+1}H_n^{(1)}(ix) = (-i)^{n+1}H_n^{(2)}(-ix) \qquad (5\text{-}38)$$

فنکشنوں کی نوعیت اس بات سے ظاہر ہوتی ہے کہ بڑے x، کے لیے

$$I_n(x) \to \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^{1/2} e^x, \qquad K_n(x) \to \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}. \qquad (5\text{-}39)$$

ٹھیک اسی طرح جیسے مستطیلی اور کروی سمتی قدروں کے بارے میں تھا مساوات (5-29) کے سب تینوں اجزا کا اپنے مطابقہ متغیروں کا اہتزازی فنکشن ہونا غیر ممکن ہے ۔

5-9 حقیقی طبیعی مسئلوں کے حل کے لیے مضمری مسئلوں میں سلنڈری حلوں کا اطلاق

جو بیسل فنکشن ضروری ہیں ان کے ریاضیاتی اوصاف کی فہرستیں حوالہ جات میں ملتی ہیں۔ ایسے مسئلوں کو حل کرنے کے لیے جن میں سلنڈری حدود چالک ہوں ہمیں ٹیبلوں کا استعمال کرنا ہوگا۔ جس طرح دائری فنکشنوں کے لیے ٹرگنامیٹری کے ٹیبلوں کا استعمال کرتے ہیں۔ مثلاً r_0 نصف قطر کے ایک ارضیدہ سلنڈری چالک کے اندر حل کو شرط $J_n(kr_0)=0$ کی پابندی کرنا ہوگی۔ اس لیے k کی قیمتیں ایک الگ قیمتوں والے سیٹ k_l تک ہی محدود رہیں گی جہاں l ایک انڈکس ہے جو J_n کی صفر قیمتوں کا شمار ایک سے لاانتہا ہیہ تک بتاتا ہے۔ عام طور سے پورا حل n اور l پر ایک دوہرا جوڑ ہوتا ہے جس کے ضربیے اس طرح نکالے جاتے ہیں کہ حدودی شرائط کی پابندی ہو۔ فنکشنوں کا عمودی ہونا سیکشن 3-6, کے عام ثبوت سے نکل آتا ہے یا (5-30) کی تفرقی مساوات سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ:

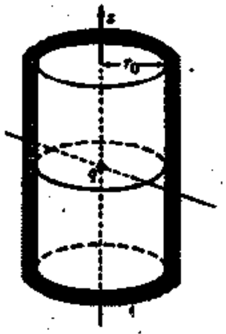
$$\int_0^{r_0} J_n(k_l r) J_n(k_{l'} r)\, r\, dr = 0$$

اگر $l \neq l'$ جزوی مضمروں کی عمودیت مختلف n کے لیے ϕ کی شکل سے ظاہر ہے۔

z محور کے گرد ایک زمین سے جڑے چالک سلنڈر کے اندر اور سمتی قدروں کے مبدا پر واقع ایک نقطہ چارج کا مسئلہ اس طریقے کو اچھی طرح واضح کر دیتا ہے۔ اگرچہ اس سے اس طریقے کی عمومیت ختم ہو جاتی ہے، یہاں سمتی تشاکل کی وجہ سے آسانی پیدا ہو جاتی ہے جس سے سارے مضمر کا انحصار ϕ پر نہیں رہتا اور ریڈیل حل $J_0(k_l r)$ تک ہی محدود رہتے ہیں۔ دریافت طلب حل کی شکل مندرجہ ذیل ہے۔

$$\phi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{k_l z} J_0(k_l r), \qquad \text{for} \quad z < 0,$$

$$\phi_2 = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-k_l z} J_0(k_l r), \qquad \text{for} \quad z > 0, \qquad (5\text{–}40)$$



[شکل 5-6. ایک زمین سے جُڑے چالک سلنڈر کے اندر نقطہ چارج]

جہاں k_l ایسا ہے کہ سلنڈر کے نصف قطر $= r_0$: $J_0(k_l r_0) = 0$، $z = 0$ مستوا پر فلکس شرط کو دو ابعادی δ فنکشن کے ذریعہ بیان کیا جا سکتا ہے جس کی تعریف اس رشتہ سے ہوتی ہے۔

$$2\pi \int_0^{r_0} \delta(r) r \, dr = 1, \qquad (5\text{-}41)$$

اس لیے

$$\frac{q\,\delta(r)}{\epsilon_0} = \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right]_{z=0} = 2\sum k_l A_l J_0(k_l r). \qquad (5\text{-}42)$$

اگر ہم مساوات (5-42) کے دونوں طرفوں کو $J_0(k_{l'} r) r \, dr$ سے ضرب کریں اور بیسل فنکشنوں کی عمودی صفات کا استعمال کرتے ہوئے r کے اوپر تکمیل کریں تو ہم پاتے ہیں کہ

$$\frac{q J_0(0)}{2\pi\epsilon_0} = 2 k_l A_l \int_0^{r_0} [J_0(k_l r)]^2 r \, dr,$$

یا

$$A_l = \frac{q/\epsilon_0}{4\pi k_l} \frac{J_0(0)}{\int_0^{r_0} [J_0(k_l r)]^2 r \, dr}. \qquad (5\text{-}43)$$

اب بیسل فنکشن کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ $J_0(0) = 1$، اور مساوات (5-30) کو $(dJ_n/dr) r^2$ سے ضرب کر کے اور حصّوں میں تکمیل

کرکے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\int_0^{r_0} [J_0(k_l r)]^2 r\, dr = \frac{r_0^2}{2} [J_1(k_l r_0)]^2$$

بشرطیکہ ہم r_0 پر حدودی شرط کو اور مندرجہ ذیل ریاضیاتی مماثلہ کو دھیان میں رکھیں۔

$$\frac{dJ_n}{d(kr)} = -J_{n+1} + \frac{n}{kr} J_n. \tag{5-44}$$

اس لیے

$$A_l = \frac{q/\epsilon_0}{2\pi k_l} \frac{1}{r_0^2 [J_1(k_l r_0)]^2} \tag{5-45}$$

اور

$$\phi_1 = \frac{q}{2\pi r_0^2 \epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} e^{k_l z} \frac{J_0(k_l r)}{k_l [J_1(k_l r_0)]^2},$$

$$\phi_2 = \frac{q}{2\pi r_0^2 \epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-k_l z} \frac{J_0(k_l r)}{k_l [J_1(k_l r_0)]^2}. \tag{5-46}$$

اِس طرزِ عمل کو عام کرکے اسے ایک چالک سلنڈر کے اندر کے لیے گرین فنکشن کو دریافت کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے اگر نقطہ چارج کسی من مانے مقام $r = a, \varphi = \alpha, z = z_0$ پر واقع ہو۔ اس حالت میں مضمروں کو $z < z_0$ اور $z > z_0$ کے لیے الگ الگ لکھا جاتا ہے اور فلکس کی شرط کو عام دو ابعادی δ فنکشن کے لحاظ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کے لیے

$$\int \delta(r - a)\, \delta(\varphi - \alpha) r\, dr\, d\varphi = 1. \tag{5-47}$$

نتیجہ کے طور پر ملا گرین کا فنکشن n اور l کے اوپر ایک دوہرا جوڑ ہوتا ہے جو $q = 1$ اور مبدا پر واقع اکائی چارج کے لیے مساوات (5-46) رہ جاتا ہے۔

مجوزہ حوالے

گزشتہ ابواب میں Smythe, Jeans, Stratton Weber, Jeffreys and Jeffreys.

اور Morse and Feshbach کے دیئے گئے حوالے زیادہ مشکل مضمر مسئلوں کو حل کرنے کے لیے مفید ہیں۔

Byerly میں لیجنڈرا اور بیسل فنکشنوں کے اوصاف کو ایک ابتدائی ڈھنگ سے *Fourier's Series and Spherical Harmonics* میں بتایا ہے۔ زیادہ مکمل بحث کے لیے:

T. M. MacRobert, *Spherical Harmonics.*

G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.*

دیکھیے۔ لیجنڈرا اور بیسل فنکشنوں کے ٹیبل اور گراف اور ساتھ میں کارآمد فنکشنی رشتوں کا مختصر بیان:

E. Jahnke and F. Emde, *Tables of Functions.*

میں ملیں گے۔

مشق

1۔ ایک کرّوی خطہ کے اندر مضمر تقسیم کیا ہوگی جبکہ یہ خطہ جو دو چالک نصف کرّوں سے گھرا ہوا ہے جن کے مضمر ترتیب سے $\pm V/2$ ہیں۔

2۔ ایک کرّوی حجمی تقسیم چارج کے باہر کے نقطوں پر مضمر معلوم کیجیے جس میں چارج کثافت قطری مستوا سے فاصلہ کے متناسب ہے۔

3۔ ایک چالک کی سطح کا مساوات $r = a[1 + \delta P_n(\cos\theta)]$ ہے۔ جہاں $\delta \ll 1$۔ دکھائیے کہ اگر چالک کو ایک یکساں میدان E میں قطبی محور کے متوازی رکھ دیا جائے تو سطحی ثقل چارج کی عبارت مندرجہ ذیل ہوگی۔

$$\sigma = \sigma_0 + \delta \left\{ \frac{3n\epsilon_0 E}{2n+1} [(n+1)P_{n+1}(\cos\theta) + (n-2)P_{n-1}(\cos\theta)] \right\}$$

جہاں σ_0 ترغیب شدہ چارج کثافت $z = 0$ کے لیے ہے۔

4. κ مخصوص ترغیبی سمائی والے وسیلے میں ایک یکساں میدان E_0 قائم کیا جاتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ وسیلے میں ایک کرّوی جوف کے اندر میدان مندرجہ ذیل عبارت سے ظاہر کیا جائے گا۔

$$E = \frac{3\kappa E_0}{2\kappa + 1}.$$

5. a نصف قطر کا ایک چالک کرہ جس پر q چارج ہے ایک E_0 شدت کے یکساں میدان میں رکھا ہے۔ ہر جگہ مضمر دریافت کیجیے۔ کرہ پر کے ترغیب شدہ چارج کا دو قطبی گردشہ کیا ہوگا؟

6. ایک نصف کروی شیل کی سمائی کیا ہے (اشارہ: ایک چارج شدہ دائری ڈسک کو الٹ دیجیے۔ اس مسئلہ کا حل پہلے کیلون نے دیا تھا)

7. ایک a نصف قطر کے ٹھوس ڈائیلکٹرک کرّہ کا ایک سکٹر نکال دیا گیا ہے جس سے کہ وہ ایک لا متناہیہ چالک پچڑ پر جس کا باہری زاویہ α ہے صحیح بیٹھ جاتا ہے اور اس کی سطح پچڑ کے پہلوؤں سے عمودی سمت میں ملتی ہے۔ اگر پچڑ کو چارج دے دیا جائے تو دکھائیے کہ کرّہ کے اندر اور باہر مضمر

$$\phi_{in} = \text{const.}\,\frac{\alpha + 2\pi}{\alpha(1 + \kappa)}\,(r \sin\theta)^{\pi/\alpha} \cos\frac{\pi\varphi}{\alpha},$$

$$\phi_{out} = \text{const.}\left[r^{\pi/\alpha} - \frac{\pi(\kappa - 1)a^{\pi/\alpha}}{\alpha + \pi(\kappa + 1)}\left(\frac{a}{r}\right)^{(\pi/\alpha)+1}\right](\sin\theta)^{\pi/\alpha} \cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}.$$

ہوں گے۔

(اشارہ: یاد رکھیے کہ مسئلہ کی جیامٹری صرف ایک ہی سطحی ہارمونک کی اجازت دیتی ہے۔ وہ کونسا ہے؟) (Smythe)

8. دکھائیے کہ ایک a نصف قطر کے چالک ڈسک کی وجہ سے سلنڈری سمتی قدروں میں مضمر

$$\phi(r, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(kr)\,\frac{\sin ka}{k}\,dk$$

ہے جبکہ q ڈسک کے اوپر چارج ہے۔ اس مسئلہ کے حل کے لیے کیا آپ کوئی دوسرا طریقہ بتا سکتے ہیں؟

باب (6)

برق سکونی میدان میں توانائی رشتے اور قوتیں

برق سکونی میدان پر ہماری بحث ابھی تک پورے طور سے دو نقطہ چارجوں کے درمیان دور سے فعل کرنے والی قوت کے ایک ہی تجرباتی قانون یعنی مساوات (1-24) کے کولوم قانون کی بنیاد پر ہوئی ہے۔ برقی میدان کو ایک بیچ کے ایجنٹ کے طور پر چارجوں کے درمیان تفاعل کے بیان کو آسان بنانے کے مقصد سے لایا گیا ہے۔ یہ سوال کہ میدان ایک آزاد طبیعی وجود کے طور کی ایک حقیقت ہے ان تذکروں میں نہیں اٹھتا۔ میکسویل نے برقی میدان کو ایک سیدھے میکانکی معنی میں اس سے زیادہ درجہ کی طبیعی حقیقت دینے کی کوشش کی تھی کہ ہمارے مطلب کے لیے ضروری ہوگی۔ کیونکہ میدان کو ایک طبیعی حقیقت ماننے کی بنیادی وجہ اس وقت تک ظاہر نہیں ہوگی جب تک غیر سکونی اثرات پر بحث نہ ہو۔ بہر حال اگر میدان تجرباتی حقیقتوں کا بالکل جائزہ لیتا رہے تو یہ ضروری ہے کہ ایک برقی تفاعل کرنے والے نظام کے سارے میکانکی اوصاف کو یا تو تفاعل میں حصہ لینے والے ماخذوں کے لحاظ سے یا خود ماخذوں سے پیدا شدہ میدانوں کے لحاظ سے بیان کیا جا سکے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ چارجوں کے ایک دیے ہوئے نظام کے ساتھ میدان کے تفاعل پر ماخذوں کی تفصیلی فطرت کا اثر نہیں ہونا چاہیے۔ جب چارجوں کی ایک تعداد دیے ہوئے نقطوں پر میدان میں داخل کی جاتی ہے تو کیا تفاعل ہوتا ہے اس کا تعین کرنے کے لیے صرف میدان کی تشریح ہی کافی ہوگی۔ تفاعل کو خود میدان کے ہی لحاظ سے تشکیل کرنا ہوگا اس کا سیدھا

انحصار میدان پیدا کرنے والے چارجوں کی تشکیل پر نہیں ہوگا۔

اس لیے ایسی میدانی نظریے کی تشکیل ممکن ہونی چاہیے جس میں ہم پوری میکانکی صفات جیسے توانائی اور قوت کو میدان کے مآخذ چارجوں کے لحاظ سے یا چارجوں کی وجہ سے پیدا میدان یا مقناطیسی لحاظ سے مساوی طور پر بیان کر سکیں۔ جب ایسے کلی رشتوں کو برقی میدان کے لحاظ سے ظاہر کیا گیا ہو تو ان کے صحیح ہونے کی واحد کسوٹی یہ ہوگی کہ نتیجے وہی ہوں جو میدان کے ذمے دار چارجوں کے سیدھے دور۔ کے تفاعل کے اطلاق سے ملتے ہیں۔

6-1 آزاد فضا میں میدان توانائی

آزاد فضا میں چارجوں کے ایک سٹ q_i کو لیجیے شروع میں ایک دوسرے سے لامتناہی فاصلہ پر واقع پہلے سے موجود ان چارجوں کو واقعی اکٹھا کرنے میں کیا گیا کام

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i^0 \tag{6-1}$$

جہاں ϕ_i^0 وہ مضمر ہے جو q_i کے مقام پر باقی دوسرے چارج پیدا کرتے ہیں۔ ان چارجوں کو اکٹھا کرنے میں ہم نے نظام کی توانائی کو بدل دیا ہے اور چونکہ ساری قوتیں بقائی ہیں اس لیے ہم چارجوں کو اکٹھا کرنے میں کیے گئے کام کے اس اظہار کو نظام کی توانائی مان سکتے ہیں۔ یہ توانائی کسی جگہ جمع ہوگی۔ جیسا کہ میکانیات میں ہوتا ہے ٹھیک اسی طرح توانائی کے جمع ہونے کی جگہ کا انتخاب کوئی بھی اپنے نقطۂ نظر سے کرتا ہے۔

اگر مثال کے طور پر ہم ایک دبی ہوئی سپرنگ کے سرے پر لگے دو ڈھیلے لیں تو یہ ایسا نظام ہے جو مضمر توانائی رکھتا ہے جو اگر اسپرنگ کو پھیلنے دیا جائے تو رہا ہو جائے گی۔ پھیلنے پر ڈھیلے حرکی توانائی حاصل کریں گے اس میکانکی نظام میں شروع کی حالت میں توانائی کا طبیعی مقام ضروری نہیں ہے کہ سپرنگ میں ہو۔ مظہراتی نقطۂ نظر سے ڈھیلوں کو شروع میں اس سے اونچے مضمر کے خطے میں سمجھا جا سکتا ہے بمقابلہ اسی کے جب پر وہ سپرنگ کے پھیلنے

کے بعد ہوتے ہیں۔ مساوات (6-1) اس دوسرے نقطۂ نظر سے مطابقت رکھتا ہے۔ اب ہم مساوات (6-1) کا ایسی عبارت میں تحویل کرنے کی کوشش کریں گے جس سے ایسا معلوم ہو کہ برقی توانائی (استعارہ کے طور پر) برقی میدان کی "لچک" صفت میں قیام پذیر ہے، جیسا کہ اس نقطۂ نظر سے مطابقت کے لیے ضروری ہے جس میں ڈھیلا۔ سپرنگ نظام کی توانائی سپرنگ میں مقیم ہے۔ میکسویل نے برقی میدان کی توانائی کا جو اظہار میدان کے اوپر ایک حجمی انٹگرل کی شکل میں ظاہر کیا ہے وہ یہ ہے:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\,dv. \qquad (6\text{-}2)$$

انٹگرل ساری فضا میں لیا گیا ہے۔ اب ہم یہ دکھائیں گے کہ میدانی توانائی U درحقیقت وہی ہے جو اکٹھا کرنے کا کام W. یہ دکھانے کے لیے ہم کسی من مانے میدانی نقطہ پر جزوی میدان E_i کو لیتے ہیں جو نقطہ چارجوں q_i میں سے صرف کسی ایک کا کولوم میدان ہے۔ تب E اور E^2 مندرجہ ذیل مساوات سے ملتے ہیں:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i,$$

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}{}' E_i\cdot E_j, \qquad (6\text{-}3)$$

جہاں جوڑ کے نشان پر زبر یہ بتاتا ہے کہ وہ رقم جس کے لیے $i = j$ ہے چھوڑ دی گئی ہے کیونکہ اس طرح کی رقوم پہلے جوڑ میں الگ سے اکٹھا کر لی گئی ہیں۔ نقطہ چارجوں کے لیے مساوات (6-2) کے E^2 کے اوپر انٹگرل میں پہلے جوڑ کا حصہ لامتناہی ہے۔ لیکن یہ لامتناہی رقم چارجوں کے نسبتی مقام سے آزاد ہے اور اس لیے لازم ہے کہ یہ وہ کام ظاہر کرتی ہے جسے چارجوں کو توانائی کے کسی من مانے نقطۂ صفر سے وجود میں لانے کے لیے کرنا ضروری ہے۔ اس لیے ہم

$$U_s = \frac{\epsilon_0}{2}\int \sum_{i=1}^{n} E_i^2\, dv \qquad (6\text{-}4)$$

کو نظام کی خود کی توانائی کہیں گے۔ اگر ہم ذرہ چارجوں کو ایک متعین نصف قطر دیں تو ہم خود۔ توانائی کو لامتناہی ہونے سے بچا سکتے ہیں جب تک کہ چارج سکون میں ہوں جیسا اس باب کے آخر میں دیے ایک مسئلہ میں بتایا گیا ہے۔ بعد کو ہم یہ پائیں گے کہ جب حرکت کرنے والے چارج زیر غور ہوں تو نصف قطر متعین ہونے سے کچھ مشکلات رونما ہوتی ہیں۔

مساوات (6-4) کے ساتھ میکسویل کا میدانی توانائی کا اظہار مساوات (6-2) تب درج ذیل ہو جاتا ہے:

$$U = U_s + \frac{\epsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \mathbf{E}_i\cdot\left(-\nabla{\sum_j}'\phi_j\right)dv, \qquad (6\text{-}5)$$

جہاں ${\sum_j}'\phi_j$ ، i ویں چارج کو چھوڑ کر باقی سب چارجوں کی وجہ سے کسی نقطہ پر مضمر ہے۔ حصوں میں اینٹیگریشن کرنے کی غرض سے ویکٹر مماثلہ:

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\phi) = \phi\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\phi \qquad (6\text{-}6)$$

کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$U = U_s - \frac{\epsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \left[\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_i{\sum_j}'\phi_j\right) - {\sum_j}'\phi_j\nabla\cdot\mathbf{E}_i\right]dv. \qquad (6\text{-}7)$$

i ویں چارج کے مقام کے علاوہ $\nabla\cdot\mathbf{E}_i$ سب جگہ غائب ہو جاتا ہے اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں اور اس لیے:

$$U = U_s - \frac{\epsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \mathbf{E}_i\left({\sum_j}'\phi_j\right)\cdot d\mathbf{S} + \frac{\epsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\phi_i^0\frac{q_i}{\epsilon_0}, \qquad (6\text{-}8)$$

جہاں ϕ_i^0 is i ویں چارج کے مقام پر ${\sum_j}'\phi_j$ کی قیمت ہے یعنی پر دوسرے چارجوں کی وجہ سے مضمر ہے۔ سطحی رقم کو ہم حدودی سطح کو لاانتہائیہ پر پہنچا کر من چاہا چھوٹا کر سکتے ہیں کیونکہ میدان کم از کم فاصلہ کم از کم فاصلہ کی دوسری طاقت کے الٹے تناسب میں اور مضمر کم سے کم

فاصلہ کی پہلی قوت کے اُلٹے تناسب میں گھٹتے ہیں اور اینٹگریشن کا تفرقی رقبہ ds صرف فاصلہ کے مربع کے تناسب سے بڑھتا ہے۔ اگر ہم اس کا خیال کریں کہ مساوات (6-2) میں اینٹگرل اُس سارے فضا میں پھیلا ہوا ہے جہاں میدان ہے تو یہ اینٹگرل مساوات (6-8) کے نتیجہ کے طور پر یہ رہ جاتا ہے:

$$U = U_s + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \phi_i^0 q_i. \qquad (6\text{-}9)$$

اس آخری مساوات کی دوسری رقم بالکل وہی ہے جو چارجوں کو لامتناہیہ سے اکٹھا کرنے میں کیے گئے کام کے لیے لاتھا جبکہ پہلی رقم خود۔ توانائی ہے جو وہ توانائی ہے جو خود چارجوں کو وجود میں لانے کے لیے درکار ہوتی ہے۔ یہ تجزیہ یہ دکھاتا ہے کہ مساوات (6-2) اور (6-9) ایک ہی توانائی کے لیے ہیں لیکن مساوات (6-2) اس توانائی کا اظہار ایک توانائی کثافت $\epsilon_0 E^2/2$ کے حجمی اینٹگرل کی شکل میں کرتا ہے جس کا پھیلاؤ ساری فضا کے اوپر ہے۔ تجرباتی طور سے یہ معلوم کرنا ممکن نہیں ہے کہ آیا توانائی کا قیام میدان میں ہے یا میدان پیدا کرنے والے چارج توانائی رکھتے ہیں

6-2 ایک برق گزار کے اندر توانائی کثافت

برق گزار کی موجودگی میں کچھ شرطوں کے ساتھ مساوات (6-2) کی جگہ:

$$U = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dv. \qquad (6\text{-}10)$$

کو رکھا جا سکتا ہے۔ یہ دکھانے کے لیے ہم توانائی کی اُس تبدیلی پر غور کریں جو میدان میں ایک حقیقی چارج $\delta\rho$ کے اضافہ سے ہوتی ہے۔ ہم یہ مان لیں گے کہ حدود استوار ہیں اور رسیلے پر کڑی پابندیاں ہیں جن کی وجہ سے میکانکی پابندیوں پر کوئی کام نہیں کیا جا سکتا۔ اس حالت میں جب کہ چارج کثافت مسلسل ہو خود۔ توانائی کا مسئلہ غائب ہو جاتا ہے اور کیا ہوا کام یہ ملتا ہے

$$\delta W = \int \phi\, \delta\rho\, dv = \int \phi\, \delta(\nabla\cdot\mathbf{D})\, dv = \int \phi \nabla\cdot\delta\mathbf{D}\, dv. \qquad (6\text{-}11)$$

مساوات (6-6) کے ویکٹر مصدقہ اور گاس کے مصدقہ کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں کہ،

$$\delta W = \int \nabla \cdot (\phi\, \delta \mathbf{D})\, dv - \int \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi\, dv$$

$$= \int (\phi\, \delta \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \int \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi\, dv. \qquad (6\text{–}12)$$

اگر ہم سطحی رقم کو چھوڑ دیں جیسا ہم نے مساوات (6-9) کے اخذ میں کیا تھا تو ہم پاتے ہیں کہ

$$\delta W = -\int \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi\, dv = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}\, dv. \qquad (6\text{–}13)$$

کام میں اس اضافے کو عموماً انٹیگریٹ نہیں کیا جا سکتا جب تک E D کا دیا ہوا فنکشن نہ ہو۔ اگر مثال کے طور پر E اور D کا رشتہ ایک برق گزار مستقلہ κ کے ذریعے ہے جو مقام کا فنکشن ہو سکتا ہے لیکن E کا نہیں، تو کام کے اضافہ کو D = 0 سے D = D تک انٹیگریٹ کرنے سے کلی توانائی یہ ہوگی:

$$U = \int_0^D \delta W = \int_0^D \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}\, dv = \iint_0^E \frac{\kappa \epsilon_0\, \delta(E^2)}{2}\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int \kappa \epsilon_0 E^2\, dv = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, dv. \qquad (6\text{–}14)$$

اس لیے کم از کم اس سادہ حالت میں جب E اور D میں تناسب ہے مساوات (6-10) جائز ہے۔ خیال رہے کہ مساوات (6-10) کے اس ثبوت میں ایک خیالی عمل آتا ہے: جو ایک ایسے نظام میں جس پر کڑی پابندیاں لگی ہوں ایک حقیقی اضافہ چارج کا اضافہ ہے۔ لیکن چونکہ ہمارا واسطہ صرف برقراری قوتوں سے ہے ان رشتوں کی صداقت اس امر سے آزاد ہے کہ کونسا خیالی عمل چنا جائے۔

اگر وسیلہ یکساں نہیں ہے تو وہ ضربیہ جس سے D کا رشتہ E سے جڑتا ہے ایک ٹینسر ہے جس پر پہلے ہی سیکشن 2-1. میں بحث ہو چکی ہے۔ یعنی،

$$D_\alpha = \epsilon_0 \kappa_{\alpha\beta} E_\beta. \qquad (6\text{–}15)$$

اس لیے مساوات (6-13) کی جگہ مساوات

$$\delta W = \epsilon_0 \int \kappa_{\alpha\beta} E_\beta \, \delta E_\alpha \, dv. \qquad (6\text{-}16)$$

رکھنا ہوگا اگر $\kappa_{\alpha\beta}$ میدان کی قدر سے آزاد ہے تو اس مساوات کا اینٹگرل آخری میدانی شدت تک نکالا جا سکتا ہے۔ چونکہ سبھی میدانی اجزا متناسب طور پر بڑھتے ہیں اس لیے ہمیں :

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \kappa_{\alpha\beta} E_\beta E_\alpha \, dv, \qquad (6\text{-}17)$$

ملتا ہے۔ اس لیے مساوات (6-14) خطی غیر۔ یکساں وسیلوں کے لیے بھی جائز ہے
ہم ڈائیلکٹرک مستقلہ ٹینسر $\kappa_{\alpha\beta}$ تشاکل کو مساوات (6-17) سے اخذ کر سکتے ہیں۔ مساوات (6-17) کا اینٹگرینڈ ہے۔

$$\kappa_{\alpha\beta} E_\beta E_\alpha = \kappa_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta = \kappa_{\beta\alpha} E_\beta E_\alpha, \qquad (6\text{-}18)$$

جہاں ہم نے آخری قدم میں محض انڈیکسوں کو ادل بدل کر دیا ہے۔ اس لیے کسی من چاہے E_α اور E_β کے لیے

$$\int (\kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\beta\alpha}) E_\alpha E_\beta \, dv = 0 \qquad (6\text{-}19)$$

جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha}$ جب تک کہ میدانی توانائی پوری غائب نہ ہو جائے۔ اس طرح سے صلاحیتی ٹینسر کا تشاکل جسے سیکشن 2-1 میں مان لیا گیا تھا ثابت ہو جاتا ہے۔ یہ ثبوت اس عام مصدقہ سے مطابقت رکھتا ہے کہ ایک غیر متشاکل ٹینسر $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$ اور ایک متشاکل ٹینسر $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ کا چھوٹا ضرب

$$A_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \qquad (6\text{-}20)$$

بالکل غائب ہو جاتا ہے۔ کسی من چاہے ٹینسر $T_{\alpha\beta}$ کو ہمیشہ اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \qquad (6\text{-}21)$$

جہاں

$$S_{\alpha\beta} = \frac{T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}}{2}, \quad A_{\alpha\beta} = \frac{T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}}{2}. \qquad (6\text{-}22)$$

6-3I U کی حرحرکیاتی تفسیر

یہ مان لینے سے کہ برق گزار مستقلہ κ میدان کے بدلنے کے ساتھ نہیں بدلتا اور صرف مقام کا فنکشن ہے [جیسا مساوات (6-14)] کے انٹیگریشنوں میں مانا گیا ہے] یہ مطلب نکلتا ہے کہ میدان کے بدلنے کا عمل ایک ہم تاپی عمل ہے کیونکہ عام طور سے برق گزار مستقلہ تاپ کا فنکشن ہوتا ہے ہم تاپی رویہ کا اطمینان کرنے کے لیے زیر بحث برق گزار شے کو ایک حرحبتر heat bath. کے لمس میں ہونا چاہیے جو اس سے حرارت کا تبادلہ کر کے تاپ کو مستقل بنائے رکھے۔ اس لیے ہم مساوات (6-13) کے کیے ہوئے کام میں اضافہ δW کو کل توانائی کا اضافہ نہیں مان سکتے کیونکہ حرارت کے تبادلے بھی ہوتے ہیں۔ لیکن مساوات (6-14) اس بیش ترین کام کا اظہار کرتا ہے جو بعد میں کسی وقت کل برقی میدان توانائی سے حاصل کیا جا سکتا ہے اگر تاپ کو مستقل مان لیا جائے۔

حرحرکیات کے نقطہ نظر سے وہ بیش ترین کام جو کسی نظام سے ہم تاپی حالات میں حاصل کیا جا سکتا ہے اس نظام کی آزاد توانائی F ہے نہ کہ کل توانائی۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ برق گزاروں کی موجودگی میں اظہار $U = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv$ کو نظام کی کل توانائی نہیں مانا جا سکتا اسے صرف حرحرکیاتی آزاد توانائی سمجھا جا سکتا ہے۔ بیشک جب کوئی ایسی اشیا جن کی برق گزار صفات تاپ پر منحصر ہوں میدان میں موجود نہ ہوں تو یہ فرق غائب ہو جاتا ہے۔ اس طرح مساوات (6-13) کو آزاد توانائی میں اضافہ δF کے لحاظ سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\delta F = \left[\int (\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D})\,dv\right]_{\text{مستقل تاپ}} \tag{6-23}$$

اور

$$F = U - TS = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv, \tag{6-24}$$

جہاں U کل اندرونی توانائی S انٹراپی، اور T مطلق تاپ ہے۔

حرحرکیاتی معنی میں برقی میدان E گیس کے داب کے مشابہ ہے اور نقل D حجم کے۔ یعنی E "شدت" والا اور D "پھیلاو" والا متغیرہ ہے۔

پوری توانائی کے لیے صحیح عبارت آسانی سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ اگر ہم مساوات (6-24) کا فرق لیں تو

$$\delta F = \delta U - T\,\delta S - S\,\delta T. \qquad (6\text{-}25)$$

لیکن حرکیات کے پہلے قانون کے مطابق $\delta U - T\,\delta S = \delta W$ جہاں δW مساوات (6-13) سے ملتا ہے۔ اس لیے میدان اور تاپ کی من چاہی تبدیلیوں کے لیے

$$\delta F = -S\,\delta T + \int (\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D})\,dv. \qquad (6\text{-}26)$$

مساوات (6-24) اور (6-26) سے

$$S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_{D=\text{const}} = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{d\kappa}{dT}\,dv = \int \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}\,\frac{1}{\kappa}\,\frac{d\kappa}{dT}\,dv,$$

اور

$$U = F + TS = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{d(T\kappa)}{dT}\,dv = \int \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}\,\frac{1}{\kappa}\,\frac{d(T\kappa)}{dT}\,dv. \qquad (6\text{-}27)$$

اس طرح مستقل تاپ پر ایک میدانی تبدیلی عائد کرنے کے دوران برق گزار نے جو حرارت جذب کی ہے وہ یہ ہے

$$\delta Q = T\,\delta S = \int \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\,\frac{T}{\kappa}\,\frac{d\kappa}{dT}\,dv. \qquad (6\text{-}28)$$

اگر مثال کے طور پر نوعی ترغیبی سمائی کی یہ شکل ہے (دیکھیے مساوات (2-44)) جبکہ A ایک مستقلہ ہے جیسا کہ مستقل دو قطبی گردشہ والے مالیکیوں کی گیسوں میں ہوتا ہے۔

$$\kappa = 1 + X = 1 + (A/T), \qquad (6\text{-}29)$$

تو $d\kappa/dT$ صرف سے کم ہوگا اور اس لیے $\delta Q < 0$ اگر $\delta D > 0$.

اس لیے جب میدان عائد کیا جاتا ہے تو حرارت باہر نکلتی ہے اور اس کا الٹا بھی صحیح ہوگا۔ اگر میدان ایسے برق گزار پر عائد کیا جائے جس سے حرارت باہر نہیں جا سکتی تو برق گزار کا تاپ بڑھے گا اگر $d\kappa/dT < 0$

۶-۴ تھامسن کا مصدقہ

اب آئندہ اپنے غور و فکر میں ہم صرف آزاد توانائی کثافت کا ہی استعمال کریں گے گو کہ ہم برق۔ مقناطیسی نام دہی کے رواجوں کی پابندی کریں گے اور اسے F نہ کہہ کر U کہیں گے۔ ایسا کرنے سے ہم (مستقل تاپ عملوں میں) آزاد توانائی کی تبدیلیوں کو سیدھے اس میکانکی کام کی مقداروں کے جو کہ ان کی ذمہ دار ہیں برابر رکھ سکیں گے ہمیں اس کی ضرورت نہیں ہوگی کہ حرارتی مقداروں کو بھی توانائی کے کھاتے میں شامل کیا جائے۔ مساوات (6-10) کا آزاد توانائی کی عبارت جو برق گزاروں کی موجودگی میں بھی جائز ہے، برقی مسئلوں میں اسی طرح کا رتبہ رکھتی ہے جو کہ کیمیائی آزاد توانائی کیمیائی حرکیات میں؛ کوئی کیمیائی عمل چلتا رہتا ہے جب تک کہ آزاد توانائی کمترین قیمت پر نہ پہنچ جائے۔ برقی عمل میں ایک چالک پر کے چارج خود کو پھر سے اس طرح تقسیم کر لیں گے کہ پوری آزاد میدان توانائی کم سے کم ہو جائے۔ اسے ہم براہ راست دکھا سکتے ہیں۔ ایک خیالی عمل پر غور کیجیے جس میں متعدد چالکوں پر تعادل میں مقیم چارج چالکوں کی مستقل مضمر سطحوں پر انتہائی خفیف ہٹا دیے جاتے ہیں اس طرح پر کہ کل چارج نہیں بدلتا۔ آزاد توانائی میں تبدیلی (مستقل تاپ) اس سے ملتی ہے۔

$$\delta U = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}\, dv. \tag{6-30}$$

اگر ہم گاس کا مصدقہ عائد کریں تو ہمیں پہلے کی طرح ملتا ہے:

$$\delta U = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}\, dv = \int (-\nabla\phi \cdot \delta \mathbf{D})\, dv = \int [\phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} - \nabla \cdot \delta(\mathbf{D}\phi)]\, dv$$

$$= \int \phi\, \delta\rho\, dv - \int \phi\, \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}. \tag{6-31}$$

سطحی رقم غائب ہو جاتی ہے اور انٹیگرل کو؛ وہی چالک پر الگ انٹیگرلوں کے جوڑ کی شکل میں توڑا جا سکتا ہے۔ اس طرح

$$\delta U = \sum_i \int_i \phi_i \, \delta\rho \, dv_i \qquad (6\text{-}32)$$

اگر ϕ_i ہر چالک پر مستقل ہو تو δU غائب ہو جائے گا کیونکہ

$$\int_i \delta\rho_i \, dv_i = \delta q_i = 0 \qquad (6\text{-}33)$$

ہر چالک پر چارج مستقل ہے۔ اس طرح سے معمولی توازن کی شرط کہ ہر چالک ہم مضمری ہو اس کے مترادف ہے کہ آزاد توانائی منتہی یا اقل ہو۔ اس شرط کو عام طور سے "تھامسن کے مصدقہ" کے نام سے جانا جاتا ہے۔ رقم

$$U_e = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \qquad (6\text{-}34)$$

کو برق سکونی میدان کی توانائی کثافت کہا جاتا ہے (حقیقت میں آزاد توانائی کثافت زیادہ صحیح ہوگا)۔ یہ کثافت اس معنی میں ہے کہ اس کا حجمی اینٹگرل پورے میدان کی توانائی دیتا ہے۔ دوسری طرف جس طرح سے توانائی کے مقام کا تعین میدان میں یا ماخذ چارجوں میں ناممکن تھا اسی طرح سے توانائی کو ایک واضح طریقے سے میدان کے ہر مخصوص حجم کے ساتھ اس طرح وابستہ کرنا ناممکن ہے کہ اس کی تجربہ کے ذریعہ تصدیق کی جاسکے۔ توانائی کی عبارت اخذ کرنے میں یہ مان لیا گیا ہے کہ وسیلے کو سکون میں رکھا جاتا ہے اور اس لیے قوتوں کے خلاف حرکت میں کوئی کام نہیں کیا جاتا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ برق گزاروں میں چارجوں کو اکٹھا کرنے کا خیالی عمل ایک خاص پابندی والا عمل ہے۔ ایسا ہوتے ہوئے بھی نتیجہ میں ملی توانائی کی عبارت عام اطلاق کی ہے کیونکہ کوئی غیر بقائی قوتیں شامل نہیں ہیں۔ بعد کو ہم زیادہ عام خیالی عمل پر غور کریں گے جس میں مادی اشیا کے حرکت کی اجازت ہے۔ مساوات (6-10) پھر بھی جائز ہوگی کیونکہ آخری میدانی توانائی تاریخ پر منحصر نہیں ہے۔

6-8 میکسویل کا زور ٹینسر

ایک خالص میدانی تھیوری میں کسی برق گزار کے اندر ایک دیئے

ہوئے حجمی قطع پر خالص زورر کا حساب حجمی قطعہ کی سطح پر کے میدانی حالات کے حوالے سے کرنا ممکن ہونا چاہیے۔ اس کا مطلب ہے کہ میدان زورر کی ترسیل کا ذریعہ اُسی معنی میں ہے جس میں ایک ڈوری جس کے سروں پر دو وزن بندھے ہیں وہ ذریعہ ہے جو ایک وزن کا زور دوسرے تک پہنچاتا ہے۔ میدانی مقداروں کی اہمیت اوران کے طبیعی لحاظ سے حقیقی ہونے کو دکھانے کے لیے میکسویل نے اس نقطہ پر زور دیا تھا۔ لیکن جیسا ہم پہلے دیکھ چکے ہیں ہم قوتوں کے کام کرنے کے طریقے کا متبادل بیان ہی دے سکتے ہیں۔ ہم دور کے فعل کے تصور کے مقابلہ میں میدان کے تصور کے صحیح ہونے کا کوئی واضح طبیعی ثبوت نہیں دے سکتے ۔ ہمیں یاد رکھنا چاہیے کہ اس بحث کے پیچھے جو واحد طبیعی حقیقت ہے وہ کولوم کا قانون ہے۔ باقی بحث صرف ریاضیاتی ہے اس لیے ہم چارجوں کے میکانکی تفاعل کے متعلق کسی ایسے طبیعی تصور کو پانے کی امید نہیں کر سکتے جو کولوم قانون کے علاوہ کسی طبیعی حقیقت کا اضافہ کر سکے۔ میدانی تصور کی بنیاد پر نئے طبیعی حقایق صرف اس وقت رونما ہوں گے جب اس نظریے میں وقت پر منحصر اثرات کی اگلے بیانوں میں اور زیادہ چھان بین کی جائے۔

اگر ہم یہ خیال کریں کہ وہ قوت جو ایک دیے ہوئے حجم پر کام کرتا ہے اس حجم کو گھیرنے والے سطحی قطعوں میں سے ہو کر پہنچتا ہے تو اس ترسیلی قوت کی تشکیل ایک مقدار کے حوالہ سے کی جا سکتی ہے جسے زور ٹینسر T. کہتے ہیں۔ (یہ زور ایک خیالی تصور ہے اور مادہ کی موجودگی پر منحصر نہیں ہے) زور ٹینسر T کا $\alpha\beta$ وان جُز $T_{\alpha\beta}$ اس طرح بنا ہے کہ ایک سطحی قطعہ dS جس کا β ویں سمت میں جُز dS_β ہے، کے پار ترسیل ہونے والی قوت dF کا α وال جُز dF_α اس عبارت سے ملتا ہے۔

$$dF_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} T_{\alpha\beta}\, dS_\beta. \qquad (6\text{–}35)$$

ایک ایسے مستطیل ٹھوس کے گردشی تعادل کو دھیان میں رکھ کر جس کے سطحوں پر زورر کام کر رہے ہوں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ زور ٹینسر کا متشاکل ہونا لازمی ہے

جوڑ کی روایت کے ذریعہ جس کے مطابق کسی ایک رقم میں جو انڈکس دوہرائے جائیں اُن پر جوڑ کرنا چاہیے، مساوات (6-35) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$dF_\alpha = T_{\alpha\beta}\, dS_\beta. \qquad (6\text{-}36)$$

مساوات (6-36) کا انٹگرل لینے پر کسی دیے حجم پر کام کرنے والی پوری قوت کا واں جز ملتا ہے

$$F_\alpha = \int T_{\alpha\beta}\, dS_\beta. \qquad (6\text{-}37)$$

اگر اس قوت کا کسی حجمی قوت کے لحاظ سے اظہار ہو سکے جس کا α واں جز F_{v_α} ہے تو

$$F_\alpha = \int T_{\alpha\beta}\, dS_\beta = \int F_{v_\alpha}\, dv, \qquad (6\text{-}38)$$

اور اس لیے ٹینسر ترقیم میں ظاہر کیے گئے گاس کے ڈائیورجنس مصدقہ

$$\int \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\, dv = \int T_{\alpha\beta}\, dS_\beta, \qquad (6\text{-}39)$$

کے مطابق زور ٹینسر اور حجمی قوت کے درمیان رشتہ مندرجہ ذیل ہوگا

$$F_{v_\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \qquad (6\text{-}40)$$

اس لیے اگر ہم ایک حجمی قوت کا اظہار کسی ایک مقدار T کی ڈائیورجینس کی شکل میں کرتے ہیں تو یہ مقدار T وہ سطحی زور ٹینسر T ہی ہے جس سے وہ زور جو مساوات (6-38) کے حجم کی سطح تمین سے ہو کر میدان کے ذریعہ ترسیل ہوتا ہے ملتا ہے۔

کسی دی ہوئی حجمی قوت F_v کی مطابقت کا ٹینسر واحد قیمت والا نہیں ہے کیونکہ اس میں مساوات (6-40) کی F_v کی قیمت پر اثر ڈالے بنا کوئی اور ٹینسر جس کی ڈائیورجنس صفر ہو ہمیشہ جوڑا جا سکتا ہے۔

آیئے ہم پہلے برق گزاروں کی غیر موجودگی میں اس قسم کے ٹینسر کو دریافت کرنے کے مسئلہ پر غور کریں یعنی مان لیں کہ حجمی قوت اس سے ملتی ہے ۔

$$\mathbf{F}_v = \rho\mathbf{E} = (\nabla\cdot\mathbf{D})\mathbf{E}. \qquad (6\text{–}41)$$

ٹینسر ترقیم میں مساوات (6-41).

$$F_{v_\alpha} = \epsilon_0 E_\alpha \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\beta}$$
$$= \epsilon_0\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}(E_\alpha E_\beta) - E_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}\right]. \qquad (6\text{–}42)$$

ہو جاتا ہے ۔ مساوات (6-42) کی پہلی رقم (6-40) کی شکل میں ہی ہے ۔ مساوات (6-42) کے قوسین کے اندر کی دوسری رقم کا ہم استحالہ کر سکتے ہیں اگر یہ دھیان رکھیں کہ برق سکونی میدان کے لیے $\nabla\times\mathbf{E} = 0$. یعنی $\partial E_\alpha/\partial x_\beta = \partial E_\beta/\partial x_\alpha$، اس لیے،

$$E_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} = E_\beta\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(E_\beta E_\beta) = \frac{1}{2}\frac{\partial(E^2)}{\partial x_\alpha}, \qquad (6\text{–}43)$$

جہاں E قدر ہے $\mathbf{E}$ کی ۔ مساوات (6-43) کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے ۔

$$E_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(E^2) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}E^2\right). \qquad (6\text{–}44)$$

اس لیے مساوات (6-42) کی شکل (6-40) کی ہوگی جب

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0(E_\alpha E_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}E^2). \qquad (6\text{–}45)$$

اس ٹینسر کے مطابقت کی میٹرکس کو واضح طور پر لکھا جا سکتا ہے ۔

$$T = \epsilon_0\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_xE_y & E_xE_z \\ E_xE_y & \frac{1}{2}(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & E_yE_z \\ E_xE_z & E_yE_z & \frac{1}{2}(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \end{bmatrix} \qquad (6\text{–}46)$$

یہ برق گزاروں کی موجودگی میں میکسویل کا برقی زور ٹینسر ہے۔ دھیان رہے کہ اگر جیسا اوپر مان لیا گیا ہے، میدان غیر گردشی نہیں ہے تو زور ٹینسر میں مزید رقمیں رونما ہوں گی۔

میکسویل ٹینسر ایک دوسرے درجہ کا متشاکل ٹینسر ہے اور اس لیے اسے مخصوص محوروں پہ استحالہ کر کے تین اجزا میں تخفیف کیا جا سکتا ہے۔ سیکولر ڈیٹر مینٹ۔

$$|T_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\lambda| = 0. \qquad (6\text{-}47)$$

کو حل کرنے سے میٹرکس کی مخصوص قیمتیں پائی جا سکتی ہیں۔ ٹینسر کی مخصوص قیمتیں یہ ہیں:

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{\epsilon_0}{2}E^2. \qquad (6\text{-}48)$$

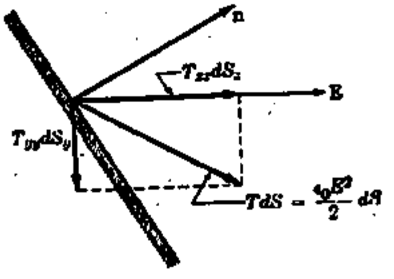
اس لیے مخصوص سمتی قدریں کے لحاظ سے ظاہر کرنے پر زور ٹینسر کی سادہ شکل

$$T = \frac{\epsilon_0}{2}\begin{bmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}49)$$

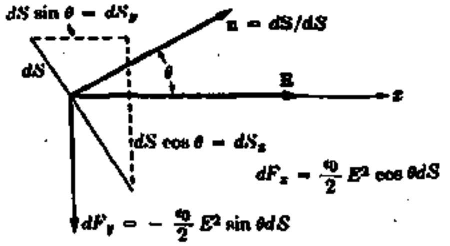
ہو جاتی ہے، مخصوص محوروں کی تشریح اس طرح ہوتی ہے کہ سیکولر ڈیٹرمینٹ کے واحد جوٹر λ_1 سے مطابقت رکھنے والا سمتی قدری محور E کے متوازی ہوتا ہے جب کہ دوہرے جذروں λ_2 اور λ_3 سے مطابقت رکھنے والے دو محور E کے عمودی ہوتے ہیں۔ اس حقیقت کو اکثر صفتی طور پر یہ کہہ کر ظاہر کیا جاتا ہے کہ برقی میدان تناؤ $\epsilon_0E^2/2$ جو میدان کی سمت کے متوازی ہوتا ہے اور $\epsilon_0E^2/2$ قدر کا آٹر اداب جو میدان کی سمت کے عمودی ہوتا ہے ترسیل کرتا ہے۔

آیئے ہم ایسا سمتی قدروں کا نظام چنیں جس میں x محور میدان کی سمت کے متوازی ہو جس کی وجہ سے $E_y = E_z = 0,$ اور زور پر غور کریں جو ایک سطحی قطعہ پر کام کرتا ہے جس کا عمود x محور سے زاویہ θ بناتا ہے، جیسا کہ شکل

میں دکھایا گیا ہے:



[شکل 6-1 ایک سطحی قطعہ کے اوپر زوروں پر غور کے لیے جیامٹری]

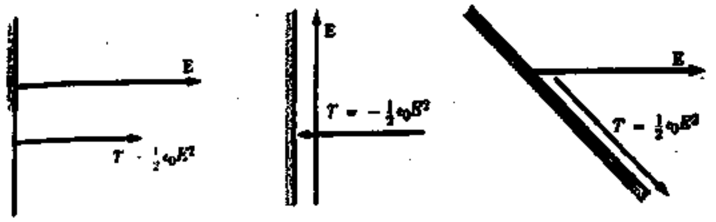


[شکل 6-2 ایک سطح پر زور]

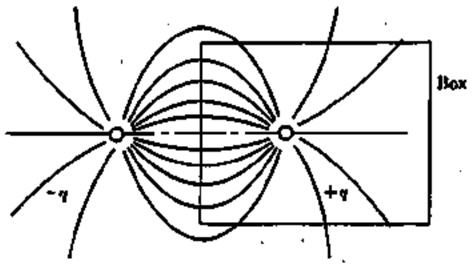
ایسے مستویٰ میں جس کا تعین E اور سطحی قطعہ کے عمود کرتے ہیں قوت کے تب دو اجزا ہوں گے ایک E کے متوازی اور دوسرا E کے عمودی۔ ان قوتوں کی قدریں مساوات (6-49) کے ذریعہ دیے گئے زور کے اجزا اور سطحی رقبہ کے اجزا کے حاصل ضرب ہیں۔ جیسا شکل میں دکھایا ہے dS پر حاصل قوت دو قوت اجزا کا ویکٹر جوڑ ہوگی جیسا شکل 6-2. میں دکھایا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ سطح پر عمودی اور سطح پر کام کرنے والی حاصل قوت کے سمت کے درمیان زاویہ کو برقی میدان دو برابر حصوں میں بانٹتا ہے۔ یہ عمل ایک برقائے خط پر قوتوں کی قیمت بذریعہ گراف حاصل کرنے میں اکثر کارآمد ہوتا ہے اگر میدان کا ایک تجرباتی گراف دستیاب ہو یا اسی طرح کے مقناطیسی مسئلہ میں جس پر بعد میں بحث ہوگی، یہ مقناطیسی اشیا پر یا کرنٹ لے جانے والے چالکوں پر قوتوں کا حساب لگانے میں کارآمد ہے۔

اُس خصوصی حالت میں جب کہ زور ایسی سطحوں پر سے ترسیل ہوتے ہیں جو یا تو برقی میدان کے عمودی ہوں یا اُس کے متوازی تو ہمیں ایک سادہ حالت جیسے شکل 6-3. کے پہلے دو حصوں میں دکھایا ہے ملتی ہے جہاں میدان $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ قدر کا ایک کھنچاؤ میدان کے عمودی سمت میں سطح سے ترسیل کرتا ہے اور $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ قدر کا ایک دھکا سطح کے آرپار ترسیل کرتا ہے جو میدان کے

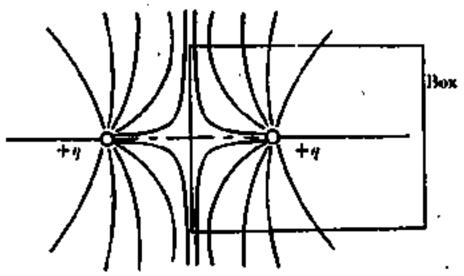
ہوتا ہے۔ ایک ایسی سطح پر جس کی تشریق میدان سے 45° ہے اور جیسے بھی شکل 6-3. میں دکھایا گیا ہے ایک قوت لگے گی جو سطح کے متوازی ہوگی اور جس کی قدر بھی $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. ہوگی۔



[شکل 6-3. ایسے میدانوں کے لیے زور جو ایک سطح کے عمودی متوازی یا 45° کے زاویہ پر ہوں]



[شکل 6-4. برابر اور مخالف چارجوں کے لیے قوت خطوط]



[شکل 6-5 برابر اور ایک ہی طرح کے چارجوں کے لیے قوت خطوط]

اِن رشتوں کو آسان حالتوں کے لیے دکھایا جا سکتا ہے مثلاً دو برابر

یا مخالف چارجوں کے درمیان کشش اور دفع ۔ مثال کے طور پر اگر ہم ایک ہی قدر کے لیکن مختلف نشان والے دو چارج لیں تو قوت خطوط شکل 6-4 کے مانند ہوں گے ۔ اگر زور ٹینسر کا اینٹگرل ایک بکس کی سطحوں کے اوپر لیا جائے جب کہ ایک سطح دونوں چارجوں کے بیچ تشاکل کا مستوا ہو اور باقی سطحیں لامتناہیہ پر ہوں تو اس طرح سے ملنے والی عبارت مساوات (1-24) کے کولوم کھنچاؤ کے مطابق ہوگی ۔ اگر ہم دو برابر یکساں چارج لیں جیسے شکل 6-5 میں ہیں اور وہی پہلے والا بکس لیں تو قوت خطوط، تشاکل کے مستوا پر متوازی ہوں گے جس کا نتیجہ دفع ہوگا جس کی قدر کو اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ کولوم دفع کے مطابق ہوگی۔

۶-۶ برق گزاروں کی موجودگی میں برق سکونی میدان میں حجمی قوتیں

ایک برق گزار جسم پر جب کہ وہ ایک باہری برقی میدان کے زیر اثر ہو فی اکائی حجم کام کرنے والی قوت کو (آزاد) توانائی سے جو مساوات (6-14) سے ملتی ہے اخذ کیا جا سکتا ہے ۔

مساوات (6-14) کو اخذ کرنے میں ہم نے ایک خیالی عمل کیا جس میں حقیقی چارجوں کا اضافہ ایک ایسے نظام میں کیا گیا جس میں چارج اور برق گزار سخت پابندیوں کے اندر رکھے تاکہ طبیعی نقلوں میں کوئی کام نہ کیا جا سکے ۔ اب ہم ایک دوسرا خیالی عمل کو لیں گے جس میں چارجوں اور برق گزاروں کی طبیعی سمتی قدروں کو ایک خیالی نقل $\delta\mathbf{x}$ فضا کے ہر نقطہ پر دیا جائے لیکن کسی باہری چارج کا اضافہ نہ کیا جائے ۔ چونکہ ہمیں برق گزاری میدانوں سے ہی واسطہ ہے اس لیے توانائی عبارت (6-14) اس بار بھی استعمال کی جا سکتی ہے گو کہ اسے ایک دوسرا خیالی عمل کے ذریعہ اخذ کیا گیا تھا ۔ جب برق گزار کے ایک اکائی حجم کو ایک $\delta\mathbf{x}$ نقل کیا جائے تو آزاد توانائی میں تبدیلی δU اکائی حجم پر لگی قوت $\mathbf{F}_v$ کے لحاظ سے مندرجہ ذیل ہوگی:

$$\delta U = -\int \mathbf{F}_v \cdot \delta\mathbf{x}\, dv. \qquad (6\text{–}50)$$

اس حقیقت کو مدنظر رکھ کر کہ خیالی نقل $\delta\mathbf{x}$ کی قدر بالکل من مانی ہے ہم مساوات (6-50) میں $\mathbf{F}_v$ کو حقیقی حجمی قوت مان سکتے ہیں۔ اس جانکاری کو ہم ایک مختلف طریقہ سے رکھ سکتے ہیں: اگر $\mathbf{u}$ برق گزار کے اندر کوئی من مانا رفتار کا میدان ہو تو جس شرح سے میدان توانائی کھو رہا ہے وہ یہ ہے:

$$\frac{dU}{dt} = -\int \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{u}\, dv, \tag{6-51}$$

جہاں $\mathbf{F}_v$ پھر حجمی قوت ظاہر کرتا ہے۔

اب ہم نقل سے پیدا ہوئی حقیقی تقسیم چارج کی تبدیلی $\delta\rho$ اور نوعی ترغیبی سمائی کی تبدیلی $\delta\kappa$ دونوں وجوہات سے ہوئی توانائی کی تبدیلی پر غور کریں گے۔ مساوات (6-14) سے

$$\begin{aligned}\delta U &= \tfrac{1}{2}\delta\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dv \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\int D^2\,\delta(1/\kappa)\, dv + \int \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\, dv \end{aligned} \tag{6-52}$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\,\delta\kappa\, dv + \int \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\, dv. \tag{6-53}$$

یہاں پہلی رقم توانائی کی اس تبدیلی کو ظاہر کرتی ہے جو خیالی نقل سے پیدا ہوئے برق گزار مستقلہ میں تبدیلی کی وجہ سے ہے اور دوسری رقم ماخوذ ولی کے نقل سے پیدا توانائی کی تبدیلی ہے۔ حصوں میں اینٹگریشن کے معمول کے طریقے سے دوسری رقم کو چھوٹا کیا جا سکتا ہے:

$$\int \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\, dv = -\int \nabla\phi\cdot\delta\mathbf{D}\, dv \tag{6-54}$$

یہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ خیالی نقلوں $\delta\mathbf{x}$ کی مطابق خیالی رفتاریں $\mathbf{u}$ اتنی کافی دھیمی ہیں کہ عمل ہم تابی اندر جعتی دونوں ہے۔ ایسی حالت میں آزاد توانائی کی تبدیلی کو کیے گئے میکانکی کام کے برابر رکھا جا سکتا ہے۔

$$= \int \phi \nabla \cdot (\delta \mathbf{D})\, dv = \int \phi \delta \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv$$

$$= \int \phi\, \delta\rho\, dv. \qquad (6\text{–}55)$$

اس لیے مساوات(6-53) ہو جاتا ہے :

$$\frac{dU}{dt} = \int \left(\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) dv. \qquad (6\text{–}56)$$

$\mathbf{F}_e$ کی عبارت پر پہنچنے کے لیے ہمیں مساوات(6-56) کے وقتی تفرقی ماخذوں $\partial \rho/\partial t$ اور $\partial \kappa/\partial t$ کو من مانے رفتار کے میدان $\mathbf{u}$ کے لحاظ سے ظاہر کرنا ہوگا۔ یہ رفیق حرکیات کے تسلسل کے مساواتوں کے ذریعے کیا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad (6\text{–}57)$$

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0, \qquad (6\text{–}58)$$

جو ترتیب سے چارج کی برقراریت اور کمیت کی برقراریت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر ρ_m مادی کثافت ہو جیسے ρ چارج کثافت ہے تو $\partial \kappa/\partial t$ کا حساب لگانے کے لیے ہمیں برق گزار مستقلہ کی تبدیلی کو بہاؤ کی رفتار سے منسلک کرنا ہوگا۔ چونکہ رفتار کے میدان میں اشیا کی خالص منتقلی ہوتی ہے اس لیے برق گزار مستقلہ کی تبدیلی کو جیامٹری تبدیلیوں سے منسلک کرنا صرف اُس وقت ممکن ہے جب ہم ایک حجمی قطعہ کی جو $\mathbf{u}$ رفتار سے حرکت کر رہا ہے، وقت کی تاریخ کو بھی دھیان میں رکھیں۔ کسی مخصوص مقدار جیسے κ یا ρ_m کا پورا تفرقی اخذ جو اس طرح لیا گیا ہے کہ اس تفرقی اخذ کا نقطہ مشاہدہ ایک منتخب حجمی قطعہ کے ساتھ ایک رفتار کے میدان میں حرکت کرتا ہے حقیقی تفرقی اخذ کہلاتا ہے اور اس کا رشتہ جزوی اخذوں اور رفتار $\mathbf{u}$ سے، اس طرح ہے:

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial t} = (\nabla \kappa) \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \kappa}{\partial t}. \qquad (6\text{–}59)$$

اس لیے دریافت طلب جزوی اخذ یہ ہیں :-

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -\nabla\kappa \cdot \mathbf{u} + \frac{D\kappa}{Dt},$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\nabla\rho_m \cdot \mathbf{u} + \frac{D\rho_m}{Dt}. \qquad (6\text{–}60)$$

اگر حالت کا برق گزار مساوات ہو یعنی ایسا رشتہ جو برق گزار مستقلہ کا کثافت پر انحصار بتائے جیسے کہ مساوات (2-39) کا کلاسیس سوسائی رشتہ ہے تو برق گزار مستقلہ کے حقیقی تفرقی اخذ کو کثافت کے حقیقی تفرقی اخذ کے لحاظ سے اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{d\kappa}{d\rho_m}\frac{D\rho_m}{Dt}, \qquad (6\text{–}61)$$

جہاں $d\kappa/d\rho_m$ برق گزار کی ایک معلوم صفت ہے۔
اس مفروضہ میں کہ برق گزار مستقلہ صرف مادی کثافت پر ہی منحصر ہے یہ مفروضہ بھی لازمی طور سے شامل ہے کہ خیالی عمل ہم تاپی ہیں۔ مساوات (6-61) کے جز $D\rho_m/Dt$ کی قیمت مساوات (6-60) اور مساوات تسلسل کی مدد سے نکالی جاتی ہے اس طرح

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{d\kappa}{d\rho_m}\left(\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\rho_m \cdot \mathbf{u}\right)$$

$$= \frac{d\kappa}{d\rho_m}[\nabla\rho_m \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\rho_m\mathbf{u})] = -\frac{d\kappa}{d\rho_m}\rho_m(\nabla \cdot \mathbf{u}). \qquad (6\text{–}62)$$

اس لیے

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -\frac{d\kappa}{d\rho_m}\rho_m(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla\kappa) \cdot \mathbf{u}. \qquad (6\text{–}63)$$

مساوات (6-56) کو اب اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{dU}{dt} = \int\left[-\phi\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) + \frac{\epsilon_0}{2}E^2\frac{d\kappa}{d\rho_m}\rho_m(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2\nabla\kappa\right) \cdot \mathbf{u}\right]dv. \qquad (6\text{–}64)$$

اینٹگرینڈ کو کسی عبارت اور رفتار $\mathbf{u}$ کے نقطہ ضرب dot product کی شکل میں لانا ہوگا اگر ہمیں $\mathbf{F}_v$ کی شناخت کرنا ہے، پہلی رقم کو اس شکل

میں لکھا جا سکتا ہے۔ اگر ہم حصّوں میں اینٹگرل لینے کے لیے مساوات (6-6) کا استعمال کریں اور یہ مان لیں کہ سطح کے حدود برق گزار کے باہر ہیں اور اس لیے چارج کثافت کے خطّے کے باہر ہیں، نتیجہ یہ ملتا ہے:

$$-\int \phi \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})\, dv = \int \rho \nabla \phi \cdot \mathbf{u}\, dv. \qquad (6\text{-}65)$$

اسی طرح دوسری رقم کو چاہی ہوئی شکل میں رکھا جا سکتا ہے اگر ہم ایک سطحی رقم چھوڑ دیں

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \rho_m \frac{d\kappa}{d\rho_m} \nabla \cdot \mathbf{u}\, dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \left(E^2 \frac{d\kappa}{d\rho_m} \rho_m \right) \cdot \mathbf{u}\, dv. \qquad (6\text{-}66)$$

اس لیے مساوات (6-64)

$$\frac{dU}{dt} = \int \left[-\rho \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla \kappa - \frac{\epsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \frac{d\kappa}{d\rho_m} \rho_m \right) \right] \cdot \mathbf{u}\, dv, \qquad (6\text{-}67)$$

ہو جاتا ہے۔ اور مساوات (6-67) اور (6-51) کا موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla \kappa + \frac{\epsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \frac{d\kappa}{d\rho_m} \rho_m \right) \qquad (6\text{-}68)$$

حجمی قوت ہے۔

مساوات (6-68) کی پہلی رقم معمولی برق سکونی حجمی قوت ہے جو مساوات (1-23) اور (6-41) کے مطابق ہے۔ دوسری رقم ایک ایسی قوت کا اظہار کرتی ہے جو اس وقت ظاہر ہوگی جب کبھی ایک غیر یکساں برق گزار ایک برقی میدان میں ہوگا۔ آخری کڑی جسے الکٹروسٹرکشن رقم کہتے ہیں۔ ایک برقی گزار حجمی قوت دیتی ہے جب کہ وہ ایک غیر یکساں برقی میدان میں ہو۔ دھیان رکھیے کہ الکٹروسٹرکشن رقم کی قدر $d\kappa/d\rho_m$ کے ذریعہ شے کی حالت کی برقی مساوات پر سیدھی منحصر ہوتی ہے۔ یہ دھیان رکھنا دلچسپ ہوگا کہ اگر ہم برق گزار کے اتنے بڑے حصے پر اینٹگرل لیں کہ اس کے سرے میدان سے خالی خطّہ میں ہوں تو برق گزار کے ایک محدود خطّہ کے لیے یہ رقم کوئی حاصل قوت نہیں دے گی۔ ان حالات میں

الکٹروسٹرکشن رقم خالص گریڈینٹ ہونے کی وجہ سے ہے انٹیگرل میں ختم ہو جاتی ہے اس وجہ سے اس رقم کو اکثر چھوڑ دیا جاتا ہے کیوں کہ برق گزار اجسام پر کل قوت کے حساب میں اس کا عام طور سے حصہ نہیں ہوتا۔ ان حالتوں میں جہاں اسے چھوڑا جا سکتا ہے، برق گزار کے اندر داب کی تبدیلی غلط ملتی ہے گو کہ کل قوت صحیح ملتا ہے۔

6-7 ایک برق سکونی میدان میں برق گزار رقیقوں کا رویّہ

آیئے ہم برق سکونی میدان کی وجہ سے پیدا ہوئی حجمی قوت کے نتیجہ کے طور پر ایک بلا چارج کے رقیق کے رویّہ پر غور کریں۔ اگر رقیق کے اندر میکانیکی داب p ہے جب کہ وہ برقی حجمی قوت کے تعادل میں ہے تو میکانیکی حجمی قوت ∇p - جو داب گریڈینٹ کے نتیجہ کے طور پر پیدا ہوتی ہے $\mathbf{F}_v$ کے برابر اور برعکس ہوگی۔ دوسرے لفظوں میں توازن کی شرط ہے کہ $\mathbf{F}_v + (-\nabla p) = 0,$ جس سے $\mathbf{F}_v = \nabla p.$ تب مساوات (6-68) سے رقیق کے اندر کسی نقطہ پر داب گریڈینٹ اس عبارت سے ملتا ہے:

$$\nabla p = \mathbf{F}_v = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\nabla\kappa + \frac{\epsilon_0}{2}\nabla\left(E^2\rho_m\frac{d\kappa}{d\rho_m}\right) \qquad (6\text{-}69)$$

اس مساوات کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

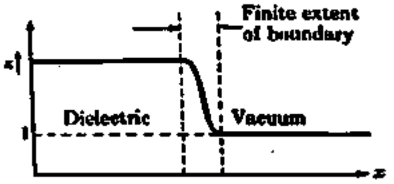
$$\nabla p = \frac{\epsilon_0\rho_m}{2}\nabla\left(E^2\frac{d\kappa}{d\rho_m}\right) \qquad (6\text{-}70)$$

یہ مان کر کہ رقیق کے لیے ایک واضح حالتی مساوات ہے اس کا انٹیگرل لینے پر ہم پاتے ہیں:

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho_m} = \frac{\epsilon_0}{2}\left\{\left[E^2\frac{d\kappa}{d\rho_m}\right]_2 - \left[E^2\frac{d\kappa}{d\rho_m}\right]_1\right\}. \qquad (6\text{-}71)$$

اس مساوات سے یہ اہم حقیقت معلوم ہوتی ہے کہ ایک رقیق برق گزار کے اندر داب کسی دیے نقطے پر برقی میدان کا ایک نادر فنکشن ہے اور اس فنکشن

کا انحصار رقیق کی برقی و میکانکی حالتی مساوات پر ہے۔ مساوات (6-71) یہ بھی بتاتا ہے کہ ایک برق گزار رقیق میں ایسے دو نقطوں کے درمیان جو برقی میدان سے باہر ہیں، داب کا فرق (برقی قوتوں کی وجہ سے) غائب ہو جائے گا۔ اس حالت کا تجزیہ جب حدود شامل ہوں بعد کو ہوگا۔



[شکل 6-6 برق گزار سے خلا میں جاتے ہوئے κ کی مانی ہوئی تبدیلی]

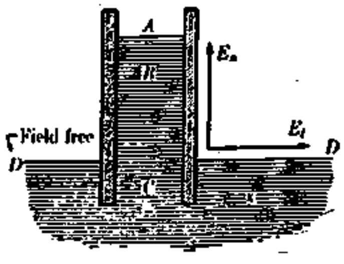
اگر رقیق دب نہیں سکتا تو مساوات (6-71) کی شکل مندرجہ ذیل ہوگی:-

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho_m \epsilon_0}{2}\left[E^2 \frac{d\kappa}{d\rho_m}\right]_1^2, \qquad (6\text{-}72)$$

جس سے داب کے فرق کی قدر کا عددی تخمینہ کلاسیس رشتہ کے ذریعہ یا ایسی ہی حالتی مساوات کے ذریعہ نکالا جا سکتا ہے۔ اگر کلاسیس موسوٹی رشتہ [مساوات (2-39)] جائز ہو تو مساوات (6-72)۔ ناقابل داب رقیق کے لیے

$$p_2 - p_1 = \frac{N_0 \epsilon_0 \rho_m \alpha}{18M}\left[E^2(\kappa + 2)^2\right]_1^2 = \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\,\frac{(\kappa - 1)(\kappa + 2)}{3}\right]_1^2, \qquad (6\text{-}73)$$

ہو جاتا ہے۔ برق گزاروں کے بیچ کے مشترکہ حد پر کام کرنے والی مزاحمتی قوتوں کی ایک مثال کے طور پر آیئے ہم نوعی ترغیبی سمائی κ کے ایک برق گزار اور خلا کے درمیان کی حد کی مثال لیں۔ ہم یہ مان لیتے ہیں کہ ڈائیلکٹرک سے خلا میں پہنچنے کا عمل سلسلہ وار طریقہ سے ہوتا ہے جیسا شکل 6-6 میں دکھایا ہے۔ سہولیت کے لیے مسئلہ دو ابعادی لے لیجیے جس میں کپیسٹر پلیٹوں کا ایک جوڑا ایک ڈائیلکٹرک رقیق میں ڈوبا ہوا ہے جیسا شکل 6-7 میں دکھایا ہے۔ اگر A اور D کے درمیان صرف خالص داب کا فرق ہی معلوم کرنا مقصود ہو تو یہ کافی ہوگا کہ مساوات (6-68) کی اسی رقم کا اینٹگرل لیا جائے جو ڈائیلکٹرک



[شکل 6-7. دو کپیسیٹر پلیٹیں ایک ڈائیلکٹرک رقیق میں ڈوبی ہوئی۔ میدان سے پاک نقطہ D ڈائیلکٹرک میں کہیں بھی چارج داں سے کافی دور ہو سکتا ہے۔ اسے سطح پر کا نقطہ اس لیے دکھایا گیا ہے جس میں سکونی رقیقائی داب سے موازنہ آسان ہو جائے]

مستقل کے گریڈینٹ کے تناسب میں ہے۔ حاصل برقی داب کا فرق جسے رقیق سکونی اثرات سے متوازن ہونا ہے یہ ہوگا :-

$$p_A - p_D = \frac{\epsilon_0}{2}\int_A^D E^2 \nabla\kappa \cdot d\mathbf{x}, \qquad (6\text{–}74)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int_A^B E^2 \nabla\kappa \cdot d\mathbf{x}, \qquad (6\text{–}75)$$

چونکہ اینٹگرینڈ صرف حد $A \rightarrow B$ پر ہی صفر سے مختلف ہے۔ اس لیے

$$p_A - p_D = \frac{\epsilon_0}{2}\int_A^D (E_t^2 + E_n^2)\frac{d\kappa}{dx}\,dx. \qquad (6\text{–}76)$$

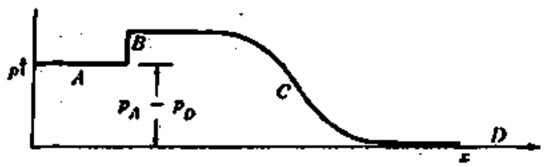
اگر برقی میدان کے عمودی اور مماسی اجزا پر مساوات (2-15) اور (2-18) کی حدودی شرائط عائد کی جائیں تو مساوات (6-76) یہ ہو جاتا ہے :

$$p_A - p_D = \frac{\epsilon_0}{2}\left[E_{t_B}^2(\kappa - 1) + \kappa^2 E_{n_B}^2 \int_A^B \frac{d\kappa}{\kappa^2}\right]$$

$$= \frac{\epsilon_0(\kappa - 1)}{2}[E_t^2 + \kappa E_n^2]_B. \qquad (6\text{–}77)$$

یاد رکھیے کہ مساوات (6-77) کی میدانی قدریں رقیق کے اندر کے لیے ہیں۔

کپیسٹر کی پلیٹوں کے درمیان رقیق کتنا اوپر اٹھ جاتا ہے، یہ اس فارمولہ کے سیدھے استعمال سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ لیکن چونکہ اس میں الکٹروسٹرکشن کی رقم شامل نہیں ہے اس لیے یہ رقیق میں A سے D تک داب کے رویہ کا تفصیل سے بیان نہیں کرتی۔ درحقیقت A سے B جانے میں داب میں تبدیلی کا نشان A سے D. تک جانے میں تبدیلی کے نشان سے الٹا ہے۔ شکل 6-8. میں داب کا رویہ تفصیل سے دکھایا گیا ہے۔ B سے D کی طرف جوں جوں میدان کم ہوتا ہے داب A پر باہری قدر کے مقابلہ میں کم ہوتا جاتا ہے۔ یہ کمی مقدار میں اتنی ہوتی ہے جو کہ A-B. سطح پر کے داب میں اضافہ سے زیادہ ہوتی ہے۔ کل فرق کا حساب جسے مساوات (6-77) میں لگایا گیا ہے صرف A اور D کے درمیان کا فرق دیتا ہے۔ جو داب کہ رقیق کو اوپر اٹھاتا ہے وہ رقیق کی سطح پر نہیں لگتا بلکہ دراصل خطہ C میں لگتا ہے جہاں میدان غیر یکساں ہے۔



[شکل 6-8.) A سے D تک کی داب کی تبدیلی کی تفصیل ۔ محض A سے میدان سے پاک نقطہ D تک اینٹگریشن کا راستہ ہے اور $p_A - p_D$ مساوات (6-77) سے ملتا ہے]

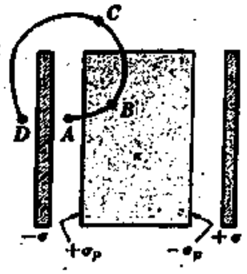
اس کا طبیعی سبب یہ ہے کہ دوقطبوں کی کسی برقی میدان میں توانائی میدان سے پاک خطے کے مقابلہ میں کم ہوتی ہے اور اس لیے رقیق کے دوقطبے زیادہ شدید میدان والے خطے میں کھنچ جاتے ہیں جس میں اس شرط کی پابندی ہوسکے کہ مضمر توانائی کمترین ہونی چاہیے۔ دوقطبوں پر یہ عمل خطہ C میں ہوتا ہے جہاں میدان بڑھنا شروع ہوتا ہے A-B پر الکٹروسٹرکشن کی وجہ سے کمی جزوی طور پر کمترین توانائی والے اس اثر کو منسوخ کر دیتی ہے اور نتیجہ میں مساوات (6-77) کا کل داب کا فرق ملتا ہے۔

ایک دوسری مثال بیحد آسان معلوم ہوتی ہے لیکن ایک ظاہری تضاد پر پہنچاتی ہے۔ اگر چارج شدہ چالکوں کا ایک سٹ اس طرح ترتیب دیا جائے کہ انھیں ساری فضا کو بھرنے والے ایک رقیق میں ڈبویا جا سکے اور اگر جس وقت رقیق ان کے درمیان داخل کیا جا رہا ہو، ان چالکوں کے حقیقی چارج مستقل رکھے جائیں تو نظام کی مساوات (6-14) سے ملی آزاد توانائی ایک جز $1/\kappa$ سے گھٹ جائے گی کیونکہ D مستقل رہتا ہے لیکن E گھٹ جاتا ہے۔ دوسری طرف اگر مضمر ول کو ان کی شروع کی قیمتوں پر بنائے رکھا جائے جب رقیق کو داخل کیا جائے تو آزاد توانائی ایک جز κ سے بڑھ جائے گی کیونکہ اس حالت میں E مستقل رہتا ہے لیکن D بڑھ جاتا ہے۔ لازمی طور پر یہ بحث اسی حالت میں لاگو ہو سکتی ہے جب کہ چالکوں کے درمیان کی اور ان کے باہر کی ساری فضا ڈئیلکٹرک رقیق سے بھری ہو۔ کم سے کم ساری فضا جہاں برقی میدان ہیں اس طرح بھری ہونی چاہیے کیونکہ ایسا نہ ہونے پر ہم یہ نہیں مان سکتے کہ جب ڈائیلکٹرک (برق گزار) سے چالکوں کے درمیان داخل کی جاتی ہے تو E اور D کی تقسیم برقرار رہتی ہے۔

اس کا مطلب ہے کہ اگر ایک نظام کو جسے مستقل چارج پر رکھا جاتا ہے پورے طور سے ایک ڈائیلکٹرک رقیق سے گھیر دیا جائے تو ساری میکانکی قوتیں $1/\kappa$ کے تناسب میں کم ہو جائیں گی۔ قوت کی اس کمی کو ظاہر کرنے کے لیے کولوم قانون کی عبارت میں اکثر ایک جز $1/\kappa$ شامل کر دیا جاتا ہے۔ قوت میں اس کمی کی جس کا ہونا توانائی کے خیال سے لازم ہے، طبیعی اہمیت اکثر سمجھ میں نہیں آتی۔ ایک میدانی نظریہ کی بنیاد پر یہ سمجھنا مشکل ہے کہ دو چارجوں کے درمیان تفاعل کو کیوں دونوں کے درمیان مادہ کی حالت یا ماہیت پر منحصر ہونا چاہیے اور اس لیے کولوم قانون میں ایک زائد جز $1/\kappa$ کے شامل کرنے کی کوئی طبیعی وجہ نہیں ہے۔

اس کی کھوج کرنے کے لیے آیئے ہم متوازی پلیٹ چالکوں کا ایک جوڑا لیں جن کے درمیان ایک ٹھوس ڈائیلکٹرک کی پٹی داخل کر دی گئی ہے، جیسا شکل (9-6

میں دکھایا ہے۔ مان لیجیے کہ کپیسیٹر کی ہر پلیٹ پر فی اکائی رقبہ $\pm\sigma$ سطحی چارج ہے اور بیچ کے ڈائیلکٹرک کی باہری سطح پر $\pm\sigma_p$ تقطیبی چارج کے دونوں پرت ہر پلیٹ پر برابر اور مخالف میدان پیدا کریں گے اور اس لیے ان کے اثرات ایک دوسرے کو منسوخ کر دیں گے۔ صرف برقی تفاعل کے نقطہ نگاہ سے یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ ڈائیلکٹرک پرت داخل کرنے پر آخر قوت میں کوئی تبدیلی کیوں نہیں آتی ہے کیونکہ σ چارجوں کے درمیان جنھیں مان لیا گیا ہے کہ مستقل بنے رہتے ہیں۔ واحد سیدھا تفاعل ڈائیلکٹرک پٹی کے داخل کرنے سے اثر انداز نہیں ہوتا۔ یعنی اکائی رقبہ پر قوت



[شکل (6-9) متوازی پلیٹوں والا کپیسیٹر ایک ٹھوس ڈائیلکٹرک پٹی کے ساتھ]

$$F_s = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \tag{6-78}$$

اس وقت تک بنی رہتی ہے جب تک ڈائیلکٹرک کپیسیٹر کی پلیٹوں کو چھو نہ لے۔ اس لیے قوت کا گھٹ کر

$$F_s = \frac{\sigma^2}{2\kappa\epsilon_0}, \tag{6-79}$$

ہو جانا جو پلیٹوں کو بھگونے والے اور انھیں پوری طرح گھیرنے والے ایک رقیق سے تجربہ کرنے پر محسوس ہوتا ہے صرف برقی قوتوں کی مدد سے ہی سمجھایا نہیں جا سکتا۔

یہ ظاہری تضاد میدان سے بھرے خطے کے رقیق اور میدان سے پاک کپیسٹر کی پلیٹوں کے باہر خطے کے رقیق کے درمیان داب کے فرق کو شمار میں لے کر سمجھا جاسکتا ہے۔ شکل 6-9 کے ٹھوس ڈائیلکٹرک میں اس داب کے فرق کو اندرونی الاسٹک قوتیں متوازن کرلیتی ہیں لیکن رقیق میں یہ پلیٹوں کو ترسیل ہوجاتا ہے۔ خیال کیجیے کہ شکل 6-9. میں جگہ A ایک انتہائی کم موٹائی کے غیر تقطیب پذیر سیال سے بھرا ہے جو میکانکی داب کی ترسیل کرسکتا ہے تب ہم داب کے فرق $p_A - p_D$ کا حساب مساوات (6-77) کے مطابق لگا سکتے ہیں۔ علاوہ ازیں راستہ $ABCD$ کے اوپر داب کی تبدیلی صفائی طور پر شکل 6-8. کے خم کی پیروی کرتی ہے۔ مساوات (6-77) سے اس حقیقت کا استعمال کرکے کہ E کا عمودی جزو صرف مشترکہ سطح AB پر ہی ہے، ہم پاتے ہیں کہ داب کا فرق مندرجہ ذیل ہے؛

$$p_A - p_D = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) D_n^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right). \qquad (6\text{-}80)$$

اس داب کی وجہ سے پیدا ہوئی قوت اور مساوات (6-78) سے ملی خالص برقی قوت دونوں کے جوڑ سے مساوات (6-79) کی مکمل قوت ملتی ہے جسے توانائی کے غور و خوض سے اخذ کیا جاچکا ہے۔ اس طرح سے دو چارجوں کو ایک ڈائیلکٹرک رقیق میں ڈبونے پر ان کے درمیان محسوس کی جانے والی قوت میں کمی جب ہی سمجھ میں آسکتی ہے جب کہ چارجوں پر رقیق کے دباؤ کو دھیان میں رکھا جائے۔ دور۔ پر۔ تفاعل کے نظریے کے فلسفہ کے مطابق چارجوں کے درمیان خالص برقی تفاعل میں کوئی تبدیلی نہیں آتی۔

مجوّزہ حوالے

M. Abraham and R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism.*

ہماری بحث کا زیادہ تر حصہ اس کتاب کے باب 5 کے متوازی ہے؛

J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory.*

باب 2 کا پہلا حصہ برق سکونی زور اور توانائی پر ہے۔

J. H. JEANS, *Electricity and Magnetism.*

برق سکونی میدان میں وسیلے کی حالت پر باب 6 میدانی بنام دور - پر تفاعل کی بحث سے شروع ہوتا ہے لیکن تفصیلی بحث کچھ مختصر ہے۔

M. MASON AND W. WEAVER, *The Electromagnetic Field,*

خاص طور سے سکشن 2 اور 37.

L. D. LANDAU AND E. M. LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media.*

برقی میدانوں کی حرحرکیات پر ایک عمدہ بحث کے لیے خاص طور سے باب 2 دیکھیے۔

مشق

1- q_1 قیمت کے دو چارج ایک دوسرے سے فاصلہ a پر کولوم قانون کے مطابق دفعائی زور لگاتے ہیں ان میں سے ایک کے گرد ایک مناسب سطح لیجیے اور میکسویل کے زور ٹینسر کا انٹگرل نکال کر F کا حساب لگائیے۔

2. A نصف قطر کا ایک چالک کرّوی شیل ایک یکساں میدان E میں رکھا ہے۔ دکھائیے کہ وہ قوت جو   کے عمودی کسی قطری مستوا پر کرّہ کے دو نصفوں کو الگ کرنے کی طرف مائل ہے اس سے ملتا ہے:-

$$F = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 a^2 E^2 \qquad (6\text{-}31)$$

3 - $2a$ چوڑی ایک لمبی چپٹی چالک پٹی ہے جس کی دھری ایک یکساں میدان کے عمودی ہے اور جس کا مستوا میدان سے زاویہ θ بناتا ہے۔ پٹی کی اکائی لمبائی پر کام کرنے والا مروڑی گردشہ کیا ہے؟

4.- گردشہ p کا ایک دو قطبہ ایک یکساں میدان E میں رکھا ہے۔ ایک کرّہ پر جس کا مرکز دو قطبہ ہے۔ میکسوئل ٹینسر کے گردشہ کا سیدھا انٹگریشن کرکے دکھائیے کہ ٹارک رواجی نتیجہ $p \times E$ کے برابر ہے۔

5.- ایک چارج q کی۔ جو r_0 نصف قطر کے ایک کرہ کی سطح پر یکساں منقسم

ہے۔ برق سکونی توانائی معلوم کیجیے۔ اگر یہی چارج پورے کرّے کے اندر یکساں پھیلا ہوا ہو تو توانائی کیا ہوگی؟ (دونوں حالتوں میں توانائی کی قیمت $q^2/4\pi\epsilon_0 r_0$ کے درجہ کی ہے)

6۔ دو ایک دوسرے میں پیوست کرّوں کی تفاعلی توانائی نکالیے جن کی یکساں چارج کثافت ρ_1 اور ρ_2 ہے۔ مان لیجیے کہ دونوں کرّوں کا نصف قطر a ہے اور مرکزوں کی دوری $d < a$ ہے، دکھائیے کہ آپ کا جواب ان انتہائی حالتوں میں متوقع قیمتیں دیتا ہے۔ (a) $d = 0$، اور (b) $d = a$.

7۔ دکھائیے کہ اگر مساوات (6-44) کے میکسویل ٹینسر کی جگہ

$$T_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})(1 - b), \tag{6-82}$$

رکھ دیا جائے جہاں

$$b = \frac{\rho_m}{\kappa}\left(\frac{d\kappa}{d\rho_m}\right), \tag{6-83}$$

تو مساوات (6-40) حجمی قوت کی مساوات (6-68) دیتا ہے جسے توانائی کے خیال سے اخذ کیا گیا تھا۔ اس لیے مساوات (6-82) کو ڈائیلکٹرکوں کی موجودگی میں میکسویل کے زور ٹینسر کی طرح استعمال کیا جا سکتا ہے۔

8۔ مساوات (6-77) سے وہ اونچائی h اخذ کیجیے جس تک شکل 6-7 کا ڈائیلکٹرک رقیق اٹھے گا۔ اگر رقیق۔ خلا حد سپاٹ ہے اور کھڑی پلیٹوں کے عمودی ہے۔ بنیادی توانائی کے خیال سے بھی h معلوم کیجیے۔

باب (7)

مستقل کرنٹ اور ان کے تفاعل

برقی سکونیات کی بحث میں صرف چارج کی ساکن تشکیل زیر غور تھیں۔ اب ہم چارج کے بہنے کا یا کرنٹ کا جائزہ لیں گے۔ آرسٹیڈ کی دریافت کے مطابق ہر کرنٹ کے ساتھ ایک مقناطیسی میدان وابستہ ہوتا ہے اور اس لیے کرنٹوں پر پوری بحث صرف برقی میدانوں کے ذریعہ غیر ممکن ہے۔ مقناطیسی تفاعل کی چھان بین کرنے سے پہلے ہم ایسی کرنٹوں پر غور کریں گے، جو وقت کے ساتھ بہت آہستہ آہستہ بدلتی ہیں اور جن کے لیے مانا جاسکتا ہے کہ ان کا پورا انحصار موجود برقی میدانوں پر ہے۔ مقناطیسی تفاعل کے مقابلے میں مزاحمتی وسیلے لیٹس ساخت سے کرنٹوں کے تفاعل (جس سے برقی مزاحمت پیدا ہوتی ہے) کے اضافی قدر کی کسی عددی تخمینہ کی غیر موجودگی میں یہ از خود ظاہر نہیں ہے کہ کبھی ایسی حالت ہوتی ہے جس میں کرنٹ صرف برقی میدانوں پر ہی منحصر ہوتی ہے۔ لیکن یہ دیکھا گیا ہے کہ مقناطیسی اثرات کو اس حالت میں نظر انداز کیا جا سکتا ہے جب میدان بہت کم تواتر سے بدل رہے ہوں، بشرطیکہ اس چالک کی جسامت اس میں کرنٹ کی "جلد گہرائی" کے مقابلے میں چھوٹی ہو۔ ہم ایک اور اثر کو بھی جسے ہال اثر کہتے ہیں چھوڑ دیں گے جو صفر تواتر بھی موجود رہتا ہے اور جو کرنٹ لے جانے والے چالک کی ہم مضمری سطحوں میں رد و بدل کر دیتا ہے کچھ خاص اشیا کو چھوڑ کر اور سبھی میں یہ اثر بہت ہی چھوٹا ہوتا ہے۔

7-1 اوم کا قانون

کسی ذریعہ میں چارج کی برقراریت کو تسلسل کے مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر ذریعہ کے

اندر کرنٹ کثافت $\mathbf{j}$ ہو تو سطح S سے گھرے ایک حجم V سے جس شرح سے چارج باہر نکلتا ہے وہ $\int_S \mathbf{j}$ by سے ملتی ہے۔ چارج کی برقراریت کی وجہ سے یہ انٹیگرل

$$-\frac{dq}{dt} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV,$$

کے برابر ہے جہاں q وہ چارج ہے جو V کے اندر ہے۔ گاس کے مصدقہ سے تب ہمیں تسلسل کا مساوات ملتا ہے:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (7\text{–}1)$$

اگر کسی نقطہ پہ کوئی چارج جمع نہیں ہوتا تو کرنٹ کو مستقل کہتے ہیں۔ مستقل بہاؤ ہونے کی کسوٹی یہ ہے کہ :-

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \qquad (7\text{–}2)$$

کرنٹ نظریے کا برقی میدان کے نظریے سے رشتہ قائم کرنے کے لیے ایک ایسے مساوات کی ضرورت ہے جو چالک شے کے کسی خاص نقطہ پہ کرنٹ اور میدان میں رشتہ بتائے۔ بہت سی حالتوں میں ان دونوں میں سادہ تناسب ہوتا ہے اس لیے

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \qquad (7\text{–}3)$$

یہاں σ شے کی برقی چالکتا ہے جو mks نظام میں mho فی میٹر میں ناپی جاتی ہے۔ مساوات (3–7) اوم قانون کے مساوی ہے۔ یہ رشتہ ایک مظہراتی خاصہ ہے اور اس کا اطلاق کسی معنی میں عالمگیر نہیں ہے۔ کرنٹ کثافت جس رینج کے لیے مساوات (3–7) جائز ہے اُسے اس شے کا خطی رینج کہتے ہیں۔ یہ بہت بڑا ہو سکتا ہے جیسا دھاتوں کے لیے اور بہت کم بھی ہو سکتا ہے، جیسا نیم چالکوں کے لیے۔ مساوات (3–7) کا مطلب ہے کہ وسیلہ یکساں ہے۔ کم تشاکل کے کرسٹلوں میں اس مساوات کی جگہ ایک ٹینسر مساوات لینا ہوگا۔

7-2 برق محرک قوت

ایک خالص غیر گردشی میدان میں مستقل کرنٹ غیر ممکن ہے کیوں کہ ایک مستقل کرنٹ میں ایک فی اکائی حجم کی شرح سے توانائی صرف ہوتی ہے

اور یہ توانائی ایک غیر گردشی میدان مہیا نہیں کر سکتا۔ مستقل کرنٹ جب ہی ممکن ہے جب کہ برقی میدان کے ایسے آخذ جنھیں برق محرک قوت کہتے ہیں اور جو گردشی میدان پیدا کرتے ہیں، موجود ہوں۔ اگر ہم یہ مان لیں کہ ایسے برق محرک قوت کے میدان موجود ہیں اور انھیں E' سے ظاہر کریں جبکہ E وہ میدان ہے جسے ایک مضمر سے اخذ کیا جا سکتا ہے تو چالکتا مساوات یہ ہو جاتا ہے[1]

$$j = \sigma(E + E'). \qquad (7\text{-}4)$$

ہم برق محرک قوت $\mathcal{E}$ کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں:

$$\mathcal{E} = \oint (E + E') \cdot dl = \oint E' \cdot dl = \oint \frac{j \cdot dl}{\sigma}. \qquad (7\text{-}5)$$

میدان کا برقراری حصّہ E، بند خطی اینٹگریشن میں نکل جاتا ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ کرنٹ صرف غیر برقراری قوتوں کی وجہ سے ہے گو کہ اس پر چالکتا اور جیامٹری کا اثر پڑتا ہے۔

اس حالت میں جب کرنٹ کثافت اینٹگریشن کے راستے کے بیشتر حصّوں پر تقریبًا مستقل ہے جیسا کہ اکثر ہوتا ہے، مساوات (7-5) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\mathcal{E} = J \oint \frac{dl}{\sigma S} = JR. \qquad (7\text{-}6)$$

یہاں $J = |j|S$ پوری کرنٹ ہے جو سرکٹ کے لیے مستقل ہے (ایمپیر) S چالک کی عرضی تراش کا رقبہ ہے جہاں کرنٹ کثافت j ہے اور R چالک کی مزاحمت ہے (اوم)۔ $\mathcal{E}$ کو وولٹ میں ناپا جاتا ہے۔ اکثر مساوات (7-6) کی شکل میں اوم کے قانون کو بیان کیا جاتا ہے۔

---

[1] یہاں E میں سب برق سکونی میدان شامل ہیں، وہ بھی جو مقناطیسی ترغیب سے پیدا ہوتے ہیں جو خود برقی میدان کے حصّہ دار ہوتے ہیں، جیسا ہم باب 9 میں دیکھیں گے۔

دھیان رکھیے کہ ایسی حالت میں جب کرنٹ نہ ہو تو مساوات (7-4) کا دو نقطوں 1 اور 2 کے درمیان ایک خط پر جو اس سارے خطّے سے گزرتا ہے جس میں غیر برقراری میدان ہے اینٹگریشن کرنے پر ہم پاتے ہیں کہ

$$-\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}. \qquad (7\text{-}7)$$

جو یہ دکھاتا ہے کہ دو نقطوں کے درمیان کھلی سرکٹ پر برق سکونی وولٹیج سرکٹ کے پورے برق محرک قوت کے برابر ہے۔ مساوات (7-4) سے یہ بھی اخذ ہوتا ہے کہ اس خطے میں جہاں $\sigma \neq 0$ اور جہاں غیر برقراری میدان ہوں وہاں کرنٹ کی غیر موجودگی میں $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$ اس طرح، مثال کے طور پر ایک دیے حد کے اندر غیر برقراری میدان (مثلاً کیمیائی مضروں کی وجہ سے) اس برق سکونی میدان کے بالکل برابر ہوگا جو کہ حد پر کے چارجوں کی وجہ سے بنتا ہے اگر کوئی کرنٹ نہ ہو۔

7-3 قائم کرنٹ مسئلوں کے حل

کرنٹ تقسیم اور میدان تقسیم کی پوری پوری جانکاری غیر استمراری میدان اور وسیلے کی جانکاری سے ہو جاتی ہے۔ مساوات (1-28)، (7-2) اور (7-4)، کا استعمال کر کے ہم $\mathbf{E}$ اور $\mathbf{j}$ کی عبارتوں کو $\mathbf{E}$ کے لحاظ سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{j} &= 0,\\
\nabla\times\left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma}\right) &= \nabla\times\mathbf{E}',\\
\nabla\cdot(\sigma\mathbf{E}) &= -\nabla\cdot(\sigma\mathbf{E}'),\\
\nabla\times\mathbf{E} &= 0.
\end{aligned} \qquad (7\text{-}8)$$

اُس خطّے میں جہاں کوئی غیر استمراری میدان نہیں ہیں، $\mathbf{E}$ کو ایک مضمر سے اخذ کیا جا سکتا ہے، اور اس لیے قائم بہاؤ کی حالت میں مضمر اب بھی لاپلاس مساوات :-

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

$$\nabla \cdot (\sigma\nabla\phi) = 0,$$

کا پابند ہوتا ہے۔ یا اگر σ مستقل ہے تو $\nabla^2\phi = 0$ ۔ لیکن حدودی شرائط سے مختلف ہیں کیونکہ اب چالکتا ہیں نہ کہ ڈائیلکٹرک مستقلے کسی سرحد کے آر پار فلکس رشتہ کا تعین کرتے ہیں۔ غیر استمراری میدانوں کے نہ ہونے پر ہمیں مساوات (7-2) اور (7-3) سے

$$\nabla \cdot (\sigma\mathbf{E}) = 0. \qquad (7\text{-}9)$$

ملتا ہے، باب 2، بیان کیے گئے ڈائیلکٹرکوں کی حالت کے مثل، ڈائیورجنس مساوات میں لاحقے 1 اور 2 کے ذریعے بتائے گئے دو وسیلوں کے درمیان کی سطح پر کے عمودی جز کے لیے حدودی شرط مل جاتی ہے۔ چنانچہ

$$\mathbf{n} \cdot (\sigma_2\mathbf{E}_2 - \sigma_1\mathbf{E}_1) = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot (\sigma_2\nabla\phi_2 - \sigma_1\nabla\phi_1) = 0. \qquad (7\text{-}10)$$

کرل مساوات ہمیں مماسی جز کی شرط پر پہنچاتی ہے:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0,$$

$$\mathbf{n} \times (\nabla\phi_2 - \nabla\phi_1) = 0. \qquad (7\text{-}11)$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قائم کرنٹ تقسیم کے مسئلوں کا حل ریاضیاتی لحاظ سے بالکل وہی ہے جو اسی جیامٹری کے برق سکونی تقسیم مضمر کے مسئلوں کا تھا اگر چالکتا σ کو ڈائیلکٹرک مستقلہ ϵ کی جگہ رکھ دیا جائے، اس لیے وہ سب طریقے جن کی تشریح باب 3، 4، اور 5 میں کی گئی ہے ان مسئلوں کے لیے لاگو ہیں۔ سکونی کرنٹ مسئلوں اور برق سکونی مسئلوں میں صرف ایک ہی فرق ہے وہ یہ کہ ایک دیے خطے میں چالکتا صفر ہو سکتی ہے جبکہ نوعی ترغیبی سمائی ایک سے کم نہیں ہوتی۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ جس قسم کے حدودی قدر مسئلے قائم کرنٹ بہاؤ میں ملتے ہیں، وہ کچھ حالات میں کسی ایسے مسئلے سے بالکل مختلف ہو سکتے ہیں جو برق سکونی حالات میں ملتا ہے۔ ایک مثال کے طور پر اگر ایک کپیسٹر کی دو متوازی پلیٹوں کے بیچ کے خطے کو σ چالکتا کے وسیلہ سے بھر دیں تو قائم کرنٹ

کی رینج میں چالک وسیلے کے اندر کرنٹ پورے رقبہ پر بالکل یکساں ہو گی جبکہ اسی کی مشابہ برق سکونی حالت میں میدان تقسیم صرف قریب قریب یکساں ہوگا اور پلیٹ کے کناروں پر میدان میں گڑبڑی ہو گی۔

عام طور سے اگر دو الکٹروڈوں کے درمیان کی سمائی برق سکونی طریقوں سے معلوم کی جا سکتی ہے تو یہ فوراً معلوم کیا جا سکتا ہے کہ ان دو الکٹروڈوں کے درمیان مزاحمت کیا ہو گی اگر ساری جگہ جس میں وہ مقیم ہیں ایک یکساں وسیلے سے بھر دی جائے۔ دو الکٹروڈوں 1 اور 2 کے درمیان سمائی اس سے ملتی ہے:

$$C = \frac{\kappa\epsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}. \qquad (7\text{–}12)$$

گاس کے فلکس مسئلہ سے شمار کنندہ ہر الکٹروڈ پر چارج ہے اور نسب نما الکٹروڈوں کے درمیان مضمر فرق ہے۔ دو الکٹروڈوں کے درمیان مزاحمت

$$R = \frac{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}, \qquad (7\text{–}13)$$

ہے۔ جہاں نسب نما کرنٹ کی خالص روانی دیتا ہے اور شمار کنندہ مضمر کا فرق ہے۔ مساوات (7-12) اور (7-13) کا موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{1}{R\sigma} = \frac{C}{\kappa\epsilon_0} \qquad (7\text{–}14)$$

یا

$$RC = \frac{\kappa\epsilon_0}{\sigma}. \qquad (7\text{–}15)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ مزاحمت اور سمائی کا ضرب ایک مستقلہ ہے جو صرف چالک کی چالکتا پر اور کپیسیٹر کی پلیٹوں کے درمیان کی شے کی نوعی تمزلیی سمائی پر منحصر ہے۔

جیامٹری پر نہیں۔ بہرحال ایسا برقی سکونی مسئلہ ملنا ہمیشہ ممکن نہیں ہے جو پورے طور سے مطابق قائم کرنٹ مسئلہ کے ہم پلہ ہو کیونکہ ڈائیلکٹرک مستقلوں کی رینج میں اور چالکتاؤں کی رینج میں فرق دونوں حالتوں میں مختلف میدانی شکلیں پیدا کرتا ہے، جیسے اوپر بتایا جا چکا ہے۔ ایک متوازی پلیٹوں کو کپیسیٹر کی سمائی کے لیے فارمولہ جبکہ کنارے کے اثرات کو نظر انداز کر دیا جائے یہ ہے:

$$C = \frac{\kappa\epsilon_0 S}{l}, \qquad (7\text{-}16)$$

جہاں پلیٹوں کا رقبہ ہے اور l ان کے درمیان فاصلہ ہے۔ مساوات (7-15) میں C کی قدر رکھنے پر

$$R = \frac{l}{\sigma S} \qquad (7\text{-}17)$$

مساوات (7-17) اس تار کی مزاحمت دیتا ہے جس کی لمبائی l اور آڑی تراشں کا رقبہ S ہو۔

تار کی مزاحمت کے لیے یہ فارمولا بیشک l کی بڑی قیمتوں کے لیے جائز ہے کیونکہ محیط کرنے والے وسیلے کی صفر چالکتا کرنٹ کے روانی خطوط کو پھیلنے نہیں دیتی اگر کپیسیٹر پلیٹوں کی دوری ایک معمولی تار کی لمبائی کے برابر ہو تو میدانی خطوں کی شکلیں اس سے بالکل برعکس ہوں گی۔

7-4 متجانس وسیلے میں استراحت کا وقت

اگر کرنٹ j غیر قائم ہیں لیکن ان کے بدلنے کی شرح اتنی کافی کم ہے کہ مقناطیسی اثرات نظر انداز کیے جا سکتے ہیں تو ایک چالک وسیلے میں جس شرح سے قائم حالات قائم ہوتے ہیں اسے تسلسل کے مساوات (7-1) کا استعمال کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (2-4) اور (7-1) سے

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0, \qquad (7\text{-}18)$$

اور اس لیے

$$\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_s, \qquad (7\text{-}19)$$

جہاں j_s قائم کرنٹ کا مساوات (7-2) یعنی $\nabla \cdot j_s = 0$ کا مناسب حل ہے۔ اگر وسیلہ خطی ہے تو سب نقطوں پر جہاں کوئی غیر استمراری میدان E' موجود نہیں ہے $D = (\epsilon_0 \kappa/\sigma) j$ اس لیے

$$\left(1 + \frac{\epsilon_0 \kappa}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t}\right) j = j_s. \qquad (7\text{-}20)$$

کرنٹ ایکسپونینشیل انداز میں استراحت کرے گی جس کا امتیازی وقت مستقلہ

$$\tau = \epsilon_0 \kappa/\sigma, \qquad (7\text{-}21)$$

ایسا ہوگا کہ

$$j = j_s + j_0 e^{-t/\tau}, \qquad (7\text{-}22)$$

اور

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (-\nabla \cdot j_0) e^{-t/\tau}, \qquad (7\text{-}23)$$

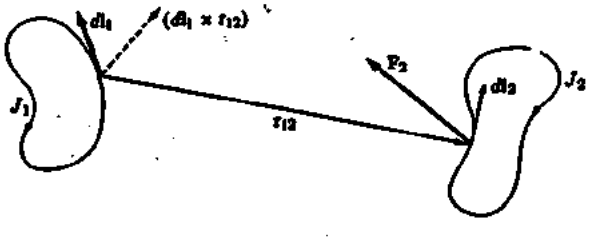
جہاں j_0 کرنٹ تقسیم کا شروع کا غیر قائم حصّہ ہے۔

استراحت وقت کسی وسیلے کا امتیازی وقت اس معنی میں ہے کہ یہ اس وقت کا اندازہ دیدیتا ہے جس میں کسی خاص چارج کے بہاؤ کے شروع ہونے کے بعد لازمی معنوں میں قائم حالات قائم ہو جائیں۔ اس کا اطمینان کرنے کے لیے کسی مخصوص مسئلہ میں قائم کرنٹ مساوات عائد کی جا سکتی ہیں۔ یہ کسوٹی ہوگی کہ ایسے کرنٹوں کے شروع ہونے سے مشاہدے تک کا وقت استراحت وقت سے کافی بڑی مقدار سے زیادہ ہو۔

7-5 مستقل خطی کرنٹوں کا مقناطیسی تفاعل

کرنٹ کے مقناطیسی تفاعل کو تجرباتی طور پر خلا میں قائم کیے گئے تفاعل کے ذریعہ زیادہ بہتر طریقے پر بیان کیا جاتا ہے، جو برقی سکونی کولوم قانون کے مماثل ہے۔ امپیر کے تجربات کی ریاضیاتی تعمیم جو دو کرنٹ لے جانے والے قطعوں کے درمیان کی قوت کو بتاتی ہے یہ ہے:

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint_1 \oint_2 \frac{dl_2 \times (dl_1 \times r_{12})}{r_{12}^3}. \qquad (7\text{-}24)$$



[شکل 7-1. امپیر کے قانون کی وضاحت]

یہاں μ_0 ایک مستقلہ ہے جو اکائیوں کے نظام کا امتیازی خاصہ ہے اور جس کی قیمت mks نظام میں $4\pi \times 10^{-7}$ ہنری فی میٹر ہے F_2 وہ قوت ہے جو J_2 کرینٹ لے جانے والے سرکٹ پر جس کا خطی قطعہ dl_2 ہے کام کرتا ہے F_2, dl_1 dl_2 اور r_{12} کی اضافی سمتوں کا اظہار کرنے میں جو جیامٹری آتی ہے اس کی وجہ سے یہ قوت کا مساوات کولوم قوت مساوات (1-24) سے زیادہ الجھا ہوا معلوم ہوتا ہے۔ سرسری نگاہ سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ یہ مساوات نیوٹن کے عمل اور ردِ عمل کے برابری کے قانون کی خلاف ورزی کرتا ہے۔ مساوات (7-24) کا انٹیگرینڈ جس شکل میں وہ ہے، درحقیقت غیر متشاکل ہے؛ لیکن جب دونوں بند سرکٹوں پر انٹیگرل لیا جاتا ہے تو نتیجہ کے طور پر ملی قوت دونوں تفاعل کرنے والے کرینٹ کے حلقوں کی جیامٹری کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

دونوں سرکٹوں کے درمیان قوت متشاکل اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔ اگر انٹیگرل کو ویکٹر ضرب قاعدہ

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \qquad (7\text{-}25)$$

سے پھیلایا جائے تو F_2 کی عبارت

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint_1 \oint_2 \left\{\frac{(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\, d\mathbf{l}_1}{r_{12}^3} - \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}\right\} \qquad (7\text{-}26)$$

ہو جاتی ہے۔ پہلی رقم میں dl_2 کے لحاظ سے انٹیگرینڈ کا حل تفرقی ہے کیونکہ یہ ایک گریڈینٹ کا خطی انٹیگرل $\oint \nabla(1/r_{12}) \cdot dl_2$ ہے اس لیے بند حلقے پر انٹیگرل لینے پر یہ رقم غائب ہو جاتی ہے۔ دوسرا انٹیگرل :-

$$F_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_1\oint_2 \frac{(dl_1\cdot dl_2)r_{12}}{r_{12}^3}\right] J_1 J_2, \qquad (7\text{-}27)$$

حلقہ 1 اور 2 کے لیے متشاکل ہے۔

ہم نے یہاں دکھایا ہے کہ تفاعل کا بنیادی قانون، مساوات (7-24) درحقیقت سرکٹ کے کرنٹ قطعوں کے لیے متشاکل ہے اور اس لیے نیوٹن کے تیسرے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔ یہ سوال اکثر اٹھایا جاتا ہے کہ اگر سرکرنٹ کے قطعہ کو ایک بند حلقہ کا حصہ نہ سمجھ کر u رفتار سے حرکت کرنے والا ایک چارج سمجھا جائے تو تیسرے قانون سے تضاد کو کیسے بچایا جا سکتا ہے۔ اس حالت میں مساوات (7-26) کی پہلی رقم غائب نہیں ہوگی اور اس لیے نیوٹن کے قانون کی پابندی نہیں ہوگی۔ یہ حالت برقی مقناطیسی میدان کا غیر قائم ہونا بتاتی ہے اور اس امکان کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا کہ برقی مقناطیسی میدان کی تبدیلی سے تحرک باہر نکل جائے گا؛ دراصل ہم بعد میں دکھائیں گے کہ برقی مقناطیسی میدان کے ساتھ برق مقناطیسی تحرک کا منسلک ہونا لازمی ہے اور اس لیے برقی مقناطیسی تفاعل والے کسی غیر قائم مسئلے میں عمل کا باہم تفاعل کرنے والے اجسام کے درمیان ردعمل کے براہ راست برابر ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس نقطہ پر ایک مکمل بحث کو آگے کے لیے اٹھا رکھنا ہوگا جب تک کہ غیر قائم مسئلوں پر ہم آہنگی سے غور نہ کیا جا سکے۔

7-6 مقناطیسی ترغیبی میدان

مقناطیسی تفاعلوں کی بحث کو مساوات (7-24) سے شروع کرنے کی وجہ یہ ہے کہ مساوات (7-24) ایسی شکل میں ہے کہ تفاعل کے اظہار کو حلقہ 1 سے پیدا ہوئے ایک میدان میں اور حلقہ 2 پر اس میدان کی وجہ سے لگی قوت میں الگ کیا جا سکتا ہے۔ دوسری طرف مساوات (7-27) جس میں غیر سرسری طور پر سرکٹ کے قطعوں کے درمیان کے زاویہ کا کوسائن شامل ہے، اس طرح کے الگاؤ کی اجازت نہیں دیتا اور اس لیے مقناطیسی تفاعلوں کی ویکٹر میدانی تشکیل تک براہ راست نہیں پہنچاتا۔ مساوات (7-24) کو ایک میدان اور

ایک میدانی قوت میں الگ کرنے کے لیے اس طرح لکھیے:

$$F_2 = J_2 \oint dl_2 \times B_2, \qquad (7\text{-}28)$$

جہاں B_2 وہ مقناطیسی ترغیبی میدان ہے جو سرکٹ 1 سرکٹ 2 کے مقام پر پیدا کرتا ہے اور جو یہ ہے :-

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \oint_1 \frac{dl_1 \times r_{12}}{r_{12}^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \oint dl_1 \times \nabla_2 \left(\frac{1}{r_{12}}\right). \qquad (7\text{-}29)$$

(B کی mks اکائی ہے ویبر فی مربع میٹر)

مقناطیسی ترغیبی میدان B برق سکونی نظریے کے E کے مماثل اس معنی میں ہے کہ یہ سرکٹ کے کسی قطعہ پر لگنے والی قوت کا تعین کرتا ہے۔ مساوات (7-29) بائٹ اور ساورت قانون کی تعمیم ہے۔ یہ دھیان دینے کی بات ہے کہ ابھی تک اس قانون کی کوئی تفرقی شکل ہمارے پاس نہیں ہے۔ بائٹ ساورت قانون کا حجمی کرنٹوں کی شکل میں اظہار یہ ہو جاتا ہے :-

$$F = \int (j \times B)\, dv, \qquad (7\text{-}30)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j \times r}{r^3}\, dv'. \qquad (7\text{-}31)$$

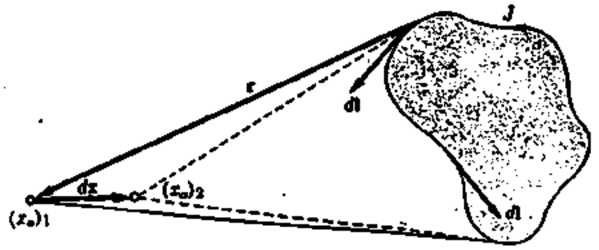
دھیان رکھیے کہ مساوات (7-31) میں r کی سمت نقطہ اینٹگریشن سے یا ماخذ نقطہ سے (جہاں پر j ہے) میدانی نقطہ کی طرف ہے جہاں B دریافت کیا جا رہا ہے۔ فنکشی رشتے اُن کے مماثل ہیں جن پر سکشن 1-1 میں بحث کی گئی تھی۔

7-7 مقناطیسی اسکیلر مضمر

آیئے ہم تحقیق کریں کہ کن حالات میں مقناطیسی ترغیبی میدان B کو ایک اسکیلر مضمر سے

اس رشتہ سے نکالا جا سکتا ہے ۔

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m. \tag{7-32}$$



[شکل 7-2. مقناطیسی اسکیلر مضمر کا اخذ]

ایک بند حلقہ جس میں کرنٹ J بہہ رہا ہے، لیجیے جیسا شکل 7-2، میں دکھایا ہے ۔ $(x_o)_1$ ایک میدانی نقطہ ہے ۔ اگر میدان B کو ایک اسکیلر مقناطیسی مضمر ϕ_m، سے اخذ کیا جا سکے اور نقطہ مشاہدہ کو $(x_o)_1$ سے $(x_o)_2$، تک ایک فاصلہ dx ہٹا دیا جائے تو اسکیلر مقناطیسی مضمر ϕ_m میں اضافہ $d\phi_m$ یہ ہوگا :۔

$$d\phi_m = -\frac{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0}. \tag{7-33}$$

B، کے لیے بائٹ ساورٹ عبارت، مساوات (7-29)، استعمال کیا جا سکتا ہے، اس لیے

$$d\phi_m = -\frac{1}{4\pi} J \oint \frac{d\mathbf{x} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{1}{4\pi} J \oint \frac{\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{l})}{r^3}. \tag{7-34}$$

(ملے جلے ویکٹر۔ اسکیلر ضرب میں چکری ادل بدل کی جا سکتی ہے) بلاشبہ مساوات (7-34) مقناطیسی اسکیلر مضمر کی اس تبدیلی کے برابر ہوگی جو نقطہ مشاہدہ کو قائم رکھ کر حلقہ کو $-d\mathbf{x}$، ہٹانے پر ملے گا جیسا دو قطبی چادر کے مضمر کے مساوات (1-66) کے اخذ میں بتایا گیا تھا۔ مساوات (1-64) میں دیے ہوئے رشتہ کے ذریعہ اسکیلر مقناطیسی مضمر کی تبدیلی کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے :۔

$$d\phi_m = \frac{J}{4\pi} d\Omega, \qquad (7\text{-}35)$$

جہاں $d\Omega$ اس ٹھوس زاویہ کی وہ تبدیلی ہے جسے حلقہ نقطۂ مشاہدہ پر بناتا ہے جو حلقہ کے سب نقطوں کے ایک انتہائی خفیف نقل dx سے پیدا ہوتی ہے۔ اسکیلر مضمر وہی ریاضیاتی صفات رکھتا ہے جو کہ سطحی دو قطبی پرت کے سکونی مضمر کے مساوات (1-81) اور ایک کرنٹ حلقہ کی مقناطیسی ترغیبی مضمر کے مساوات (7-35) کی مشابہت سے ظاہر ہے۔ اس کے علاوہ اس کا مطلب ہے کہ ایک کرنٹ حلقہ کا اسکیلر مضمر متعدد قیمت والا اس میں ایک J قدر کی سلسلہ شکنی (discontinuity) حلقہ سے محیط سطح کو پار کرنے پر ظاہر ہوتی ہے۔ برقی دو قطبی چادر کے مسئلہ میں اس سطح کی ایک طبیعی اہمیت ہے۔ لیکن مقناطیسی مسئلہ میں سطح کو کسی من مانے طریقے سے چُنا جا سکتا ہے۔ چونکہ سطح کا چناؤ من مانا ہے اس مضمر سے اخذ کیا ہوا مقناطیسی میدان کرنٹ لے جانے والے خطہ کے باہر غیر مبہم ہے لیکن ایک کرنٹ کے حلقہ کے مقناطیسی میدان کے خطی انٹیگرل جب ہی صحیح ہوں گے جب انٹیگریشن کا راستہ اس من مانی سطح میں سے ہو کر نہیں گزرتا۔ ترغیب B کے مقناطیسی میدان کا خطی انٹیگرل جو ایک بند راستے کے گرد جو کہ کرنٹ J کو چھیدتا ہے۔ مقناطیسی اسکیلر مضمر ϕ_m کی اس سلسلہ شکنی کے بالکل صحیح قدر کے برابر ہے جو من مانی حوالی سطح کے آر پار ہوتی ہے اور اس لیے،

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 J_{total}. \qquad (7\text{-}36)$$

ایک کرنٹ حلقہ کے مقناطیسی اسکیلر مضمر کے گرافی اظہار کے لیے دیکھیے شکل 1-7 شکل 1-7. کی دو قطبی پرت کرنٹ حلقہ کی سلسلہ شکن کی من مانی واقع سطح سے مطابقت رکھتی ہے۔

مساوات (7-36) اس تفرقی رشتہ کا انٹیگرل اظہار ہے جو مقناطیسی میدانی ویکٹر کی پوری گردش کو اس کرنٹ کے لحاظ سے دیتا ہے جو مقناطیسی میدان

کا سبب ہے۔ چونکہ مساوات (7-36) اینٹگریشن کے کسی من مانے بند راستہ کے لیے جائز ہے ہم اسے ایک تفرقی عبارت میں تبدیل کرسکتے ہیں اگر B کو اسٹوک کے مصدق میں رکھیں اور اینٹگریشن کی سطح کو چھوٹا کرکے چھوٹا کرکے ایک تفرقی بنا لیں تو اس طرح ہم پاتے ہیں :۔

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \tag{7-37}$$

ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ B عام طور سے ایک واحد قیمت والے اسکیلر مضمر سے اخذ نہیں کیا جاسکتا۔ مقناطیسی اسکیلر مضمر کے تصور کا عملی فائدہ مسلسل کرنٹ تقسیم کی غیر موجودگی میں مقناطیسی میدان کا اخذ کرنا ہے۔ اگر کرنٹوں کو گھیرنے والے خطی اینٹگرل پر غور کریں یا اگر کرنٹ لیجانے والے وسیلوں کے اندر مقناطیسی میدان مطلوب ہے تو اسکیلر مضمر ϕ_m کا استعمال نہیں کیا جاسکتا۔

7-8 مقناطیسی ویکٹر مضمر

B کی تعریف کرنے والے مساوات (7-31) سے سیدھے تفرق کے ذریعہ ہم ڈائیورجنس اور کرل معلوم کرسکتے ہیں۔

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\, dv' = \nabla \cdot \left\{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\left[-\int \mathbf{j} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv'\right]\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \cdot \left[\nabla \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] dv' = 0. \tag{7-38}$$

اسی طرح،

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left[\mathbf{j} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] dv'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int [(\mathbf{j} \cdot \nabla')\nabla'] \frac{1}{r}\, dv'.$$

دوسری رقم کا حصوں اینٹگرل لینے پر اور سطحی رقم کو چھوڑ دینے پر ہمیں ملتا ہے:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\nabla' \cdot \mathbf{j}) \nabla' \left(\frac{1}{r}\right) dv'.$$

آخری رقم غائب ہو جاتی ہے [دیکھیے مساوات (16-1)] اس لیے

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \int \mathbf{j}\, \delta(\mathbf{r})\, dv' = \mu_0 \mathbf{j}, \qquad (7\text{–}39)$$

جو مساوات (37-7) کے مطابق ہے۔

اوپر ہم نے غیر صریحی طور پر مان لیا ہے کہ مقناطیسی میدان کا سبب صرف کرنٹ ہی نہیں اور ان کرنٹوں کا پورا میدان بائٹ ساورٹ قانون سے ملتا ہے۔ چونکہ B کی ڈائیورجنس صفر ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ B کو ایک ویکٹر مضمر سے اخذ کیا جا سکتا ہے :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \qquad (7\text{–}40)$$

ویکٹر مضمر A پہچانا جا سکتا ہے اگر ہم B کے اظہار کو پھر سے یہ یاد رکھتے ہوئے لکھیں کہ آپریٹر ∇ صرف میدانی مقام کے متغیرہ پر کام کرتا ہے اس لیے انٹیگرل کے نشان سے باہر نکالا جا سکتا ہے :-

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}}{r}\, dv'. \qquad (7\text{–}41)$$

اس لیے A کا صریحی اظہار کرنٹ کے لحاظ سے صفر کرل والے ایک من مانے فنکشن کو چھوڑ کر اس سے ملتا ہے ؛

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{j}}{r}\, dv', \qquad (7\text{–}42)$$

سہولت کے لیے ہم یہاں اس زائد فنکشن کو صفر لے سکتے ہیں گو کہ بعد میں ہمیں اس چناؤ میں کچھ تبدیلی کرنا ضروری ہوگا۔ بہر حال اس مفروضہ کے ساتھ مساوات (42-7) صحیح ہے اور ایک خطی کرنٹ کے ویکٹر مضمر کی مطابق عبارت یہ ہے ؛

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}}{r}. \qquad (7\text{–}43)$$

اس لیے پہلے مساوات (42-7) یا مساوات (43-7) کا استعمال کر کے ویکٹر مضمر نکال کر تب رشتہ (40-7) سے وہ مقناطیسی میدان نکالا جا سکتا

ہے جو کرنٹ پیدا کرتے ہیں۔ ہم تب تک کے لیے مخصوص کرنٹ پیدا کرتے ہیں۔ ہم تب تک کے لیے مخصوص کرنٹ تقسیم کے مستقلہ و بکٹر مضمر کو دریافت کرنے کے مسئلہ پر بحث ملتوی کرتے ہیں جب تک کہ ہم مختلف اقسام کے پائے جانے والے کرنٹوں اور مادّی وسیلوں میں ان کا امتحان نہ لیں۔

7.5 کرنٹوں کے اقسام

کرنٹوں کے مقناطیسی تفاعلوں کے ابتدائی سیدھے تجرباتی مشاہدے مستقل خطی کرنٹوں پر کیے گئے تھے۔ اگر غیر مستقل کرنٹوں کا مطالعہ کرنا ہے تو نظریے میں تبدیلیاں کرنا ہوں گی اور تب ہی ہم کسی بھی وسیلے کے اندر جو مقناطیسی اثرات ہوتے ہیں انھیں اخذ کر سکیں گے۔

ہم یہاں مادّی وسیلوں میں کرنٹوں پر بحث کا اُس سے ملتا ہوا طریقہ اختیار کریں گے جو مادّی وسیلوں میں چارجوں کے لیے استعمال کیا گیا تھا۔ کرنٹوں کو دو قسموں میں بانٹا جا سکتا ہے ؛ حقیقی کرنٹ، جو حقیقی چارجوں کی حرکت کی وجہ سے ہوتی ہیں اور دوسری کرنٹ جو خود وسیلے سے وابستہ ہیں۔ یہ تقسیم جو اس تقسیم کے مشابہ ہے جو برق سکونی نظریے میں حقیقی چارجوں کے مضمروں میں اور تقطیبی چارجوں کے مضمروں میں کی گئی تھی، ہمیں دو طرح کے مقناطیسی میدانوں کے غور پر پہنچائے گی۔ ایک وہ جو حقیقی کرنٹوں سے پیدا ہوتے ہیں دوسرے وہ جو سب کرنٹوں کے متحدہ اثر کی وجہ سے ہیں چاہے ان کا سبب کچھ بھی ہو۔ اس دوسرے میدان کو یعنی مقناطیسی ترغیب کے میدان B کو ہم بین ایٹمی میدانوں کا فضا۔ وقت کا اوسط سمجھ سکتے ہیں۔

آیئے جن اقسام کے کرنٹوں پر غور کرنا ہوگا، اُن کی فہرست بنائیں :۔

1۔ حقیقی کرنٹ j_f جو حقیقی چارجوں کی طبیعی حرکت ہے۔

2۔ تقطیبی کرنٹ جنھیں بعد کو $\partial P/\partial t$ کے برابر دکھایا جائے گا، وہ کرنٹ ہیں جو وقت کے ساتھ تقطیب کے بدلنے سے پیدا ہوتی ہیں۔

3۔ مقناؤ کرنٹ j_m قائم کرنٹ جو ایسے خطّوں میں بہتی ہیں جو مشاہد کی پہنچ کے باہر ہیں لیکن جو ایٹمی پیمانہ پر نامکمل مداروں کے منسوخ ہونے

کی وجہ سے خالص حدی یا جمی کرنٹ پیدا کرتی ہیں۔

4 ۔ حملی کرنٹ ، اگر حرکت کرتے ہوئے کسی مادی وسیلے میں مختلف اقسام کے چارج ہیں تو حمل کے اثرات سے پیدا ہوئی کرنٹ بھی اور رونما ہوگی۔ یہ حملی کرنٹ وسیلے کے اندر موجود حقیقی اور تقطیبی دونوں طرح کے چارجوں کی وجہ سے ہوگی۔ حمل کرنٹوں پر بحث بعد میں آنے والے باب میں کی جائے گی۔ موجودہ بحث کے لیے ہمیں تقطیبی اور مقناؤ کرنٹوں کی زیادہ تفصیل سے چھان بین کی ضرورت ہے۔

7-10 تقطیبی کرنٹ

اگر ایک مالیکیول کے اندر چارج کثافت ρ ہو اور مالیکیولی سمتی قدروں کا اظہار ξ سے کریں تو ایک تقطیب شدہ مالیکیول کے برقی گردشہ $\mathbf{p}$ کی تعریف اس طرح ہوگی :

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{P}\, dv = \int \rho \xi \, dv, \qquad (7\text{-}44)$$

جہاں $\mathbf{P} = \rho \xi$. اگر مالیکیول کے اندر چارج کثافت وقت کے ساتھ بدل رہی ہے تو

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \xi \, dv. \qquad (7\text{-}45)$$

تسلسل کے مساوات کے ذریعہ مساوات (7-45) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے،

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\int [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] \xi \, dv. \qquad (7\text{-}46)$$

حصوں میں انٹیگرل لینے پر اور سطحی قسم کو چھوڑ دینے پر جو اس وقت جائز ہے جب ہم انٹیگریشن کی سطح کو ایسا چنیں کہ وہ اس خطہ کے باہر ہو جہاں مالیکیولی چارج ہیں، تو ہم پاتے ہیں،

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \int \rho \mathbf{u} \, dv, \qquad (7\text{-}47)$$

بڑے پیمانے پر :

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\int \rho \mathbf{u}\, dv}{\int dv} = \overline{\rho \mathbf{u}}. \qquad (7\text{-}48)$$

اس لیے ثابت ہوا کہ مقدار $\partial \mathbf{P}/\partial t$ اُن مالیکیولی کرنٹوں کا جو بدلتی ہوئی تقطیب کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔ فضا۔ وقت کا اوسط بتاتی ہیں۔

7-11 مقناطیسی گردشہ کسی مخصوص حجم کے جس میں $\mathbf{j}_m$ کرنٹ ہوں مقناطیسی گردشہ کی تعریف یہ ہے :-

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}_m)\, dv. \qquad (7\text{-}49)$$

اگر ان کرنٹوں کو رفتار $\mathbf{u}$, سے حرکت کرنے والی چارج کثافت ρ سمجھا جاسکے تو مساوات (7-49) ہوجاتی ہے:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \rho (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u})\, dv, \qquad (7\text{-}50)$$

جو میکانکی زاویائی تحرک $\mathbf{s}$ کی اس عبارت سے ملتا ہے جو کمیت کثافت کی تقسیم ρ_m کی رفتار کے لحاظ سے کیا گیا ہے :-

$$\mathbf{s} = \int \rho_m (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u})\, dv. \qquad (7\text{-}51)$$

نسبت $\mathbf{m}/\mathbf{s}$ کو کسی نظام کی جائرو مقناطیسی نسبت Γ کہتے ہیں[1]۔ اگر نظام m کمیت اور e, چارج کے ذروں پر مشتمل ہے تو ظاہر ہے ،

$$\Gamma = e/2m. \qquad (7\text{-}52)$$

---

(1) ایک کلاسکی نظام کے لیے ویکٹر $\mathbf{m}$ اور $\mathbf{s}$ کے متوازی ہونے کی کوئی بنیادی وجہ نہیں ہے اس لیے جائرو مقناطیسی نسبت Γ ایک 3×3 ٹینسر ہوگی۔ یہاں ہم اپنا غور ایسے نظام تک محدود رکھ رہے ہیں جس میں صرف ایک تشاکلی دھری ہے جس کے سمت میں $\mathbf{m}$ اور $\mathbf{s}$ دونوں ہیں

اس لیے ایک قسم کے ایک ہی چارج والے ذرّروں کی کسی کلاسکی تقسیم کی جائزہ مقناطیسی نسبت (7-52) سے ملے گی۔ اگر تقسیم کی کوئی زیادہ اچھی ترتیب ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں :

$$\Gamma = ge/2m, \qquad (7\text{-}53)$$

جہاں g ("g جز") مقناطیسی ساخت بتاتا ہے۔ g جز کا حساب کسی کلاسکی ساخت کے لیے لگایا جا سکتا ہے لیکن رواج یہ ہے کہ ان اجسام کے واسطے بھی جن کے لیے اس قسم کا حساب ممکن نہیں ہے (7-53) میں دی ہوئی تعریف کو برقرار رکھا جائے۔

یہ قابلِ غور ہے کہ مساوات (7-49) میں دی ہوئی $\mathbf{m}$ کی تعریف اس معنی میں خالص حرکیاتی ہے کہ اس میں کسی مقناطیسی یا دیگر قسم کے تفاعل کا ذکر نہیں ہے۔ یہ کسی خطّے کے برقی گردشہ کی مساوات (7-44) میں دی ہوئی تعریف سے مطابقت رکھتی ہے۔ وہ بھی چارجوں کی ایک مخصوص صف بندی کا ایک حرکیاتی بیان ہے، گو کہ حجم کا خاص چارج صفر ہے۔ مقناطیسی گردشہ کی تعریف ایسے کرنٹوں کے نظام کا بیان ہے جو ضروری نہیں ہے کہ کوئی خاص بہاؤ ایسی سطح کے آر پار پیدا کر سکے جو میکرو مشاہدے کے لیے کافی بڑی ہو۔ ایک دی ہوئی سطح S گھیرنے والے ایک واحد اور "قائم کرنٹ" حلقے کی مخصوص حالت میں $\mathbf{m}$ محض حلقہ کی کرنٹ اور اس کے رقبے کے ضرب کے برابر ہو جاتی ہے اور اس کی سمت حلقہ کے عمودی اس طرح پر ہوتی ہے کہ کرنٹ کی گردش کے داہنے ہاتھ کے اصول کے مطابق ہو :

$$\mathbf{m} = J\mathbf{S}. \qquad (7\text{-}54)$$

یہ کرنٹ حلقہ کے مقناطیسی گردشہ کی ابتدائی تعریف کے مطابق ہے۔

آیئے اب ہم مقناطیسی گردشہ کے تصور کا رشتہ مقناطیسی تفاعل سے ویکٹر مضمر کی مساوات (7-42) کو "کثیر قطبی پھیلاؤ" کی شکل میں پھیلا کر قائم کریں جس طرح سے باب 1 میں سکیلر مضمر کے لیے کیا گیا تھا اگر کرنٹ تقسیم ایسے حجم تک محدود ہے جس کے ابعاد میدانی نقطے سے اس کے فاصلہ کی

نسبت میں چھوٹے ہیں تو ہم $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \boldsymbol{\xi}$, رکھ سکتے ہیں اور $1/r$ کو مساوات (1-46) کی طرح پھیلا سکتے ہیں۔ چونکہ یہ پھیلاؤ کسی بھی کرنٹ کے لیے جو اس طرح فضا میں محدود ہو، جائز ہے، اس لیے ہم نشانِ زیریں کو چھوڑ دیں گے :

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}\,dv'}{r} = \frac{1}{R}\int \mathbf{j}\,dv' - \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_R \int \xi_\alpha \mathbf{j}\,dv'$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_R \int \xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{j}\,dv' - \cdots \qquad (7\text{–}55)$$

پہلی رقم $\int \mathbf{j}\,dv'$ قائم کرنٹوں کے لیے غائب ہو جاتی ہے جیسا کہ نظام کو کرنٹ حلقوں میں بانٹ کر صریحاً دیکھا جا سکتا ہے یعنی اس طرح لکھ کر :

$$\int \mathbf{j}\,dv' = \sum_{\text{loops}} J \oint d\mathbf{l} = 0. \qquad (7\text{–}56)$$

اگر $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, ہو تو ہم اس شکل میں لکھ سکتے ہیں کہ :

$$0 = \int (\nabla \cdot \mathbf{j})\xi_\alpha\,dv' = \int \nabla \cdot (\xi_\alpha \mathbf{j})\,dv' - \int (\mathbf{j} \cdot \nabla \xi_\alpha)\,dv'$$
$$= \int_S (\xi_\alpha \mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} - \int j_\beta \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\beta}\,dv' = \int j_\alpha\,dv', \qquad (7\text{–}57)$$

جہاں سطحی اینٹگرل کو چھوڑ دیا گیا ہے کیونکہ ہم نے مان لیا ہے کہ ماخذ تقسیم محدود ہے۔ اس وجہ سے $\int j_\alpha\,dv'$ غائب ہو جاتا ہے اور اسی لیے $\int \mathbf{j}\,dv'$ بھی ؛ اور ر یکٹر مضمر کرنٹ تقسیم کے انتہائی چھوٹے ہونے پر بھی پھیلاؤ کی دوسری اور اس کے آگے کی رقموں سے ملے گا۔ چونکہ $(1/r)$ $(\partial/\partial x_\alpha)$ کی قیمت اگر $\mathbf{R}$ پر نکالی جائے تو $-R_\alpha/R^3$, ہو گی، اس لیے ہمیں صرف

$$\frac{4\pi}{\mu_0}A_\beta = \frac{R_\alpha \int \xi_\alpha j_\beta\,dv'}{R^3}, \qquad (7\text{–}58)$$

سے مطلب ہے جہاں اینٹگریشن ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{\xi}$ پر ہو گا (7-58) کے

اینٹگرینڈ کا استحالہ $\xi_\beta j_\alpha/2$ کو مندرجہ ذیل عبارت میں جوڑ کر اور گھٹا کر کیا جاسکتا ہے۔

$$\xi_\alpha j_\beta = \tfrac{1}{2}(\xi_\alpha j_\beta + \xi_\beta j_\alpha) + \tfrac{1}{2}(\xi_\alpha j_\beta - \xi_\beta j_\alpha). \qquad (7\text{-}59)$$

مستقل کرنٹ کے لیے اس عبارت کے پہلے حصہ کا اینٹگرل غائب ہوجاتا ہے، جیسے مساوات (7-57) کی طرح، مندرجہ ذیل طریقے پر لکھ دیکھا جاسکتا ہے:

$$\xi_\alpha \xi_\beta(\nabla \cdot \mathbf{j}) = 0 = \nabla \cdot (\xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{j}) - \mathbf{j} \cdot \nabla(\xi_\alpha \xi_\beta). \qquad (7\text{-}60)$$

پورے ڈائیورجنس پر اگر ہم گاس کے مصدقہ کا اطلاق کریں تو ہم پاتے ہیں:

$$0 = \int \mathbf{j} \cdot \nabla(\xi_\alpha \xi_\beta)\, dv' = \int (\xi_\alpha j_\beta + \xi_\beta j_\alpha)\, dv'. \qquad (7\text{-}61)$$

لیکن

$$R_\alpha(\xi_\alpha j_\beta - \xi_\beta j_\alpha) = [(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{R}]_\beta,$$

اس لیے

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{A} = \int \frac{(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{R}}{2R^3}\, dv' = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} = -\mathbf{m} \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right). \qquad (7\text{-}62)$$

اس لیے کسی مقناطیسی دو قطبہ m کا دیکٹر مضمر کثیر قطبی پھیلاؤ کی اصل رقم (leading term) سے حاصل ہوتا ہے۔ آئیے ہم ایک مقناطیسی دو قطبہ پر ٹارک L پر غور کریں۔ تعریف کی رو سے ٹارک L جو کسی باہری یکساں میدان B میں کسی بھی کرنٹ نظام پر کام کرتا ہے، یہ ہے:

$$\mathbf{L} = \int \boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\, dv' \qquad (7\text{-}63)$$

$$= \int \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{B})\, dv' - \mathbf{B}\int (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\xi})\, dv.' \qquad (7\text{-}64)$$

کسی محدود کرنٹ تقسیم کے لیے دوسری رقم غائب ہوجاتی ہے جیسا کہ مساوات (7-57) اور (7-59) کے طرح کے عمل سے دکھایا جاسکتا ہے:

$$0 = \int \xi^2(\nabla \cdot \mathbf{j})\, dv' = \int \nabla \cdot (\xi^2 \mathbf{j})\, dv' - \int \mathbf{j} \cdot \nabla(\xi^2)\, dv'$$

$$= \int_S (\xi^2 \mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} - 2\int (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\xi})\, dv.' \qquad (7\text{-}65)$$

سطحی رقم کو چھوڑا جا سکتا ہے اس طرح ہم پاتے ہیں کہ مساوات (7-64) کی دوسری رقم غائب ہو جاتی ہے۔ پہلی رقم کا ایک α جز جسے مساوات (7-60) کا استعمال کر کے ہم لکھ سکتے ہیں یہ ہے:

$$L_\alpha = B_\beta \int j_\alpha \xi_\beta \, dv' = B_\beta \int \left(\frac{\xi_\beta j_\alpha - \xi_\alpha j_\beta}{2} \right) dv'. \qquad (7\text{–}66)$$

اس لیے

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \qquad (7\text{–}67)$$

ٹارک کی ایک سادہ عبارت ہے جو ایک برقی سکونی میدان E میں ایک برقی دو قطبہ P پر لگنے ٹارک سے بالکل ملتی ہے [مساوات (1-57)] اگر زاویائی تحرک $\mathbf{s}$ ہے تو کلاسکی مساوات یہ ہوں گے:

$$d\mathbf{s}/dt = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \Gamma(\mathbf{s} \times \mathbf{B}), \qquad (7\text{–}68)$$

جہاں پہلے کی طرح Γ جائرو مقناطیسی نسبت ہے۔ اس لیے اگر B کی سمت سے $\mathbf{s}$ کوئی زاویہ بناتا ہے تو $\mathbf{s}$ کی سمت B کی سمت کے گرد گھومے گی اور اس کی زاویائی رفتار

$$\omega = \Gamma \mathbf{B}. \qquad (7\text{–}69)$$

7-12 مقناؤ اور مقناؤ کرنٹ ایسے خطہ پر غور کیجیے جس میں مقناطیسی گردشوں کی تقسیم اس طرح پر ہے کہ ہر حجمی قطعہ dv کا مقناطیسی گردشہ

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} \, dv'. \qquad (7\text{–}70)$$

مساوات (7-62) سے اس طرح کی تقسیم کا ویکٹر مضمر

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{A} = +\int \mathbf{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) dv' = \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{r} dv' - \int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{r}\right) dv.' \qquad (7\text{–}71)$$

ہو جاتا ہے لیکن،

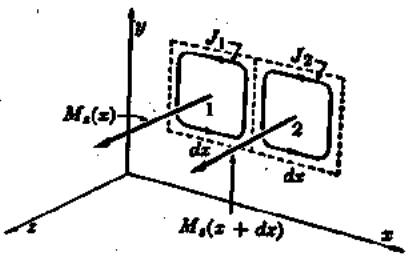
$$\int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{r} dv' = -\int \frac{\mathbf{M} \times d\mathbf{S}}{r}. \qquad (7\text{-}72)$$

اگر سطحوں کو اس خطہ کے باہر کیا جائے جہاں کرنٹ ہے تو مساوات (7-71) کی دوسری رقم غائب ہو جاتی ہے ۔ اس لیے ویکٹر مضمر کی عام شکل سے $\nabla \times \mathbf{M}$ کو کرنٹ کثافت کے طور پر پہچانا جا سکتا ہے ، اور خصوصاً

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \qquad (7\text{-}73)$$

کے ذریعہ ایک حجمی مقناؤ کو اس کے مرادف کرنٹ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ امپیر نے سب سے پہلے یہ مشاہدہ کیا کہ مقناٹی اشیاء اور کرنٹوں کے باہری نقطوں پر اثرات ایک ہیں۔ یہ تصور میکرو نظریے میں ایٹمی ماہیت کے کرنٹوں کی تحقیق کے لیے جو پہنچ کے باہر ہیں ضروری ہے۔ مساوات (7-73) کے مطابق یکساں مقناؤ خطہ کے اندر مائکرو کرنٹ ایک دوسرے کو منسوخ کر دیتے ہیں۔ اس جگہ کی خالص کرنٹ کثافت جہاں مقناؤ غیر یکساں ہے۔

طبیعی طور پر مساوات (7-73) اس طرح سمجھا جا سکتا ہے۔ xy- مستوا میں واقع ایک مستطیلی جالی کے ہمسایہ کرنٹ حلقوں کے مقناطیسی گردشہ کے z- جزو پر غور کیجیے جیسا شکل 7-3. میں دکھایا ہے۔



[شکل 7-3. ایک مقناٹے وسیلے میں مساوات میں مرادف امپیری کے کرنٹ حلقے ۔ جو اندرونی حد پر کرنٹ کا منسوخ ہونا دکھا رہے ہیں۔]

اگر مقناؤ غیر یکساں ہے تو حلقوں کی حدوں پر "مکمل" منسوخی نہیں ہو گی اور

تھوڑی کرنٹ بہے گی، کرنٹ جن خالص net اثرات کی ذمہ دار ہیں وہ اسی خالص کرنٹ کی وجہ سے پیدا ہونگی۔ شکل 7-3 کے ایک واحد حلقے کا گردشہ ہے :

$$dm = M\,dx\,dy\,dz. \qquad (7\text{-}74)$$

یہ مساوات (7-54) سے مستطیل میں کرنٹ

$$J_1 = \frac{M_z\,dx\,dy\,dz}{dx\,dy},$$

ہوگی اور ٹیلر کے پھیلاؤ کے ذریعے ہم پاس والے مستطیل 2 کا کرنٹ لکھ سکتے ہیں :-

$$J_2 = \frac{[M_z + (\partial M_z/\partial x)\,dx]\,dx\,dy\,dz}{dy\,dx}.$$

J_1 اور J_2 کے درمیان فرق کے نتیجے کے طور پر مستطیل 1 اور 2 کی مشترکہ حد پر y سمت میں ایک خالص کرنٹ ملتی ہے۔

$$J_y = -\frac{\partial M_z}{\partial x}\,dx\,dz. \qquad (7\text{-}75)$$

اس شکل کو ہم پہچان سکتے ہیں کہ یہ کرل کے جدا اجزا میں سے ایک ہے اور عام طور سے

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}, \qquad (7\text{-}76)$$

جیسا پہلے مساوات (7-73) میں ملا ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ کسی غیر مسلسل مقناطیست کے خطے میں ایک سطحی کرنٹ جو مقناطیست کے مماسی جزو کی تبدیلی کے برابر ہے غیر تسلسل کی جگہ پر پیدا ہوگا۔ اس غیر تسلسل کو گھیرنے والی ایک آڑی حدی سطح پر مساوات (7-73) کو عائد کرنے پر یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

7-13 خلا کی نقل کرنٹ

ایک حرکت نہ کرنے والے وسیلے میں کل کرنٹ سیکشن 7-9 میں گنائے گئے پہلے تین قسم کے کرنٹوں کے جوڑ سے ملتا ہے :

$$\mathbf{j}_{\text{total}} = \mathbf{j}_{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}. \tag{7-77}$$

چارج کی برقراریت کو قائم رکھنے کے لیے ضروری ہے کہ یہ کل کرنٹ تسلسل کے مساوات $\nabla \cdot \mathbf{j} + (\partial\rho/\partial t) = 0.$ کی پابندی کرے۔ پوری کرنٹ کا ڈائیورجنس ہے۔

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{total}} = \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{true}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}), \tag{7-78}$$

اس لیے پورے چارج اور کرنٹ کثافت پر اطلاق کرنے پر تسلسل کا مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{true}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{total}} = 0. \tag{7-79}$$

ہو جاتا ہے۔ چونکہ:

$$\rho_{\text{total}} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E},$$
$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{total}} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{7-80}$$

لہذا

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{true}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) + \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = 0, \tag{7-81}$$

اگر ہم $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$ رشتہ کا استعمال کریں تو

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j}_{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}\right) = 0, \tag{7-82}$$

پورے کرنٹ کی ڈائیورجنس مساوات (7-78) صفر نہیں ہے اور اس لیے پورا کرنٹ گردشی نہیں ہے لیکن پورے کرنٹ میں رقم $\epsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ کا اضافہ کرنے پر ملنے والی مقدار

$$\mathbf{c} = \mathbf{j}_{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{\text{total}} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{7-83}$$

سولینائڈی کرنٹ ہے۔ ایک سولینائڈی خالص کرنٹ ویکٹر پیدا کرنے کے لیے اس رقم کو جوڑنے کی ضرورت کو میکسویل نے پہچانا۔ خلائی نقل کرنٹ "حرکت کرتے ہوئے چارجوں کے معنی میں ایک کرنٹ نہیں کہا جا سکتا۔ ہم بعد میں دیکھیں گے کہ کرنٹوں کے مقناطیسی اثرات کی ضابطہ بندی صرف سولینائڈی کرنٹوں کے لحاظ سے کی جا سکتی ہے اور اس لیے جو فارمولے مقناطیسی تفاعل کے لیے نکالے جائیں گے، انھیں ایسی حالتوں میں بھی عائد کر سکنے کے لیے جن میں غیر مستقل کرنٹ شامل ہوں ہمیں خلائی نقل کرنٹ کی رقم کو رکھنا ہوگا۔

سولینائڈی کرنٹ c کی جیامٹری اہمیت یہ ہے کہ ایسے نقطوں پر جہاں چارج جمع ہو رہا ہو کرنٹ کو غیر تسلسل کے آر پار میدان کی اس شرح تبدیلی کی شکل میں غیر تسلسل حدود پر جمع ہونے والے چارجوں کی وجہ سے ہوتی ہے مسلسل مانا جا سکتا ہے، مثال کے طور پر ایک بیٹری جو ایک کپیسٹر کو چارج کر رہی ہے c کے لحاظ سے ایک بند کرنٹ حلقہ پیدا کرتی ہے۔

مجوزہ حوالے

M. Abraham and R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*

اطلاق پر زیادہ زور نہیں دیا گیا ہے لیکن باب VI میں مستقل کرنٹوں پر بحث کا طریقہ بہت کچھ ہماری طرح ہے۔

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media.*

باب 3 میں مستقل کرنٹ کی بحث میں ہال اثر اور حر برقی مظہرات بھی شامل ہیں۔

G. P. Harnwell, *Principles of Electricity and Electromagnetism.*

خطی

خطی سرکٹ نظریے پر زور دیا گیا ہے۔

W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity.*

بہت سے کارآمد اور دلچسپ اطلاق شامل کیے گئے ہیں۔

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory.*

برق سکونی میدانی کے ساتھ چالکتا کے متعلق مسئلوں پر بحث کی گئی ہے۔

J. H. Jeans, *Electricity and Magnetism.*

مواد کی ترتیب ہم سے اس قدر مختلف ہے کہ طبیعی اصولوں کے معاملے میں جینس کا استعمال محدود ہے لیکن اس میں دلچسپ اطلاق دیے گئے ہیں۔

مشق

1. ۔ d قطر کی ایک پھٹاس کی وجہ سے ایک D قطر کے تار کی مزاحمت میں تبدیلی کا حساب لگائیے (تبدیلی کو تار کی لمبائی کی تبدیلی کی شکل میں ظاہر کیجیے) مان لیجیے کہ $D - d \ll D$، اور اسے دو العبادی مسئلہ مانیے (دیکھیے شکل 7-4۔)

[شکل 7-4]

2. ۔ ایک سلنڈری ہم محوری کیبل کا اندرونی تار (نصف قطر a) ایک حاجز خول سے گھرا ہوا ہے جس کی چالکتا σ_1، اور باہری نصف قطر b، ہے اور ایک دوسری حاجز پرت بھی ہے جس کی چالکتا σ_2 ہے اور جو c نصف قطر کے باہری چالک کی دیوار تک ہے۔ اندرونی تار اور باہری چالک کے درمیان فی میٹر مزاحمت دریافت کیجیے۔

3. ۔ ایک لا انتہا سموار چالک چادر میں کسی نقطہ P، پر کرنٹ اندر جاتی ہے اور لا متناہیہ پہ باہر نکلتی ہے P کو بچا کر ایک دائری سوراخ چادر میں کسی جگہ کاٹ دیا جاتا ہے۔ دکھائیے کہ سوراخ کے کنارے پہ واقع کن ہی دو نقطوں کے درمیان مضمر فرق اس مضمر فرق سے دو گنا ہوگا جو سوراخ کاٹنے سے پہلے تھا۔

4. a نصف قطر والے دو چھوٹے کروی الیکٹروڈ ایک σ چالکتا کے لا متناہی وسیلے میں دفن ہیں۔ ہر ایک وسیلے کی ہموار سطح سے $d > a$ کے فاصلے پر ہے اور ایک دوسرے سے b فاصلہ پر ہے الیکٹروڈوں کے درمیان مزاحمت معلوم کیجیے۔

5. a نصف قطر کا ایک کروی الیکٹروڈ ایک b نصف قطر کے ہم مرکزی کروی الیکٹروڈ سے گھرا ہے اور درمیانی جگہ ایک وسیلے سے بھری ہوئی ہے جس کی چالکتا نظام کے مرکز سے الٹی نسبت رکھتی ہے۔ اگر باہری کرہ کو مضمر Φ_0 پر بنائے رکھا جائے اور ایک کل کرنٹ J الیکٹروڈوں کے درمیان بہہ رہی ہو تو مرکز سے ایک فاصلہ $r > a$ پر مضمر دریافت کیجیے۔

6. a نصف قطر کے ایک گول طبق کی سطح ایک مسلسل اور یکساں تپلے تار کے چکر دار حلقوں کے N چکروں سے ڈھکی ہے، جو مرکز سے شروع ہو کر کنارے تک جاتے ہیں اور جن میں مستقل کرنٹ J بہہ رہا ہے۔ مقناطیسی دو قطبی گردشہ نکالیے

7. ایک دائری حلقہ

$$z = b, \; x^2 + y^2 = a^2,$$

کرنٹ J لے جا رہا ہے۔ دکھائیے کہ $r < R = \sqrt{a^2 + b^2}$ کے لیے مقناطیسی اسکیلر مضمر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}\left[P_{n+1}\left(\frac{b}{R}\right) - P_{n-1}\left(\frac{b}{R}\right)\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{n} P_n(\cos\theta).$$

کے متناسب ہے۔

8. قائم کرنٹ بہاؤ کے مساوات (8-7) میں کرنٹ کثافت کو ایک ویکٹر مضمر سے اور برقی میدان E کو ایک اسکیلر مضمر سے اخذ کیجیے۔ یہ مان کر کہ σ اور E' مقام کے دیے ہوئے فنکشن ہیں، ان مضمروں کے لیے تفرقی مساواتیں لکھیے۔

باب (8)

مقناطیسی اشیا اور حدودی قدر مسئلے

ابھی تک ہم نے خلا میں ہی مقناطیسی میدانوں کا ذکر کیا ہے حالانکہ ہم نے ان کرنٹوں کا تجزیہ کیا ہے جن کو شمار میں لینا ہوگا اگر مقناطیسی میدان میں مادّی وسیلے داخل کر دیے جائیں۔ عام طور سے مساوات (7-37) میں کرنٹ j کی جگہ کل کرنٹ لینا ہوگا جس میں مقناطیسی اور تقطیبی کرنٹ شامل ہیں جیسا مساوات (7-78) میں دیا گیا ہے۔ ہم نے دیکھا ہے کہ خلا میں B کا کرل پورے قائم کرنٹ کثافت کے تناسب ہے۔ جب کہ j_{total} گردشی نہیں ہے اگر تقطیب وقت کے ساتھ بدلتی ہے دو میں سے کسی ایک طریقے سے رشتہ $\nabla \times B = \mu_0 j$ کو عام بنایا جاسکتا ہے جس سے اس کا اطلاق غیر قائم حالت پر بھی ہو سکے (یا تو کرنٹ سولینائڈی رہیگی یا اس رشتے میں تبدیلی کرنی ہوگی جسے کرنٹ سے مقناطیسی میدان اخذ کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ان دو میں سے ایک جسے میکسویل نے منتخب کیا وہ یہ تھا کہ ان رشتوں کو جن سے مقناطیسی میدان کرنٹ سے اخذ کیا جاتا ہے یعنی مساوات (7-29)، (7-31)، یا (7-48) کو برقرار رکھا جائے لیکن مساوات (7-83) کے عام کرنٹ c کا استعمال کیا جائے جس میں نقل کرنٹ شامل ہے اور جو سولینائڈی بنی رہتی ہے اس انتخاب کو آگے ملے نتائج نے نہایت واجب ثابت کیا ہے۔

8-1 مقناطیسی میدانی شدت

اگر پورے کرنٹ کے لیے c کو استعمال کیا جائے تو دیگر میدان

B کی تعریف کرنے والی مساوات ہیں :-

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (8\text{-}1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{c} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{true} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \qquad (8\text{-}2)$$

باب 2 میں ڈائیلکٹرکوں کی قطبیت کے ذکر میں ریاضیاتی نقطہ سے اس میں سہولت پائی گئی کہ ان میدانوں کو جن کے مآخذ حقیقی چارج ہوں کل میدان سے الگ کر لیا جائے جس کے مآخذ حقیقی چارجوں کے ساتھ تقطیبی چارج بھی ہیں۔ اسی طرح سے اس میں سہولت رہتی ہے کہ کل میدان سے وہ حصہ الگ کر دیا جائے جس کی دورانی کثافت (circulation density) ایمپی مقناؤ کرنٹوں کی وجہ سے ہے۔ اس لیے اگر ہم مساوات (8-2) کو اس شکل میں لکھیں :-

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{true} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \qquad (8\text{-}3)$$

اور ایک نئے میدان H کی اس طرح تعریف کریں کہ

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad (8\text{-}4)$$

تو یہ تعریف تحویل ہو کر

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{true} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (8\text{-}5)$$

ہو جاتی ہے۔ مقدار H، مقناطیسی میدان شدت کو اکائیوں کے mks نظام میں ایمپیر-حلقہ۔ فی میٹر میں ناپی جاتی ہے۔ مساوات (8-5) کا مطلب یہ ہے کہ H کی دورانی کثافت حقیقی کرنٹ اور کل نقل کرنٹ کے جوڑ سے پیدا ہوتی ہے، آخرالذکر میں تقطیبی کرنٹ $\partial \mathbf{P}/\partial t$ اور خلائی نقل کرنٹ $\epsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t$ دونوں شامل ہیں۔ قائم حالات میں یا تقریباً قائم حالات میں جن میں نقل کرنٹ کا مقناطیسی اثر حقیقی کرنٹ کے مقناطیسی اثر کے مقابلہ میں قابلِ نظر انداز ہوتا ہے۔

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{true}, \qquad (8\text{–}6)$$

اور انٹیگرل کی شکل میں

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = J_{true}. \qquad (8\text{–}7)$$

دھیان رکھیے کہ کل چارجوں و حقیقی چارجوں سے پیدا ہونے والے اثرات کے الگ کرنے میں اور کل کرنٹوں اور حقیقی کرنٹوں سے پیدا ہونے والے اثرات کو الگ کرنے میں بالترتیب B کا کردار E سے مطابقت رکھتا ہے جبکہ H کا کردار D سے مطابقت رکھتا ہے جیسے اوپر کے مساوات کا باب 2 کے نیچے لکھے مساواتوں سے موازنہ کرنے سے دیکھا جا سکتا ہے:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{total}}{\epsilon_0},$$

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{true}$$

8-2 مقناطیسی ماخذ

باب 2 میں ڈائیلکٹرکوں پر غور کو خطی وسیلوں تک محدود رکھا گیا تھا یعنی ایسے وسیلوں کے لیے جن میں تقطیب عائد کیے گئے میدان کے متناسب تھی۔ لوہا۔ مقناطیسی اشیا میں غیر خطی رویہ ہی زیادہ تر پایا جاتا ہے۔ اور اس لیے ہمیں مقناطیسی میدان کے کچھ ایسے صفات پر بحث کرنا لازمی ہے جو اُس وقت رونما ہوتے ہیں جب مقناؤ M خطی نہیں ہے اور اکثر باہری میدانوں کا یکتا فنکشن بھی نہیں ہے، پہلے ہم یہ مان لیں گے کہ M مادّی وسیلے کا دیا ہوا فنکشن ہے جو باہری میدانوں سے آزاد ہے۔ ایک انتہائی حالت کی مثال مستقل میگنٹ ہے جس میں کسی حقیقی کرنٹ کی غیر موجودگی میں بھی فی اکائی حجم ایک مقناطیسی گردشہ ہوگا۔ اس حالت میں جیسا ہم مساوات (8-6) سے دیکھتے ہیں H غیر گردشی ہے اور اس لیے ریاضیاتی لحاظ سے اس کا رویہ ایک برقی میدان کا ہوگا جبکہ B بیشک سولینائڈلی رہے گا۔

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\nabla \times \mathbf{M}) \neq 0. \qquad (8\text{–}8)$$

بہرحال مقناطیسی میدان کے مآخذ ہوں گے، اگر ہم مقناطیسی مآخذ کثافت کو ρ_M، کہیں تو

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_M. \qquad (8\text{-}9)$$

اس لیے مقناطیسی سکونی میدان $\mathbf{H}$ کو ایک مقناطیسی مآخذ کثافت سے اخذ کیا جا سکتا ہے جو کہ مقناؤ کے منفی ڈائیورجنس کے برابر ہوگی۔ اس مرادف مقناطیسی چارج کثافت کی ایک اکائی کو عام طور سے اکائی مقناطیسی قطب کہا جاتا ہے۔ اس طریقہ بیان کے لحاظ سے ایک مقناطیسی قطب کی کوئی طبیعی حقیقت نہیں ہے، سوائے اس کے کہ یہ ایک مستقل چمبک کے میدان کو وہی شکل دے دیتا ہے جو کہ چارجوں کے برقی میدان کی ہوتی ہے۔ چونکہ ایک مستقل چمبک کا مقناطیسی میدان $\mathbf{H}$ غیر گردشی ہوتا ہے اسے ایک اسکیلر مضمر ϕ_m سے اسی طرح سے اخذ کیا جا سکتا ہے جیسے کہ $\mathbf{E}$ کو ایک برق سکونی اسکیلر مضمر ϕ سے۔ اگر ہم

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m, \qquad (8\text{-}10)$$

رکھیں تو اسکیلر مضمر مرادف حجمی اور سطحی قطب کثافتوں کی شکل میں عبارت؛

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\left[\int \frac{\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{r} - \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{r}\, dv'\right]. \qquad (8\text{-}11)$$

سے ملتا ہے۔

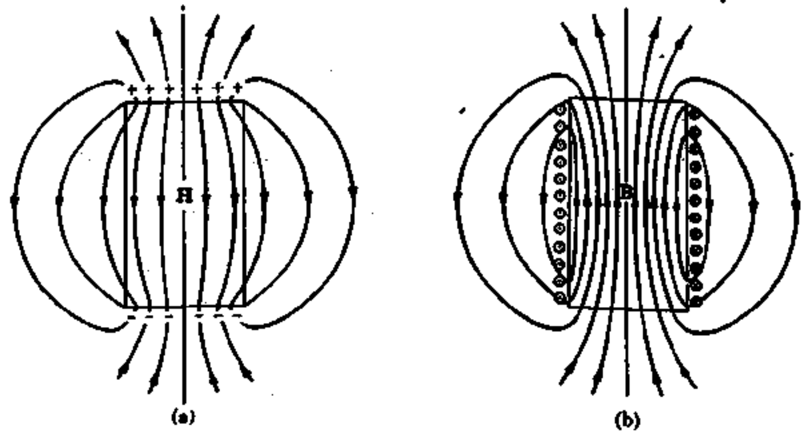
دی ہوئی مقناطیسیت کے ایک مستقل چمبک کے میدان کا بیان ویکٹر مضمر $\mathbf{A}$ کے ذریعے بھی ہو سکتا ہے جسے مقناطیسی جسم کے اندر کی مرادف سطحی کرنٹوں اور حجمی کرنٹوں سے اخذ کیا گیا ہے۔ اس طرح مساوات (7-71)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{r}\, dv' - \int \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r}\, dS\right], \qquad (8\text{-}12)$$

ہو جاتا ہے۔

جہاں سطح اب چمبک کی حد سے منطبق ہو جاتی ہے۔ سطحی کرنٹ $M \times n$ – کے ہم مرادف ہے جہاں n سطح کے عمودی ایک اکائی ویکٹر ہے۔ مقناطیسی ترغیبی میدان کو تب مساوات (8-12) سے مساوات (7-40) کا استعمال کرکے اخذ کیا جاتا ہے۔

ایک یکساں مقناطیسی وسیلے میں سب اندرونی کرنٹ رد ہو جاتی ہیں اور تب صرف مرادف سطحی کرنٹ ہی موجود رہ جاتی ہیں۔ اس لیے ایک سلنڈری چمبک جو سلنڈر کی دھری کے متوازی سمت میں مقناطیا گیا ہے ایک مقناطیسی میدان رکھتا ہے جو ایک سالینا ئڈ کوائل کے میدان کے مرادف ہے۔ جس میں کرنٹ چمبک کے سلنڈری سطح پر بہہ رہی ہے اور کرنٹ کے بہاؤ کے خط ایسے مستوا میں ہیں جو سلنڈر کی دھری کے عمودی ہیں۔ اس حالت میں ظاہر ہے کہ صرف سلنڈر کے سروں سے ملنے والا حصہ مساوات (8-11) کے اسکیلر مضر کا ذمہ دار ہے۔ اس حالت کا بیان یہ دھیان میں رکھ کر کیا جا سکتا ہے۔ کہ مستقل چمبک کے لیے یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ H میگنٹ کی قطبی سطحوں پر واقع مرادف قطبی چارجوں کی ایک پرت کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے اسی طرح سے جیسے ایک برق سکونی میدان اسی طرح کے رکھے چارجوں سے بنے گا۔ دوسری طرف B ایک مرادف سالینا ئڈ سے



[شکل 8-1 ایک یکساں مقناطیسی مستقل چمبک

(a) یہاں مرادف مقناطیسی چارج دکھائے گئے ہیں جن سے H اخذ کیا جاتا ہے

(b) مرادف سالینا ئڈ اور اس سے پیدا B دکھایا گیا ہے]

پیدا ہوتا ہے جس کو میگنٹ کی سلنڈری سطح پر لپٹا ہوا سمجھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سے جیسے ایک مستقل کرنٹ کا خلا میں میدان پیدا ہوتا ہے۔ اس خطہ کے باہر جہاں M کی کوئی معین قیمت ہے B/μ_0 اور H بالکل ایک ہیں لیکن چمبک کے اندر ان میں M کا فرق ہے۔ دھیان رکھیے کہ شکل 8-1 میں B اور H چمبک کے اندر در حقیقت ایک دوسرے کی الٹی سمتوں میں ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے اگر H کے خطی انٹیگرل کو کسی بند راستے پر صفر ہونا ہے۔

مساوات (8-11) اور (8-12) اسکیلر اور ویکٹر مضمر مرادف پول یا کرنٹ تقسیم کی شکل میں دیتے ہیں، بیشک مضمروں کو انفرادی مقناطیسی گردشوں کے ہی مضمروں کے اوپر انٹیگرل کی شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم مساوات (7-71) میں دیکھ چکے ہیں کہ:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{M} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv. \qquad (8\text{–}13)$$

اسی طرح سے اسکیلر مضمر کو مساوات (1-68) سے ملتی ہوئی شکل میں لکھا جاسکتا ہے:

$$\phi_m = -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{M} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv. \qquad (8\text{–}14)$$

ان عبارات کا مساوات (8-11) اور (8-12) کے مرادف ہونا حصوں میں انٹیگرل لینے سے ظاہر ہو جاتا ہے، مساواتوں کے دونوں میں سے کسی سیٹ سے اخذ کیا ہوا میدان بےشک وہی ہونا چاہیے۔

ویکٹر مماثلوں کے استعمال سے دکھایا جاسکتا ہے کہ ایک مقناطیسی دو قطبیہ کا جس کا گردشہ $\mathbf{m} = \int \mathbf{M}\, dv$ ہے۔ خلائی میدان یہ ہے،

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\nabla \times \left[\mathbf{m} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[(\mathbf{m} \cdot \nabla)\nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \mathbf{m}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right].\end{aligned} \qquad (8\text{–}15)$$

مساوات میں آخری رقم $r = 0.$ کو چھوڑ کر غائب ہو جاتی ہے۔ مساوات (8-14) سے:

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m = \frac{1}{4\pi}\left\{\nabla\left[\mathbf{m}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\right\} = \frac{(\mathbf{m}\cdot\nabla)\nabla(1/r)}{4\pi}. \quad (8\text{–}16)$$

اس طرح دونوں میدان جُز $\mathbf{H}_0$ کو چھوڑ کر صرف $r = 0.$ پر مختلف ہیں۔ مبدا پر دونوں میدانوں کے رویے میں فرق سے ماٰخذ کی ندرت کے رویے میں فرق جھلکتا ہے۔

ہم نے اب یہ دیکھ لیا ہے کہ مستقل چمبکوں کے میدانوں کو (چمبکوں کے باہر) یا تو مرادف کرنٹوں" کے لحاظ سے یا اگر چاہیں تو "مرادف قطبوں" کے لحاظ سے بیان کیا جا سکتا ہے چونکہ مقناطیسی میدانوں کا پورا بیان اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ وہ حرکت کرنے والے چارجوں[1] کی وجہ سے پیدا ہوتے ہیں اس لیے ہمیں یہ یقین کرنے کی وجہ ہے کہ ایک مستقل چمبک کے میدان کی تفسیر مقناطیسی چارجوں کے تصور سے کرنے کے مقابلے میں ایٹمی کرنٹوں کے چکروں کے لحاظ سے کرنا زیادہ بنیادی ہے اور اسی لیے B جو کرنٹوں کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے H. کے مقابلے میں جو "مقناطیسی چارجوں" کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے زیادہ بنیادی میدان ہے۔ لیکن ایک عملی نقطۂ نگاہ سے H کے لحاظ سے بیان کا طریقہ زیادہ دلکش ہے کیونکہ یہ مستقل چمبکوں کے متعلق مسئلوں کو یا ایسے مسئلوں کو جو مقناطیسے لوہے کے ٹکڑوں پر مشتمل ہوں جن کی مقناطیسیت اور طریقوں سے جانی جا سکتی ہے،

---

[1] مقناطیسی قطبوں کے وجود کے خلاف کوئی بنیادی اعتراض نہیں ہے ان کے میدانوں پر یہاں صرف اس لیے خیال نہیں کیا گیا، کیونکہ ان کے وجود کا کوئی تجرباتی ثبوت نہیں ہے۔ اگر مفرد مقناطیسی قطبوں کا وجود ہو تو اوپر کی سب مساوات میں کچھ جوڑنا پڑے گا کوانٹم میکانکی طریقہ سے دکھایا گیا ہے کہ اگر مقناطیسی پول کا وجود ہو تو بنیادی اکائی پول کی جسامت کا رشتہ بنیادی چارج معکوس سے ایک مستقلہ ضربیہ کے ذریعہ ہوگا۔

برق سکونی مسئلوں میں تبدیل کر دیتا ہے۔

آیا B یا H زیادہ بنیادی میدان ہے اس سوال کو ایک دوسری شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔ آیئے ہم اس مسئلہ کا حل دریافت کریں: "خیال کیجیے کہ ایک چارج q رفتار u سے ایک مقناطیسی وسیلہ میں حرکت کر رہا ہے اور ہم یہ مان لیتے ہیں کہ اُس پر کام کرنے والی قوت $F = q(u \times X)$ کی شکل میں ملتا ہے۔ ہم X کی جگہ B کا استعمال کریں یا H کا یا ان دونوں کے کسی میل کا؟" اس سوال کی جانچ پہلے پہل ریسیٹی[1] نے تجرباتی طریقے سے مقناطیسی لوہے میں کاسمک کرنوں کے انحراف کو ناپ کر کی اور وینیئر[2] نے نظریاتی طریقے سے چارج شدہ ذرّوں کی مقناطیسی وسیلوں میں حرکت کے تجزیے سے کی۔ جواب کی خاص باتیں یہ ہیں۔ اگر مقناطیسی وسیلہ کے لحاظ سے چارج ذرّوں کی حرکت واقعی غیر ترتیب ہے۔ یعنی اگر وہ مقناطیسی وسیلہ کی موجودگی سے اول تخمینہ تک اثر پذیر نہیں ہوتی ہے۔ تو وہ قوت جو اُن پر لگتی ہے قوت کے مساوات میں مقناطیسی میدان کی حیثیت سے B کے استعمال سے مطابقت رکھتی ہے۔ دوسری طرف اگر ذرّہ اگر کم رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور اس کی حرکت قابلِ لحاظ طور پر مقناطیسی وسیلہ سے اثر پذیر ہوتی ہے تو یہ مؤثر طریقے پر مرادف ایٹمی کرنٹ حلقوں سے گزرنے سے روک دیا جاتا ہے اور اس حالت میں چونکہ انفرادی کرنٹ حلقے ناقابلِ پیوست دو قطبوں کی طرح کام کرتے ہیں۔ اس لیے اوسط کا عمل ایسا انحراف دیتا ہے جو قوت مساوات میں H کے استعمال سے مطابقت رکھتا ہے۔ ریسیٹی کے تجرباتی نتائج دراصل یہ ظاہر کرتے ہیں کہ بہت اونچی رفتار کے ذرّوں کے لیے انحراف قوت مساوات میں تقریباً B کے استعمال سے مطابقت رکھتا ہے۔ اگر نتائج H کے استعمال کے مطابق ہوتے تو انحراف کو الٹی سمت میں ہونا چاہیے تھا۔ اوپر کے سوال کا درست

---

1. F. Rasetti, *Phys. Rev.* 66, 1 (1944).

2. G. H. Wannier, *Phys. Rev.* 72, 304 (1947).

جواب انتہائی اونچی رفتار کے لیے یوں دیا جا سکتا ہے ؛ $X_{max} = B$.
B کی بنیادی اہمیت کا اور بھی ثبوت ہیوز[1] اور دوسروں کے ان تجربات سے ملا ہے جن میں مقناطیسی اشیاء کے ذریعہ نیوٹرانوں کا انعکاس اور انحراف کیا گیا ہے۔ یہ دکھایا گیا ہے کہ نیوٹرانوں کے لیے موثر میدان B ہے نہ کہ H۔ دوسرے لفظوں میں نیوٹران اور مقناطیسی ڈومین اس طرح پر تفاعل کرتے ہیں گویا کہ دونوں ایمپیری کرنٹ ہوں نہ کہ ناقابل پیوست دو قطبے۔ متعلقہ تجربات اور ان کی تفسیر پر بحث D. J. Hughes. کی تصنیف *Pile Neutron Research* میں ملے گی۔

8-3 سرایت پذیر وسیلے: مقناطیسی تاثر پذیری اور حدودی شرائط

ابھی تک ہم مقناطیسی M کو مقام کا ایک دیا ہوا فنکشن مانتے رہے ہیں جیسے مستقل چمبک میں۔ اب ہم اپنی توجہ ایک مثالی سرایت پذیر وسیلے کی طرف مبذول کرتے ہیں یعنی ایسا وسیلہ جس کا باہری حقیقی کرنٹوں کی غیر موجودگی میں مقناطیسی گردشہ صفر ہو اور جس میں مقناطیسی گردشہ کن ہی باہری حقیقی کرنٹوں کی وجہ سے پیدا ہوئے میدان کے متناسب ہو۔ تب میدانی مساوات یہ ہوں گے :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (8\text{–}1)$$

اور

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = J_{true}. \qquad (8\text{–}7)$$

اگر ہم مان لیں کہ $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, تو ہمیں ایک رشتہ ملتا ہے جو برقی سکونیات کی بحث میں مساوات (2-9) سے مطابقت رکھتا ہے :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\chi_m + 1)\mathbf{H} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \qquad (8\text{–}17)$$

---

1. D. J. Hughes, *Pile Neutron Research*, Addison-Wesley, 1953,
خاص طور سے سیکشن 11-4 اور 10-6.

جہاں χ_m مقناطیسی تاثر پذیری ہے $\kappa_m = \chi_m + 1$ وسیلہ کی اضافی سرایت پذیری ہے اور μ اس کی مطلق سرایت پذیری ہے۔

ایک ایسے طریقۂ اخذ کے ذریعے جو اس سے بالکل ملتا ہے جو باب 2 میں E اور D کے لیے حدودی شرائط دریافت کرنے کے لیے استعمال کیا گیا تھا B اور H کے لیے حدودی شرائط پائی جاسکتی ہیں۔ دو خطی وسیلوں 1 اور 2 کی مشترکہ حد پر عمودی اجزا میں رشتہ ہے۔

$$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mathbf{n}_1 \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0, \tag{8-18}$$

جبکہ مماسی اجزا کے لیے رشتہ ہے؛

$$\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{n}_1 \times (\nabla \phi_{m_1} - \nabla \phi_{m_2}) = \mathbf{n}_1 \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = \mathbf{K}, \tag{8-19}$$

جہاں K دونوں وسیلوں کی مشترکہ حد پر حقیقی سطحی کرنٹ ہے۔ مساوات (8-18) مساوات (2-14) کے ہم پلہ ہے اور مساوات (8-19) مساوات (2-18) کے لیکن ہر حالت میں کچھ فرق ہیں۔ B کا عمودی جز حد کے آرپار قطعی مسلسل ہے جبکہ D کا عمودی جز صرف اس حالت میں مسلسل ہے جبکہ سطح پر کوئی چارج نہ ہو۔ دوسری طرف E کا مماسی جز قطعی مسلسل ہے جبکہ H کا مماسی جز حد کے آرپار صرف اس حالت میں مسلسل ہے جب کوئی سطحی کرنٹ نہ ہو۔ ظاہر ہے کہ یہ فرق حقیقی برقی چارج کے وجود اور حقیقی مقناطیسی چارج کے عدم وجود سے مطابقت رکھتے ہیں۔

8-4 مقناطیسی سرکٹ

یہ دھیان دینے کی بات ہے کہ مساوات (8-1) (8-17) اور (8-7) ان مساوات کے مماثل ہیں کہ ایک مسلسل وسیلے میں ایک غیر برقراری برقی محرک قوت کی موجودگی میں قائم بہاؤ جن کی تابع ہے۔ وہ یہ تھے؛

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \tag{7-2}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{7-3}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}. \tag{7-5}$$

آخری تین مساوات نے ہمیں سلسلہ میں جُڑے خطی چالکوں کی "مزاحمت" کی، اس عبارت پر پہنچایا تھا:-

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \sum_i \frac{l_i}{\sigma S_i} \qquad (7\text{-}17)$$

یہ مشابہت ایک مقناطیسی سرکٹ کے تصور کو جنم دیتی ہے اور خطی مقناطیسی وسیلوں کے مسئلوں کے حل مقناطیسی فلکس Φ_m کی نیچے لکھی عبارت سے مہیا کرتی ہے:

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{J}{R_m} \qquad (8\text{-}20)$$

جہاں

$$R_m = \sum_i \frac{l_i}{\mu S_i} \qquad (8\text{-}21)$$

سرکٹ کی مقناطیسی "رکاوٹ" (ایمپیر/ویبر) ہے۔

مساوات (8-20) میں J مساوات (7-6) کے "برقی محرک قوت" ε کی مشابہت سے ایک "مقناطیسی محرک قوت" کا کردار ادا کرتا ہے۔ اگر ایک دیا ہوا چالک بند فلکس کو n بار منسلک کرتا ہے تو صحیح مقناطیسی محرک قوت پانے کے لیے J کی جگہ پر nJ رکھنا پڑے گا (جس کی ناپ ایمپیر حلقوں میں ہوتی ہے)۔ مقناطیسی سرکٹ حل صرف خطی مقناطیسی مسئلوں کے تفرقی مساواتوں کی مستقل کرنٹ مسئلوں کے مساوات کے ساتھ مطابقت پر مبنی ہے اور درحقیقت خود حلوں میں مطابقت اسی حالت میں ہوگی جب مقناطیسی اور کرنٹی مسئلوں کی حدودی شرائط بالکل ایک ہوں۔ عام طور سے یہ صحیح نہیں ہو سکتا کیونکہ خالی فضا کی چالکتا صفر ہوتی ہے جبکہ خالی فضا کی سرایت پذیری اکائی کے مقابلے میں بہت زیادہ ہے یا جب فضا کے وہ خطے جن میں مقناطیسی میدان واقع ہے اور جن کے لیے $\kappa_m \simeq 1$ ہے ان خطوں کے مقابلہ میں جن کی سرایت پذیری بہت زیادہ ہے چھوٹے ہوں۔ بہرحال حل (8-20) اور (8-21) صنعتی مقناطیسی مشینری کے ڈیزائن کی

بنیاد مہیا کرتے ہیں، کیونکہ ایسی حالتوں میں جہاں سیدھے حدودی قیمت کے حل عملی نہیں ہیں۔ یہ ایک قریبی تخمینہ نکالنے کی اجازت دیتے ہیں۔

8-5 حدودی قدر مسئلوں کا مقناطیسی اسکیلر مضمر کے ذریعہ حل

عام طور سے حدودی قدر کے مسئلوں کے حل جن میں مقناطیسی وسیلے آتے ہوں، یا مقناطیسی اسکیلر مضمر کے ذریعہ یا ویکٹر مضمر کے ذریعہ تلاش کیے جا سکتے ہیں۔ وہ مسئلے جو باہری میدان میں واقع مقناطیسی وسیلوں پر مشتمل ہیں جہاں حقیقی کرنٹ دلچسپی کے خطہ میں نہیں بہتے ہیں۔ مقناطیسی اسکیلر مضمر کے ذریعہ زیادہ اچھی طرح حل کیے جا سکتے ہیں۔ اس حالت میں مقناطیسی حدودی شرائط مساوات (8-18) اور (8-19) کا اسکیلر مضمروں کے ذریعہ اظہار کیا جا سکتا ہے جو باب 2 کی برق سکونی حدودی شرائط کے ہوبہو مشابہ ہیں اگر اضافی سرایت پذیری کو نوعی ترغیبی سمائی کی جگہ رکھ دیا جائے۔

مثال کے طور پر ایسے مسئلوں کو جو مقناطیسی ڈھالوں سے تعلق رکھتے ہیں برق سکونی حدودی قدر کے طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔ مقناطیسی مسئلے میں آنے والی واحد پیچیدگی یہ ہے کہ عملی حالتوں میں کسی خاص شے کی سرایت پذیری " باہری میدان کی سب قیمتوں کے لیے ایک سی نہیں ہوتی۔ یہ سرایت پذیر وسیلے کے اندر اونچی فلکس کثافتوں کے لیے خاص طور سے صحیح ہے۔ ایسی زیادہ فلکس کثافت کی یا سیری ہونے کی حالتوں میں یکے بعد دیگرے تقرب کا طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے اگر سرایت پذیری فلکس کثافت کا معلوم فنکشن ہو۔ پہلے یہ مان کر کہ " مستقل ہے حل دریافت کیا جاتا ہے۔ حاصل فلکس کثافت کا حساب لگایا جاتا ہے اور اس کے بعد مطابقہ سرایت پذیری کا استعمال کر کے مسئلہ کا حل پھر دہرایا جاتا ہے۔ اگر سرایت پذیر وسیلہ کے اندر میدان یکساں ہے تو یہ طریقہ صحیح حل دے گا۔ اس قسم کا ایک مسئلہ مقناطیسی شے کا ایسائڈ ellipsoid ہے جو ایک یکساں مقناطیسی میدان میں واقع ہے۔ اس وجہ سے ایک یکساں میدان میں لٹکے ہوئے ایسائڈ پر لگنے والی

ٹارک کو ناپ کر اپسانڈ مادے کی سرایت پذیری کو باہری میدان کے فنکشن کی شکل میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔ زیادہ شدید میدانوں میں سرایت پذیر سلوں کے رویے کے متعلق مسئلوں کو جہاں کہ حاصل مقناڈ کافی غیر یکساں ہوتی ہے، خالص تجزیاتی طریقوں سے حل کرنا تقریباً غیر ممکن ہے۔

8-6 ویکٹر مضمر کے لیے واحدیت مصدقہ

ایسے مسئلوں کو جن میں کرنٹ موجود ہوں ویکٹر مضمر کے استعمال سے حل کرنا ہوگا بجز اس حالت کے جب کرنٹ کی جگہ ایک مرادف دو قطبی چادر کو رکھنا ممکن ہو۔ ہم نے سیکشن 1-1 میں دیکھا ہے کہ اگر ماخذ پر انٹیگریشن لا متناہیہ تک کیا گیا ہو اور ماخذ فضا کے ایک واضح حدود والے خطہ کے اندر ہوں تو ویکٹر مضمر واحد ہوگا۔ اس لیے کہ اسے عملی مسئلوں میں یقین کے ساتھ استعمال کر سکنے کے لیے ہم کو فضا کے ایک واضح حدود والے خطہ کے لیے اس کی واحدیت کی جانچ کرنی ہوگی۔ اس کا ثبوت اُس ثبوت سے بہت کچھ ملتا ہے جو باب میں اسکیلر مضمر کی واحدیت کے لیے استعمال کیا گیا تھا۔ ہمیں گرین کے مقالہ کی ویکٹر شکل میں ضرورت پڑے گی۔ مان لیجیے کہ U اور W کوئی ویکٹر فنکشن ہیں اور

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{W})$$

کو گاس کے ڈائیورجنس مقالہ $\int \nabla \cdot \mathbf{V}\, dv = \int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$ میں رکھیے۔ ہمیں ملتا ہے:

$$\int [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) - \mathbf{U} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W})]\, dv = \int \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot d\mathbf{S}, \tag{8-22}$$

جو کہ مطلوبہ مصدقہ ہے۔

اب ہم فضا میں ایسے خطے پر غور کرتے ہیں جو سطح S سے جس پر ویکٹر مضمر دیا ہوا ہے گھرا ہوا ہے اور جس کا حجم v ہے جس کے اندر کوئی کرنٹ نہیں ہے۔ اسے حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہو سکتا ہے کہ ایسی چھوٹی سطحیں چنی جائیں جو سطحی بہاؤ کے خطوں کو چھوڑ دیتی ہوں۔ اب اگر ہم v کے اندر کے سب نقطوں کے لیے $\mathbf{U} = \mathbf{W} = \mathbf{A}$ لیں اور یاد رکھیں کہ اگر $j_{total} = 0$ ہو تو

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

ہوگا تو مساوات (8-22) میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں :

$$\int (\nabla \times \mathbf{A})^2\, dv = \int (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \int (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}\, dS. \qquad (8\text{–}23)$$

مساوات (8-23) اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے ،

$$\int (\nabla \times \mathbf{A})^2\, dv = \int (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}\, dS = \int \mathbf{B}_t \cdot \mathbf{A}\, dS, \qquad (8\text{–}24)$$

جہاں $\mathbf{B}_t$ سطح کے متوازی اور S. کے عمودی $\mathbf{B}$. کا مماسی جزو ہے۔ اب ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مساوات (8-23) اور (8-24) میں A دو اختیاری حلوں کا فرق ہے جو مقناطیسی ترغیبی میدان B کے مماسی جزو کی یا ویکٹر مضمر A کے مماسی جزو اُنہی حدودی قدروں کے لیے ہیں۔ تب مساوات (8-24) کا داہنا حصّہ غائب ہو جاتا ہے کیونکہ اس کی قیمت اُس سطح پر نکالی گئی ہے جہاں دونوں حل برابر ہیں۔ دوسری طرف مساوات (8-24) کا بایاں حصّہ واضح طور پر مثبت ہے اس لیے اینٹگرینڈ غائب ہو جانا چاہیے۔ اس لیے $\nabla \times \mathbf{A}$, جہاں A دونوں ویکٹر مضمروں کا فرق ہے سارے حجم میں لازمی طور پر صفر ہوگا اور اس لیے عام طور سے میدان $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ واحد قیمت کا ہے۔ چونکہ یہ A. کا کرل ہے جو واحد ہے اس لیے A کی تعریف میں ایک غیر کرلی ویکٹر کے اضافے کی گنجائش ہے۔

8-7 مسئلوں کے حل میں ویکٹر مضمر کا استعمال

ہم نے یہ ثابت کیا ہے کہ مقناطیسی ترغیبی میدان کا مماسی جزو یا سطح S پر ویکٹر مضمر کا مماسی جزو واحد طور پر اس مقناطیسی میدان کو متعین کرتا ہے جو اس سطح سے گھرے حجم کے اندر ہے۔ یہ مماثل برق سکونی غور و فکر کے مرادف ہے۔ جہاں محیط کرنے والی سطح پر اسکیلر مضمر کی قیمت یا عمودی برق سکونی میدان کی قیمت اُس برق سکونی میدان کا تعین کرتی ہے جو اُس سطح سے گھرے ہوئے حجم کے اندر ہے۔ اس عمل کی مشابہت کو اور آگے اس طرح لے جایا جا سکتا ہے کہ v کے اندر کے ویکٹر مضمر کو صرف بھی طور پر v کے

اندر کے کرنٹ j اور S کے اوپر کے میدان کی حدودی قیمتوں کے لحاظ سے لکھا جائے جبکہ S کے اوپر کی حدودی قیمتوں کو اس طرح چنا جائے کہ S کے باہر میدان صفر کے برابر ہو جائے۔ سطحی ارقام تب تفرقی مساوات کے کامپلیمنٹری (اتمامی) حل سے مطابقت رکھیں گی۔ جبکہ کرنٹوں کے حجمی اینٹگرل کی مطابقت خصوصی اینٹگرل سے ہوگی۔ اس عمل کو ہم یہاں تفصیل سے نہیں پیش کریں گے[1] خصوصی اینٹگرل محض وہ ہے جو مساوات (5-1) سے ملے عام حل کے برابر ہو جاتا ہے یا خصوصاً مساوات (7-42) سے ملے حل کے برابر اس حالت میں ہو جاتا ہے جب ہم حدود کو لا متناہیہ پر لیں۔ یعنی وہ حل لیں جو میدانی مساواتوں سے A کے لیے تفرقی مساوات کو دوہرے کرل کے ویکٹر مماثلہ کے استعمال سے اخذ کرنا ہوگا، اس طرح یہ ملتا ہے :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \qquad (8\text{–}25)$$

جب نشان ∇^2 کا اطلاق ایک ویکٹر پر کیا جائے تو ∇^2 کے آپریشن کی تفسیر میں کچھ احتیاط برتنا ہوگی۔ کارتیسی سمتی قدروں میں $\nabla^2 \mathbf{A}$ کا مطلب ایک ویکٹر ہے جس کا α واں جز $\nabla^2 A_\alpha$ ہے۔ غیر کارتیسی سمتی قدروں میں یہ ایک ویکٹر ہے جس کے α ویں جز کی قیمت اس مماثلہ سے نکالنا ہوگی :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}). \qquad (8\text{–}26)$$

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ کا چناؤ مرضی پر چھوڑ دیا گیا ہے کیوں کہ A کا تعین مساوات $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ کے ذریعہ کیا گیا تھا۔ یہاں یہ آسان ہوگا :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \qquad (8\text{–}27)$$

لے لیا جائے جس میں کوئی نئے طبعی مفروضات نہیں ہیں۔ غیر مستقل کرنٹوں پر غور کے سلسلے میں ہم بعد کو پائیں گے کہ مساوات (8-27) کی جگہ ایک زیادہ الجھی ہوئی عبارت رکھنی ہوگی جس سے برقی اور مقناطیسی حالتوں میں تشاکل قائم رکھی جا سکے۔ اور زیادہ عام اطلاق میں جس سے حاصل ہوئی مساواتوں میں اضافی

---

[1] Cf. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, pp. 245 ff.

ہم تغیر مل سکے۔ بہرحال مستقل کرنٹوں کے لیے مساوات (8-27) سے کوئی تضاد نہیں ہوگا۔

مساوات (8-27) کے آسان کُن مفروضہ سے A کے لیے تفرقی مساوات:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \tag{8-28}$$

رہ جاتا ہے۔ یہ پوائسان مساوات کی ویکٹر شکل ہے جس کا خصوصی اینٹگرل؛

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r}\, dv', \tag{8-29}$$

ہے جو عام حل بن جاتا ہے اگر اینٹگرل میدان میں حصّہ لینے والے سب کرنٹوں کے اوپر ہو۔ یہ مساوات (7-42) کے مماثل ہے۔ مفروضہ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ مساوات (7-41) کے اینٹگرل سے ملے من مانے فنکشن کو صفر کے برابر رکھنے کے مترادف ہے۔

من مانی حدودی شرائط عائد کرنے پر مساوات (8-28) کا حل بہ نسبت متعلقہ اسکیلر مضمر مساوات کے حل کے عام طور سے بہت زیادہ مشکل ہے۔ اس کا سبب یہ ہے کہ مساوات (8-27) کی پابندی کی وجہ سے A کے درحقیقت تین آزاد جُز نہیں ہوتے۔ اس کا مطلب ہے کہ ہم A کے جز کو الگ الگ نارمل آرتھوگونل فنکشنوں میں پھیلانے اور ضربیوں کو معلوم کرنے کے لیے کافی حدودی شرائط پانے کی امید نہیں کر سکتے۔ دوسرے لفظوں میں الگ کیے ہوئے اسکیلر حل کے ہر "ہارمونک" میں جو ایک سمتی قدریں رکھتا ہے۔ دو اینٹگریشن کے مستقلے شامل ہیں اور اس طرح بہ سلسلے کی ہر رقم کے لیے کل چھ مستقلے ہو۔ یہاں پہ ویکٹر کے ہر جز کے لیے تین حساب سے کل اٹھارہ مستقلے نہیں ہیں لیکن $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. کی پابندی کی وجہ سے سب ملا کر صرف بارہ مستقلے ہیں۔

اس لیے ہم A کے لیے ایسی عبارت کو ڈھونڈنا چاہتے ہیں جو دو اسکیلر مضمر فنکشنوں پر مشتمل ہو جنھیں U اور V کہہ سکتے ہیں اور جو مساوات $\nabla \mathbf{A} = 0$ کو ایک مماثلہ بنا دے۔ آیئے ہم اس طرح کے ایک حل کی جانچ کریں جو ظاہر ہے کہ $\nabla \mathbf{A} = 0$ کو مانتا ہے۔

$$\mathbf{A} = \nabla V + \nabla \times (\mathbf{a} U), \tag{8-30}$$

یہاں a اس سمتی قدری (عام طور سے خم خطی) نظام کا ایک ویکٹر ہے جیسے

اس طرح چُنا جاتا ہے کہ کچھ شرائط کو پورا کرے۔ عبارت $B = \nabla \times A$ کا انحصار V پر نہیں ہوگا۔ اس لیے U وہ اکیلا فنکشن ہے جو میدان کا تعین کرنے کے لیے ضروری ہے ایسا ہی ہونا بھی چاہیے کیونکہ ماخذ سے پاک کسی خطہ میں ایسے میدان میں جو اسکیلر مضمر سے اخذ کیا جا سکتا ہو اور جو ویکٹر مضمر سے اخذ کیا جا سکتا ہو کوئی فرق نہیں ہوتا۔ لیکن عام طور سے A کی حدودی قیمتوں کی پابندیاں پوری کرنے کے لیے V کی ضرورت ہوگی۔

مساوات (8-30) سے ملا فنکشن A شرط $\nabla \times (\nabla \times A) = 0$ کی پابندی کرتا ہے اگر a یہ شرط پوری کرتا ہے کہ (ٹینسر ترقیم میں) فنکشن $\partial a_\beta/\partial x_\alpha$ ایک برابر مستقل ضربیوں والا قطری میٹرکس ہے یعنی $\partial a_\beta/\partial x_\alpha = \text{const.}\ \delta_{\alpha\beta}$. دھیان رکھیے کہ اس شرط کا مطلب ہے کہ $\nabla \times a = 0.$ مثال کے طور پر یہ شرط اس وقت پوری ہوتی ہے جب $a = \hat{x}, \hat{y}, \text{ or } \hat{z}$، جو کارتیسی سمتی قدروں کے محوروں کی سمت میں اکائی ویکٹر ہیں یا کرّوی سمتی قدروں میں ویکٹر r کے ذریعے۔ اسے ثابت کرنے کے لیے ہم مساوات (8-30) سے دیکھتے ہیں کہ

$$B = \nabla \times A = -\nabla \times (a \times \nabla U). \qquad (8\text{-}31)$$

ٹینسر ترقیم میں یہ

$$-\nabla \times A|_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[a_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[a_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right] \qquad (8\text{-}32)$$

ہو جاتا ہے جو $\nabla^2 U = 0.$ کی شرط کا استعمال کرنے سے

$$-\nabla \times A|_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\beta}\right), \qquad (8\text{-}33)$$

ہو جاتا ہے۔

اس رشتہ کی پہلی رقم خالص گریڈینٹ ہے؛ باقی رقمیں بھی خالص گریڈینٹ ہیں اگر a اوپر کی شرط کو پورا کرتا ہے اس لیے $\nabla \times (\nabla \times A)$ غائب ہو جاتا ہے۔

ایک مقناطیسی مشترک سطح پہ A کی حدودی شرائط کو B کے اوپر پابندیوں سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ حد کے آرپار مقناطیسی فلکس کی برقراریت کا

تقاضا ہے کہ A کا خطی انٹیگرل مشترکہ سطح کے کسی من چاہے خم پر برقرار ہو۔ اس طرح یہ ضروری ہے کہ خطہ 1 اور 2 کی مشترکہ سطح پر

$$A_{t_1} = A_{t_2}$$

جہاں زیریں نشان t کا مطلب مماسی جز ہے۔ حقیقی سطحی کرنٹوں کی غیر موجودگی میں H کا مماسی جز برقرار ہوتا ہے : اگر سرایت پذیریاں خطی ہیں تو اس کا مطلب ہے:

$$\frac{1}{\mu_1}(\nabla \times A)_{t_1} = \frac{1}{\mu_2}(\nabla \times A)_{t_2}.$$

ان دونوں حدودی شرائط میں دو اجزا ہیں اس طرح ہیں چار حدودی مساوات ملتے ہیں۔ یاد رکھیے کہ اس کے ہم پلہ اسکیلر حالت میں ہمارے پاس اسکیلر مضمر ϕ کی دو شرطیں مساوات (15–2) اور (19–2) تھیں یہاں ہمارے پاس مساوات (30–8) کے V اور U کو حد کے آرپار جوڑنے کے لیے شرائط کی کافی تعداد ہے۔

ان عملی حالتوں میں جن میں حدود نہیں ہوتے یہ رواج ہے کہ مساوات (30–8) کے حلوں کو $V = 0$; رکھ کر لکھتے ہیں : تب کسی مخصوص a_n کے لیے A کے آرتھوگونل پھیلاؤ اتنے ہی فنکشنوں کا استعمال کر کے کیے جا سکتے ہیں جتنے اسکیلر کے لیے۔

لاپلاس مساوات کے اسکیلر حلوں سے A کا اخذ ایک اور الجھن کو بھی بچانے کا کام کرتا ہے جو اس حقیقت کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے کہ $\nabla^2 A$ صرف مستطیل سمتی قدروں میں ہی A کے الگ الگ اجزا کے لاپلاسیوں کا محض ویکٹر جوڑ ہوتا ہے ہمیں ویکٹر لہر مساوات کے سلسلہ میں اس مسئلہ کا پھر سامنا کرنا پڑے گا۔

8-8 ویکٹر مضمر دو ابعاد میں

دو ابعادی مسئلوں میں جہاں یہ مانا جا سکتا ہے کہ میدان z- سمتی قدر کے فنکشن نہیں ہیں ویکٹر مضمر کا ایک آسان استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس حالت میں جب سب بہاؤ کے خط z- محور کے متوازی ہوں۔ مساوات (29–8) سے ظاہر ہے کہ ویکٹر مضمر صرف z- جز رکھتا ہے۔ تب مقناطیسی میدانوں کو مضمر سے مندرجہ ذیل طور پر اخذ کیا جا سکتا ہے۔

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \qquad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{8–34}$$

اور لاپلاس مساوات یہ ہو جاتا ہے:

$$\nabla^2 A_z = 0. \qquad (8\text{–}35)$$

چونکہ A_z، z کا فنکشن نہیں ہے اس لیے صاف ہے کہ A کا ڈائیورجنس صفر ہے۔ مساوات (8–35) دو ابعادی لاپلاس مساوات ہے اور اس لیے ہم ویکٹر مضمر کو ایک مخلوط مضمر کا حقیقی یا قیاسی حصہ بنا سکتے ہیں (8–34) کے مساوات ریاضیاتی نقطہ سے وہی ہیں جیسے وہ مساوات جو بہاؤ فنکشن کا رشتہ مطابقہ برق سکونی میدان سے قائم کرتے ہیں چونکہ ویکٹر مضمر کے ہر مستطیلی جز کے لیے مضمر کی شکل وہی ہے جو اسکیلر کولوم مضمر کی۔ اس لیے خطی کرنٹ کا دو ابعاد میں ویکٹر مضمر مساوات (4–12) کی مشابہت سے اس شکل کا ہوگا:

$$-A_z = \frac{\mu_0}{2\pi} J \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \qquad (8\text{–}36)$$

اور مطابقہ مخلوط مضمر اس سے ملتا ہے:

$$W = \phi + i\psi = \frac{\mu_0}{2\pi i} J \ln\left(\frac{x + iy}{x_0 + iy_0}\right) \qquad (8\text{–}37)$$

W کا قیاسی حصہ بہاؤ فنکشن ψ، ویکٹر مضمر ہے۔ وہ سب طریقے جو برق سکونی دو ابعادی مسئلوں میں بہاؤ فنکشن دریافت کرنے کے لیے نکالے گئے تھے۔ دو ابعادی مقناطیسی حدودی قیمت کے مسئلوں کے حل کے لیے استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

مخلوط استحالہ جیسے شوارز استحالہ ایسے آسان مسئلوں کو جن میں مستقیم حدود کے سرایت پذیر وسیلوں کے قریب میں کرنٹ ہوں۔ زیادہ الجھی ہوئی تشکیلوں میں تبادل کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک نیم لامتناہی سرایت پذیر وسیلہ کی سطح سے دیے ہوئے فاصلے پر مقیم ایک خطی کرنٹ کے مسئلہ کو عکسوں کے طریقے سے حل کیا جا سکتا ہے (یہاں عکسی کرنٹ اسی جسامت اور نشان کا ہوگی جیسی کہ اصلی چالک میں) اور اس لیے مقناطیس انگیز حلقوں کے زیر اثر جھریوں اور شگافوں والی سرایت پذیر اشیا کے متعلق مختلف مسئلوں کے حل کو اس آسان عکسی حل سے

ایک مناسب شوارز استحالہ کے ذریعہ اخذ کیا جاسکتا ہے۔

دو ابعادی ہارمونکوں کا طریقہ بھی کارآمد ہے خاص طور سے ایسے مسئلوں میں جو سرایت پذیر مادے کے سلنڈروں پر مشتمل ہوں۔ مثال کے طور پر نصف قطر a کا ایک سرایت پذیر چالک سلنڈر لیجیے جس میں ایک مستقل کرنٹ J محور سے عمودی ایک باہری میدان B_0 کی موجودگی میں بہہ رہا ہے حسب معمول ہم ہموار کو دو خطوں میں بانٹ سکتے ہیں $r > a$ کے لیے ویکٹر مضمر A_z لاپلاس کے مساوات کا حل ہے جو بڑے r کے لیے مستقل میدان اور وہ میدان جو کرنٹ J پیدا کرتا ہے دونوں دے گا $r < a$ کے لیے ہم کو اس غیر یکساں مساوات کو حل کرنا ہوگا۔

$$\nabla^2 A_z = -\mu_i j, \tag{8-38}$$

جہاں $j = J/\pi a^2$ اور μ_i سلنڈر کی سرایت پذیری ہے، مساوات (8-35) کا ایک خصوصی حل $-\mu_i j r^2/4$, ہے اور چونکہ اس شرط کی وجہ سے کہ بنیادی نقطہ ایک معمولی نقطہ ہو r کی منفی قوتیں خارج ہو جاتی ہیں اس لیے عام حل یہ ہے :-

$$\underset{r<a}{A_z} = -\frac{\mu_i j r^2}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n. \tag{8-39}$$

ایسا حل لکھنے کے لیے جو سلنڈر کے باہر کے خطہ کے لیے جائز ہو ہم دیکھتے ہیں کہ x سمت میں ایک مستقل میدان کو ویکٹر مضمر $B_0 y = B_0 r \sin\varphi$, سے اخذ کیا جا سکتا ہے اور یہ کہ کرنٹ کا اثر وہی ہے جو بنیادی نقطہ پر ایک خطی کرنٹ کا۔ اس لیے :

$$\underset{r>a}{A_z} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln\frac{r_0}{r} + B_0 r \sin\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi) r^{-n}, \tag{8-40}$$

جہاں r_0 کوئی من مانی لمبائی ہے۔ $\mathbf{B}$ کے عمودی جز کا حد $r = a$ پر تسلسل A_z کے تسلسل کے مترادف ہے جبکہ $\mathbf{H}$ کے مماسی جز کے تسلسل کا تقاضا ہے کہ $r = a$ پر

$$\frac{1}{\mu_i}\frac{\partial}{\partial r}(A_{z<a}) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial r}(A_{z>a}) \tag{8-41}$$

یہ دو شرطیں ضربیوں کو دریافت کرنے کے کام آتی ہیں۔ نتیجہ یہ ہے :-

$$\underset{r<a}{A_z} = -\frac{\mu_i j r^2}{4} + \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_0} B_0 r \sin\varphi, \tag{8-42}$$

$$\underset{r>a}{A_z} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{\mu_0 J}{4\pi} + \left(1 + \frac{\mu_i - \mu_0}{\mu_i + \mu_0}\frac{a^2}{r^2}\right) B_0 r \sin\varphi,$$

جن سے B_r اور B کو فوراً دریافت کیا جا سکتا ہے۔ سلنڈر کے اندر جا ئزہ مضمر کو مستطیلی سمتی قدروں میں لکھنے سے کچھ سیکھا جا سکتا ہے ؛

$$\underset{r<a}{A_z} = -\frac{\mu_i j(x^2 + y^2)}{4} + \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_0} B_0 y, \tag{8-43}$$

جس سے بہ زیادہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ باہری میدان سے پیدا ہوا متفاوٗ یکساں ہے اور زیادہ سرایت پذیری کی انتہائی حالت میں ترغیبی میدان لگائے ہوئے میدان سے دوگنا ہے اس میں کرنٹ کا میدان شامل نہیں ہے

8-9 سلنڈری سمتی قدروں میں ویکٹر مضمر

ایک عملی اہمیت کی سہ ابعادی حالت سلنڈری تشاکل کی ہے یعنی جس میں کرنٹ کا بہاؤ صرف ہم محوری دائروں میں ہی ہوتا ہے۔ اس حالت میں A کا صرف ایک جز A_φ ہے جو سلنڈری سمتی قدروں r, φ, z; میں تفرقی مساوات

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_\varphi = \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu j_\varphi \tag{8-44}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ حل سمتی قدر φ پر منحصر نہیں ہے۔

مساوات (8-44) بیسل مساوات کا مساوات (5-30)، جس میں $n = 1$، یا مطابق تبدیل شدہ بیسل مساوات، مساوات (5-30')، اور اس کے ساتھ کی z کی مساوات میں الگ ہو جاتا ہے جیسا سیکشن 5-8 میں بتایا گیا تھا حل اس شکل کے ہوں گے ؛

$$A_\varphi = \cos(kz - \alpha_k)[A(k)I_1(kr) + B(k)K_1(kr)] \tag{8-45}$$

یا :-

$$A_\phi = e^{\mp kz}[A^{\pm}(k)J_1(kr) + B^{\pm}(k)N_1(kr)], \qquad (8\text{–}46)$$

جو اس بات پر منحصر ہے کہ حل کی کون سی شکل طبیعی مسئلہ کے لیے مناسب ہے۔ اگر کرنٹ r_0 نصف قطر کے ایک حلقہ میں یا سالینائڈ میں بہتی ہے تو حل کو مساوات (8-45) کی شکل میں لکھا جائے گا ؛ خطہ 1, کے لیے $r < r_0$, اور خطہ 2, کے لیے $r > r_0$. مستقلوں کو خطہ 1 اور 2 کے درمیان مشترکہ سطح $r = r_0$, پر حدودی شرائط کا استعمال کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے :

$$A_\phi^{(1)} = A_\phi^{(2)}, \qquad (8\text{–}47)$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi^{(1)}) - \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi^{(2)}) = j_{s\phi}, \qquad (8\text{–}48)$$

جہاں $j_{s\phi}$ مشترکہ سطح پر سطحی کرنٹ کی کثافت ہے۔ مساوات (8-47) اور (8-48) بالترتیب $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ اور $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ سے مطابقت رکھتے ہیں۔ ($\mathbf{H}$ کا z- جزو $r = r_0$). پر غیر مسلسل ہو جاتا ہے) اگر کرنٹ کے حلقے ایک مستوا میں ہیں جسے ہم $z = 0$. لے سکتے ہیں تو حل کو مثبت اور منفی z. کے خطوں کے لیے مساوات (8-46) کی شکل میں لکھنا چاہیے۔ وہ حدودی شرط جو مساوات (8-48) کی جگہ لی جائے گی یہ ہے کہ $\mathbf{H}$ نصف قطری جز یعنی $(\partial A_\phi/\partial z)/\mu$، مستوا $z = 0$ میں سطحی کرنٹ پر غیر مسلسل ہو جاتا ہے۔

آیئے ہم اس طریقے کا اطلاق نصف قطر r_0. کے ایک واحد ہموار حلقہ میں کرنٹ J کی وجہ سے ویکٹر مضمر معلوم کرنے کے لیے کریں۔ اس مسئلہ میں فنکشن کا چناؤ اختیاری ہے۔ اگر ہم مساوات (8-45) کو چنتے ہیں تاکہ r_0 نصف قطر کے سلنڈر کو دونوں خطوں کو الگ کرنے والی سطح لیا جائے تو پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ ہمارے حل سب جگہ باضابطہ ہونے کے لیے $K_1(kr)$ کو اندرونی خطہ سے اور $I_1(kr)$ کو باہری خطہ سے نکال دینا ہوگا۔ اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں :-

$$A_\varphi^{(1)} = \int_0^\infty A(k) I_1(kr) \cos kz \, dk,$$

$$A_\varphi^{(2)} = \int_0^\infty B(k) K_1(kr) \cos kz \, dk. \qquad (8\text{–}49)$$

مساوات (8–47) کی مانگ ہے کہ

$$A(k) I_1(kr_0) = B(k) K_1(kr_0), \qquad (8\text{–}50)$$

جب کہ مساوات (8–48) $j_\varphi = J\,\delta(z)$ رکھنے پر

$$\left[\int_0^\infty \left\{A(k) \frac{\partial}{\partial r}[rI_1(kr)] - B(k) \frac{\partial}{\partial r}[rK_1(kr)]\right\} \frac{\cos kz \, dk}{r}\right]_{r=r_0} = \mu J\,\delta(z) \qquad (8\text{–}51)$$

دیتا ہے۔

ہم $\cos k'z$ سے ضرب کر کے فوریر اینٹگرل مصدقہ کا اطلاق کر سکتے ہیں یا اسی کے مساوی طریقے سے یہ دھیان رکھ کر کہ $\int \cos kz \, dk$, کی فطرت δ فنکشن کی ہے ہم مساوات (8–51) سے یہ پا سکتے ہیں؛

$$\frac{\pi}{r_0}\left[A(k) \frac{\partial}{\partial r}[rI_1(kr)] - B(k) \frac{\partial}{\partial r}[rK_1(kr)]\right]_{r=r_0} = \mu J. \qquad (8\text{–}52)$$

لیکن بیسل فنکشنوں اور ان کے تفرقی اخذوں کے درمیان ایک ریاضیاتی رشتہ ہے جو مندرجہ ذیل ہے

$$I_n'(kr) K_n(kr) - K_n'(kr) I_n(kr) = \frac{1}{kr}. \qquad (8\text{–}53)$$

اس لیے ہم ضربیے فوراً معلوم کر سکتے ہیں؛

$$A(k) = \frac{r_0 \mu J}{\pi} K_1(kr_0),$$

$$B(k) = \frac{r_0 \mu J}{\pi} I_1(kr_0),$$

اور مضمر یہ ہیں ؛-

$$A_\varphi^{(1)} = \frac{r_0 \mu J}{\pi} \int_0^\infty K_1(kr_0) I_1(kr) \cos kz \, dk,$$

$$A_\varphi^{(2)} = \frac{r_0 \mu J}{\pi} \int_0^\infty I_1(kr_0) K_1(kr) \cos kz \, dk. \qquad (8\text{–}54)$$

اگر دوسری طرف $z = 0$ مستوا کو دونوں خطوں کو الگ کرنے والا مان لیا جائے تو چونکہ $N_1(kr)$ مبدا پر ریگولر نہیں ہے۔ لہذا مساوات (8-46) ہمیں مساوات

$$A_{\phi}^{\pm} = \int A^{\pm}(k) J_1(kr) e^{\mp kz}\, dk, \qquad (8\text{-}25)$$

پر پہنچاتا ہے۔

اس مستوا میں سطحی کرنٹ $J\,\delta(r - r_0)$ تک محدود ہے اور یہ $z = 0$ پر $\partial A_{\phi}/\partial z$ میں ایک سلسلہ شکنی پیدا کر دیتا ہے۔ ضربیوں $A(k)$ کو دریافت کرنے کے لیے نیچے کے فوریر بیسل انٹیگرل کے استعمال کی ضرورت ہوگی۔

$$\int_0^{\infty} k\, dk \int_0^{\infty} r\, dr\, f(k) J_n(kr) J_n(k'r) = f(k'), \qquad (8\text{-}56)$$

جو کہ ہمیں فوراً دریافت طلب مضمر

$$A_{\phi}^{\pm} = \frac{r_0 \mu J}{2} \int_0^{\infty} J_1(kr_0) J_1(kr) e^{\mp kz}\, dk \qquad (8\text{-}57)$$

دیتا ہے۔

مجوّزہ حوالے

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*

باب 6 میں حد ودی شرائط کے ساتھ ویکٹر مضمر کے مکمل حل کا اخذ شامل ہے۔

P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics.*

سے زیادہ مکمل ریاضیاتی بحث

W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity.*

باب 8 میں ویکٹر مضمر کے دریافت کرنے کے طریقے اور اس کے استعمال کی بہت سی مثالیں دی ہوئی ہیں۔

مشق

1. ۔ ایک چمبک جس کے قطبوں کے درمیان کی فصل ان قطبوں کی چوڑائی کے مقابلہ میں کم ہے اور جس کی پیٹیں فصل سے دور رہیں۔ مخلوط مضمر فنکشن معلوم کیجیے اور متشاکل کے مستوا میں پولوں سے کافی باہر ایک نقطہ سے لے کر فصل کے اندر ایسے مقام تک جہاں میدان واقعی مستقل ہو میدان کو پلاٹ کیجیے ۔

2. ۔ ایک کرّوی شیل جس کے نصف قطر a اور b ہیں ایک مستقل مقناطیسیت M سے مقناطیا ہوا ہے۔ اس کے اندر اور باہر B اور H دریافت کیجیے۔ اگر کرّوی جوف شیل کی باہری سطح سے ہم مرکزی نہ ہو تو اس کا کیا اثر ہوگا ؟

3. ۔ ایک b نصف قطر کے لمبے سلنڈری چالک میں جس میں ایک یکساں بٹی ہوئی کثافت J کی کرنٹ بہہ رہی ہے، ایک سلنڈری سوراخ کے اندر مقناطیسی میدان معلوم کیجیے۔ (ایسی عرض تراش کے سلنڈروں کے لیے اس نتیجہ کی تعمیم کچھ اونچی توانائی کا سراغ پیدا کرنے والی ترکیبوں میں مقناطیسی میدان کی ڈیزائن میں استعمال کیا جاتا ہے)

4. ۔ ایک کنڈلی ایک کرّے کی سطح پر اس طرح لپٹی ہوئی ہے کہ کرّے کے اندر میدان یکساں ہے۔ کنڈلی کی لپیٹ کیسی ہے، (اس طرح کی لپیٹ کا استعمال وٹینگ ہاؤس۔ گوڈسمٹ کمیت اسپیکٹرومیٹر میں کیا جاتا ہے)

5. ۔ اگر ایک کرہ پر یکساں سطحی چارج ہے اور وہ زاویائی رفتار ω سے گردش کر رہا ہے تو باہری نقطوں پر اس کا موثر مقناطیسی دو قطبی گردشہ کیا ہے ؟

6. ۔ ایک کرّوی شیل جس کے مادّے کی سرایت پذیری $\mu \neq \mu_0$، اور جس کا اندرونی نصف قطر a اور باہری b ہے ایک میدان B_0 میں رکھا ہے جو رکھنے سے پہلے یکساں تھا۔ نصف قطر a کے کروی جوف میں میدان کیا ہے؟

7. ۔ خلا میں ایک لامتناہی لمبا تار $x = 0, y = a$ پر ہے اور اس میں کرنٹ J بہہ رہی ہے جبکہ وہ ساری جگہ جس کے لیے x منفی ہے ایک $\mu \neq \mu_0$ وسیلے سے بھری ہوئی ہے۔ فضا کے ہر نقطہ پہ میدان دریافت کیجیے ۔

8۔ ایک لمبے تار کا میدان دریافت کیجیے جو $x = a, y = b$ پر خلا میں واقع ہے اور کرنٹ J لے جا رہا ہے جب کہ وہ ساری جگہ جس کے لیے x منفی ہے اور وہ ساری جگہ جس کے لیے y منفی ہے ایک مقناطیسی شئے سے بھری ہے جس کی سرایت پذیری بہت زیادہ ہے یعنی $\mu \rightarrow \infty$.

9۔ ایک a نصف قطر کے چھلّے کی وجہ سے مقناطیسی ویکٹر مضمر کا حساب لگائیے جس کے ہم محوری ایک سرایت پذیر دائری سلنڈر ہے جس کی سرایت پذیری $\mu \neq \mu_0$ اور نصف قطر $b < a$ ہے (Smythe)

10۔ ایک b نصف قطر کے ملائم لوہے کے چھلّے پر جس کے عرض تراش کا نصف قطر $a \ll b$, ہے تار کے N لپیٹے ہیں جو کرنٹ J. لے جا رہے ہیں۔ چھلّے کے ایک نقطہ پر δ لمبائی کی ایک چھوٹی ہوائی جھری کاٹ دی گئی ہے۔ لوہے کی سرایت پذیری بڑی مان کر مقناطیسی سرکٹ کی رکاوٹ کا حساب لگائیے۔

11۔ دکھائیے کہ اگر $B = \nabla \times A$ اور $H = -\nabla\phi_m$, اور اگر A اور ϕ_m بالترتیب مساوات (8-13) اور (8-14) سے حاصل ہوں تو B اور H رشتہ $B = \mu_0(H + M)$ کی پابندی کرتے ہیں۔

12۔ مساوات (8-30) میں $a = k$ رکھیے جہاں k سلنڈری سمتی قدروں میں z محور پر اکائی ویکٹر ہے $V = 0$. لیجیے۔ دکھائیے کہ اگر U کو سلنڈری سمتی قدروں میں ایک اسکیلر مضمر کے حل کی طرح پھیلایا جائے تو ماحصل ویکٹر مضمر پھیلاؤ مساوات (8-45) اور (8-46) کے مطابق ہے جنہیں براہِ راست انٹیگریشن سے حاصل کیا گیا تھا۔

باب (9)

میکسویل کے مساوات

9-1 فیراڈے کا ترغیب کا قانون

برقی سکونیات میں برقی میدان استمراری ہوتا ہے یعنی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. باب 7 میں ہم نے دیکھا ہے کہ قائم کرنٹ پیدا کرنے کے لیے برقی میدان ہونے چاہئیں مثلاً مساوات (7-5) میں $\mathbf{E}'$ جو اس شرط کو توڑتے ہیں۔ اور تجربات سے معلوم ہوا ہے کہ بدلتے ہوئے مقناطیسی میدانوں کے ساتھ فی الواقعی ایک غیر استراری برقی میدان ہوتا ہے۔ اس حالت کا بیان کرنے والا قانون عموماً فیراڈے ترغیب کا قانون کہلاتا ہے اور اس کی تشکیل اس طرح کی جا سکتی ہے۔ مزاحمت R کا ایک سرکٹ لیجیے جس میں کرنٹ J بہہ رہی ہے اور جس میں برق محرک قوت $\mathcal{E}$ ہے۔ اس سرکٹ سے منسلک مقناطیسی فلکس کی تعریف یہ ہے :-

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \qquad (9\text{-}1)$$

جہاں اینٹگریشن کی سطح سرکٹ سے محیط ہے۔ اگر یہ فلکس وقت کے ساتھ بدلتا ہے تو تجربے سے پایا گیا ہے کہ

$$JR - \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \qquad (9\text{-}2)$$

اس کا مطلب ہے کہ جو کرنٹ بہہ رہی ہے وہ اس سے مختلف ہے جو اوم کے قانون کے مطابق ہونی چاہیے۔ کرنٹ کا یہ فرق ایک زاید برق محرک قوت کی وجہ سے ہے جو سرکٹ میں گزرنے والے مقناطیسی فلکس کی وقت کے ساتھ بدلنے

کی منفی شرح کے برابر ہے۔ دھیان رکھیے کہ مساوات (9-2) ایک آزاد تجرباتی قانون ہے اور اسے کسی طرح سے بھی اُن میں سے کسی رشتہ سے اخذ نہیں کیا جا سکتا جو پہلے استعمال کیے جا چکے ہیں۔ خصوصاً جیسا اکثر کہا جاتا ہے اس کے خلاف فیراڈے کا ترغیبی قانون مقناطیسی میدانوں میں کرنٹوں کی مجموعی توانائی بیلنس پر توانائی کی برقراریت قانون کے اطلاق کا نتیجہ نہیں ہے۔

مساوات (9-2) کی تشکیل دیے ہوئے سرکٹ میں گزرنے والے کل فلکس کے لحاظ سے کی گئی ہے۔ یہ فلکس کئی وجوہات سے بدل سکتا ہے اس کے بدلنے کی وجہ باہری میدان کی وقت کے ساتھ تبدیلی ہو سکتی ہے یا خود سرکٹ یا اس کے کسی حصّہ کا حرکت میں ہونا ہو سکتا ہے۔ ہم مساوات (9-2) کو ایسا تجرباتی قانون سمجھیں گے جو حرکت کرنے والے وسیلوں کی کرنٹوں سمیت ایسی سب حالتوں کے لیے جائز ہے۔

میکسویل نے یہ پہچان لیا تھا کہ فیراڈے کے ترغیب قانون کی اہمیت اُس سے کہیں زیادہ عام تھی جو مساوات (9-2) میں بیان کی گئی حالت سے واقعی ظاہر ہوتی تھی۔ مساوات کو اس مساوی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:۔

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = JR - \mathcal{E}, \qquad (9\text{-}3)$$

جو بتاتا ہے کہ تار کی سمت میں ایک برقی میدان ہونا چاہیے جو غیر برق سکونی ہوگا۔ اس حدودی شرط کی وجہ سے جس کی مانگ ہے کہ تار کی حد کے آرپار برقی میدان کے مماسی جز مسلسل ہونے چاہئیں ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ مساوات (9-3) اس خطّہ میں بھی جائز ہوگا جو تار کے بالکل پاس ہے۔ چونکہ تار کے امتیازی خاصّے یعنی اس کی مزاحمت اور اُس کی برق محرک قوت مساوات (9-3) کے بائیں حصّے میں شامل نہیں ہیں اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ غالباً یہ رشتہ درحقیقت ایک کرنٹ لے جانے والے چالک کی موجودگی سے آزاد ہے اور یہ ایک عام طبیعی قانون ہے جو خلا میں ایک برقی میدان کا رشتہ ایک مقناطیسی میدان کے بدلنے کی شرح سے قائم کرتا ہے۔ اگر ایسا ہے تو اس مساوات کو ایک

تفرقی اظہار میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جو آزاد فضا کے لیے یا رُکے ہوئے وسیلہ کے لیے جائز ہوگا۔ دونوں میں سے کسی حالت میں فلکس اینٹگرل مساوات (9-1) کے کلی تفرقی اخذ کو مقناطیسی میدان کے جزوی وقتی تفرقی اخذ کے اینٹگرل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے اور مساوات (9-3)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \qquad (9\text{-}4)$$

ہو جاتا ہے۔ اسٹوک مصدقہ کے استعمال سے ہم مساوات:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (9\text{-}5)$$

پر پہنچتے ہیں مساوات (9-5) برق سکونی میدان کے غیر گردشی پن میں تبدیلی کو ظاہر کرتا ہے جو فیراڈے کے ترغیبی قانون کا ایک لازمی نتیجہ ہے۔

9-2 سکونی وسیلوں کے لیے میکسویل کے مساوات

اب ہمارے پاس ماخذ کثافت (ڈائیورجنس) اور گردشی کثافتوں (کرل)، دونوں کے لیے عبارت دونوں بنیادی میدانی ویکٹروں کے لیے ہیں۔ (2-5)، (7-38)، (8-3) اور (9-5) مساواتوں سے ہمیں

$$(1) \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0^{-1}\rho_{\text{total}} = \epsilon_0^{-1}(\rho_{\text{true}} - \nabla \cdot \mathbf{P}),$$

$$(2) \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(3) \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (9\text{-}6)$$

$$(4) \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j}_{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

ملتے ہیں۔

(9-6) مساوات میکسویل کے برق حرکیاتی میدانی مساوات ہیں جن کی تشکیل اس طرح ہے کہ وہ سکونی وسیلوں کے لیے جائز ہیں۔ سکون کی حالت میں مادّی وسیلوں کی بندش اس وجہ سے ہے کہ مساوات (9-6) (4) میں حملی کرنٹ رقموں کو چھوڑ دیا گیا ہے، اور مساوات (9-5) کے اخذ میں فلکس کی

ایسی تبدیلیوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے جو وسیلے کی حرکت کی وجہ سے ہوتی ہیں۔ (9-6) مساواتیں اُن مرادف خلائی چارجوں یا کرنٹوں کے لحاظ سے لکھے گئے ہیں جو میدانوں کو پیدا کرتے ہیں اور ان میں مرادف کرنٹ اور چارج کی کثافت صریحی طور پر آتے ہیں اگر زائد میدانی ویکٹر D اور H اپنے تعریفی مساوات:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad (2\text{-}3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad (8\text{-}4)$$

کے ذریعہ داخل کیے جائیں تو میکسویل کے میدانی مساوات یہ ہو جاتے ہیں:

$$(1) \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{true},$$

$$(2) \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(3) \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (9\text{-}7)$$

$$(4) \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{true} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

میدانی مساوات (9-7) شکل میں (9-6) مساواتوں کے مقابلے میں زیادہ سادے نظر آتے ہیں لیکن طبیعی لحاظ سے درحقیقت زیادہ اُلجھے ہوئے ہیں۔ ان مساواتوں کا حل صرف جب ہی ممکن ہے اجب "ترکیبی" مساوات دستیاب ہوں جو D کو E، سے j کو E، سے اور H کو B سے جوڑتے ہوں جیسے ایک خطی وسیلے کے $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, $\mathbf{j}_{true} = \sigma\mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E}$, یا غیر خطی وسیلے کے لیے جو بھی تشکیلیں لاگو ہوں۔

9-3 متحرک وسیلوں کے لیے فیراڈے کا قانون

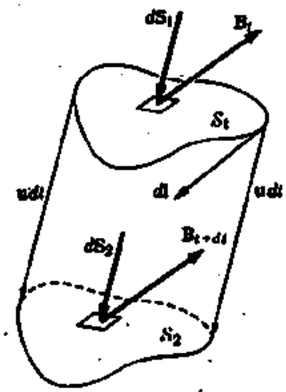
ترغیب کے قانون کی توسیع کرنے میں جس سے وہ عام حرکت کا جائزہ لے سکے کافی احتیاط برتنے کی ضرورت ہے۔ پہلے ہم کو ایک ضمنی مصدقہ اخذ کرنا ہوگا جو کسی دی ہوئی سطح کے اوپر فلکس کی کل وقتی تبدیلی کی شرح کو ویکٹر B کے کسی فنکشن کے سطحی انٹیگرل کے لحاظ سے ظاہر کرے جبکہ وہ سطح بھی جس پر فلکس کی قیمت دریافت کرنا ہے حرکت میں ہو۔

پھر مان لیجیے کہ Φ_m ویکٹر میدان B کی سطح S کے آرپار فلکس ہے۔ ہمیں وہ فنکشن DB/Dt دریافت کرنا ہے جس کی تعریف اس طرح پر ہے۔

$$\frac{d}{dt}\Phi_m = \frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int \frac{D\mathbf{B}}{Dt}\cdot d\mathbf{S}. \qquad (9\text{-}8)$$

DB/Dt کی قیمت نکالنے کے لیے شکل 9-1 میں دکھائی سطح پر غور کیجیے جو وقت t پر مقام 1 پر اور وقت $t + dt$ پر مقام 2 پر ہے۔ تفرق کے قاعدوں کے مطابق

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\Delta t}\int (\mathbf{B}_{t+dt}\cdot d\mathbf{S}_2 - \mathbf{B}_t\cdot d\mathbf{S}_1). \qquad (9\text{-}9)$$



[شکل 9-1. DB/Dt کی قیمت دریافت کرنے کے لیے شکل]

اگر ہم وقت t پر S_2, S_1 اور S کے کناروں کے نقش سے محدود حجم پر مقالۂ گاس کا اطلاق کریں تو ہمیں ملتا ہے:

$$\int \nabla\cdot\mathbf{B}\,dv = \int (\mathbf{B}_t\cdot d\mathbf{S}_2 - \mathbf{B}_t\cdot d\mathbf{S}_1) - \oint \mathbf{B}_t\cdot(\mathbf{u}\,dt\times d\mathbf{l}). \qquad (9\text{-}10)$$

آخری کر رقم فلکس کی اس تبدیلی ظاہر کرتی ہے جو بازو کی سطح پر جس کا ایک قطعہ $d\mathbf{l}$[1] ہے اور جو S کی حدود کی حرکت سے بنی ہے پیدا ہوتی ہے۔ دھیان

[1] $d\mathbf{l}$ کی سمت اس طرح چنی گئی ہے کہ داہنے ہاتھ کے قاعدے کے موجب $d\mathbf{S}$ سے مطابقت رکھتے ہیں۔

رکھیے کہ مساوات (9-10) میں سطحوں S_1 اور S_2 پر فلکس کو وقت t پر لیا گیا ہے کیونکہ گاس کے مصدقہ کا اطلاق ویکٹر $\mathbf{B}$ کی بہ یک وقت قیمتوں پر ہی کیا جا سکتا ہے۔ S_2 پر $\mathbf{B}$ کی قیمت کو وقت $t + dt$ پر اس کی وقت t پر قیمت کے لحاظ سے ٹیلر کے مصدقہ

$$\mathbf{B}_{t+dt} = \mathbf{B}_t + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt + \cdots . \qquad (9\text{-}11)$$

سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (9-10) اور (9-11) کو مساوات (9-9) میں رکھنے پر یہ انتہائی حالت میں (With limit,)

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} + \oint \mathbf{B}\times\mathbf{u}\cdot d\mathbf{l} + \int \frac{\nabla\cdot\mathbf{B}\, dv}{dt}. \qquad (9\text{-}12)$$

ہو جاتا ہے۔ تب اسٹوک مصدقہ کو اور اس حقیقت کو کہ

$$dv = \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}\, dt, \qquad (9\text{-}13)$$

استعمال کر کے ہم یہ دریافت طلب رشتہ پاتے ہیں:

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{u}) + (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{u}. \qquad (9\text{-}14)$$

اس عبارت کی پہلی رقم S کے آر پار فلکس کی اس تبدیلی کو بتاتی ہے جو ویکٹر میدان کی وقت کے ساتھ تبدیلی کی وجہ سے پیدا ہوئی ہے۔ دوسری رقم حرکت کرنے والی سطح کے حدود کے اوپر فلکس کی کمی بتاتی ہے۔ تیسری رقم سطح S کے ایک ایسے ویکٹر میدان میں سے گزرنے کی وجہ سے رونما ہوتی ہے جس میں فلکس خطوط پیدا ہوتے ہیں۔ مساوات (9-14) کو اب فیراڈے کے قانون مساوات (9-2)، کو ایک متحرک وسیلے میں تفرقی شکل میں ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ مقناطیسی ترغیب $\mathbf{B}$ ہمیشہ کرلی ہوتی ہے ہمیں مساوات (9-3) اور (9-14)، سے ملتا ہے۔

$$\oint \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int\left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\right]\cdot d\mathbf{S}. \qquad (9\text{-}15)$$

ہم نے سرکٹ کے گرد میدان کو $\mathbf{E}'$ کہا ہے کیونکہ $\mathbf{E}'$ کو متحرک حوالہ کے فریم میں ناپنا ہوگا یعنی فیراڈے کا قانون بالخصوص اُس تار میں ناپے گئے کرنٹ پر عائد ہوگا جس میں فلکس بدل رہا ہے خواہ فلکس کی تبدیلی کا سبب کچھ بھی ہو۔ مساوات (9-15) پر اسٹوک کے مصدقہ کا اطلاق کرنے سے ہم اس عبارت پر پہنچتے ہیں؛

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}), \qquad (9\text{–}16)$$

جہاں $\mathbf{E}'$ اب بھی متحرک وسیلے میں ناپا گیا میدان بتاتا ہے۔ مساوات (9-16) اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے؛

$$\nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (9\text{–}17)$$

لیکن مساوات (9-17)، میں کرل کا آرگومینٹ $\mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ درحقیقت وہ میدان بتاتا ہے جسے ساکن مشاہد ناپتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ایک مشاہد جو ایک چارج q مقناطیسی میدان $\mathbf{B}$ میں رفتار $\mathbf{u}$ سے لے جا رہا ہے ایک قوت $q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ محسوس کرے گا جو ایک برقی میدان $\mathbf{E}$ کی قوت کے علاوہ ہوگا جو وہاں موجود ہو سکتا ہے۔ اس لیے اگر ایک متحرک مشاہد میدان $\mathbf{E}'$ کا مشاہدہ کرے تو ایک ساکن مشاہد کے ذریعہ مشہود میدان $\mathbf{E}'$ میں سے موثر میدان $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ کو نکال دینے سے حاصل ہوگا یعنی $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. اس لیے ایک ساکن مشاہد کے لیے مساوات (9-17) یہ ہو جاتا ہے۔

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (9\text{–}5)$$

اس کا مطلب ہے کہ فیراڈے کے ترغیب قانون کی تفرقی تشکیل میدان کے اندر کے وسیلہ کی حرکت سے بے نیاز ہے۔ ایسا ہی ہونا بھی چاہیے کیونکہ مساوات (9-5) مرادف خلائی میدانوں $\mathbf{B}$ اور $\mathbf{E}$ کے درمیان ایک خالص میدانی رشتہ ہے اور اس لیے اسے وسیلہ کی خصوصیات میں سے

جن میں اس کی حرکت بھی شامل ہے آزاد ہونا چاہیے۔ بہر حال متحرک مشاہد جس برقی میدان کا مشاہدہ کرتا ہے اس میں دو ترمیں ضرور ہیں، یعنی "تمرغیلی میدان" جو باہری مقناطیسی میدانوں کی وقت کے ساتھ بدلنے کی شرح سے پیدا ہوتا ہے اور حرکتی میدان" $u \times B$، جو مشاہد کی مقناطیسی میدان میں حرکت سے پیدا ہوتا ہے، دھیان دیجیے کہ اس بحث میں یہ مان لیا گیا ہے کہ خود برقی میدان پر مشاہد کے حرکت کی حالت اثرانداز نہیں ہوتی۔ جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ مفروضہ درحقیقت اسی حالت میں جائز ہے جب مشاہد کی حرکت روشنی کی رفتار کے مقابلہ میں کم ہو۔ اس لیے ان سب نتیجوں کا جو ہم متحرک وسیلوں میں میکسویل کے مساواتوں کے متعلق نکال رہے ہیں، اطلاق یقین کے ساتھ صرف اسی حالت میں کیا جا سکتا ہے جب ایسے وسیلوں کی رفتار روشنی کی رفتار کے مقابلہ میں کم ہو۔

9-4 متحرک وسیلوں کے لیے میکسویل کے مساوات

ہم نے یہ نتیجہ نکالا ہے کہ مساوات (9-6) کی شکل میں میکسویل کے چار مساواتوں میں سے تیسری پر اس وسیلہ کی حرکت کا جس میں میدانوں کو ناپا گیا ہے کوئی اثر نہیں ہوتا۔ پہلے اور دوسرے مساواتوں پر بھی اس حرکت کا کوئی اثر نہیں ہوتا کیونکہ بجز اضافیتی طور پر وسیلہ کی چارج کثافت مشاہد کی حرکت کی حالت سے اثر پذیر نہیں ہوتی۔ واحد تبدیلی (9-6) مساواتوں کے چوتھے مساوات یعنی عملی رقم میں کرنٹ میں تصحیح اور تقطیبی کرنٹ کی تصحیح ہے۔ چارج کثافت اور مرادف تقطیبی چارج کی حرکت کی وجہ حمل کرنٹ محض $u(\rho_{true} - \nabla \cdot P)$ ہے۔ متحرک سطح پر تقطیبی فلکس کی تبدیلی کی وجہ سے جو چارج ضائع ہو جاتا ہے اسے شمار میں لینے پر صحیح تقطیبی کرنٹ بجائے $\partial P/\partial t$، کے DP/Dt سے ملتی ہے۔ اس طرح وہ کل کرنٹ جو مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے نیچے دیے ہوئے حصوں پر مشتمل ہے۔

(1) حقیقی کرنٹ j_{true}

(2) حملی کرنٹ $u(\rho_{true} - \nabla \cdot P)$.

(3) کرنٹ جو تقطیب کی تبدیلی کی شرح کی وجہ سے اور جو مساوات (9-14) کی مشابہت میں قطبائے وسیلے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہیں اور

جو یہ ہیں :-

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{u}.$$

(4) خلائی نقل کرنٹ $\epsilon_0 \, \partial \mathbf{E}/\partial t.$

میکسویل کے مساواتوں میں چوتھے کی ان تصحیحوں کے ساتھ اب میدانی مساواتوں کے پورے سیٹ کو اس طرح لکھنا ممکن ہے کہ وے ایک غیر مقناطیسی اور رفتار $\mathbf{u}$ سے جو روشنی کی رفتار کے مقابلہ میں چھوٹی ہے حرکت کرنے والے وسیلہ کے لیے جائز ہوں :-

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{true}},$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{true}} + \mathbf{u}(\rho_{\text{true}} - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{u} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad (9\text{–}18)$$

$$= \mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{true}} + \rho_{\text{true}}\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) \right].$$

دھیان رکھیے کہ متحرک (غیر مقناطیسی) وسیلوں کے لیے میکسویل کے مساوات جو مساوات (4) (9-18) کی شکل میں دیے ہوئے ہیں ملے جلے ہیں، یعنی مآخذ ρ_{true}, $\mathbf{P}$, $\mathbf{j}_{\text{true}}$ متحرک وسیلہ میں ناپے گئے ہیں جب کہ میدانوں کو ایک سکونی فریم میں دیا گیا ہے۔

وہ ترکیبی مساوات جو متحرک وسیلہ میں حقیقی کرنٹ اور متحرک وسیلہ کی قطبیت دیتے ہیں متحرک وسیلہ میں ناپے گئے میدانوں سے اخذ کیے جاتے ہیں:

$$\mathbf{j}_{\text{true}} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \sigma \mathbf{E}',$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \qquad (9\text{–}19)$$

ایک بلاچارج کے کرنٹ سے پاک ڈائیلکٹرک کے لیے میکسویل کی مساواتوں کو تب اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے :

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \\
&(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\
&(3) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (9\text{-}20) \\
&(4) \quad \nabla \times [\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P} \times \mathbf{u}] = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

مساوات (4) (9-20) سے معلوم ہوتا ہے کہ میکرو نقطہ نظر سے ایک قطبا یا متحرک ڈائیلکٹرک ایک مقناطیسی شے کے مرادف ہے جس کا مقناطیسی گردشہ

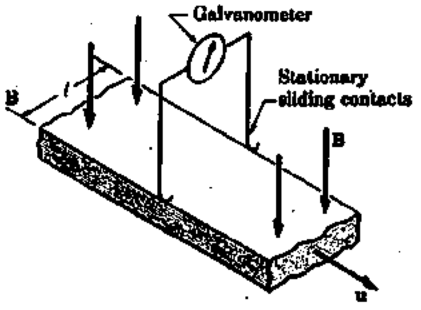
$$\mathbf{M}_{eq} = \mathbf{P} \times \mathbf{u}. \qquad (9\text{-}21)$$

ہے۔ یہ آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے اگر ہم کسی شے کی تقطیب شدہ پٹی پر غور کریں جو تقطیب کی سمت کے عمودی سمت میں حرکت کر رہی ہے اس حالت میں ایک مرادف مثبت کرنٹ حرکت کی سمت میں ہوگی اور منفی چارجوں کی حرکت کی وجہ سے ایک دوسری کرنٹ الٹی سمت میں پہلی سے ہٹی ہوئی ہوگی۔ یہ دونوں کرنٹ مل کر ایک کرنٹ حلقہ بناتی ہیں اور اس طرح مقناطیسی مومینٹ پیدا کرتی ہیں۔ اس لیے ایک متحرک تقطیب شدہ ڈائیلکٹرک ایک مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو مقناطیسی ہوئی شے کے میدان سے ناقابلِ امتیاز ہے۔ اس اثر کو انجن آئنسٹینو الڈ اور دوسروں نے تجربہ کے ذریعہ دکھایا ہے۔

9-5 مقناطیسی میدان میں چالک کی حرکت متحرک وسیلوں کے اندر میدانوں پر

میکسویل کے مساواتوں کے اطلاق کی ایک مثال کے طور پر آئیے ہم ایک چالک پٹی پر غور کریں جو لا متناہی لمبی اور مستطیل عرضی تراش کی ہے اور جو اپنے طول کی سمت میں u رفتار سے ایک یکساں مقناطیسی میدان B. کے لحاظ سے اضافی حرکت کر رہا ہے جیسا شکل 9-2, میں دکھایا گیا ہے پٹی کی حرکت کی سمت سے

B زاویہ قائمہ بناتی ہے اور ہم یہ مان لیں گے کہ وہ وقت کے لحاظ سے مستقل ہے جیسا شکل میں دکھایا ہے، پٹی کے مخالف بازوؤں کو فاصلہ l پٹی کی کام والی لمبائی ہے۔ طبیعی افکار سے یہ توقع کی جاسکتی ہے کہ اس مرکب حلقہ میں کرنٹ بہے گی۔ پٹی کے ساتھ حرکت کرنے والا ایک الیکٹران ایک موثر میدان — $E' = u \times B$، محسوس کرے گا جس کی وجہ سے تماسوں میں ہو کر ایک کرنٹ بہے گی جسے باہری سرکٹ میں ایک ساکن مشاہد ناپے گا۔ کسی ایک فریم میں متغیہ مشاہد کے لیے کرل E غائب ہو جانا چاہیے کیونکہ B وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا ہے (B کا ماخذ آیا ساکن ہے یا متحرک یہ بالکل بے تعلق امر ہے کیونکہ کنہی مشاہدہ کیے گئے منظرات کو جو ایک میدانی بیان پر منحصر ہیں صرف میدانی مقادیر کے رویّہ کے لحاظ سے قابل بیان ہونا چاہیے اس میکنزم کی فطرت سے آزاد ہونا چاہیے جو میدانی مقادیر کو پیدا کرتا ہے)۔ اس لیے اگر کوئی برقی میدان ہے جیسا کہ اوپر کی الکٹران کی دلیل سے معلوم ہوتا ہے تو یہ میدان غیر گردشی یعنی برق سکونی ہونا چاہیے۔



[شکل 9-2. چالک پٹی ایک مقناطیسی میدان میں اپنی لمبائی کی سمت میں حرکت کرتی ہوئی]

نقشہ 9-1

برق محرک قوت جو شکل 9-2 میں پٹی کی مقناطیسی میدان کے

ماآخذ کی اور مشاہد کی حرکت کی مختلف ممکنات سے پیدا ہوتی ہے

شکل 9-2

برق محرک قوت جسے مشاہد ناپتا ہے	حرکت میں		
	مشاہد (گیلوانومیٹر)	B کا ماآخذ	پٹی
uBl	0	0	u
0	0	u	0
uBl	u	u	0
uBl	0	u	u
uBl	u	0	0
0	u	0	u

پٹی کے اندر کے موثر برقی میدان پٹی کے اندر ایک کرنٹ پیدا کریں گے جو رخوں faces, پر چارج پیدا کرے گا۔ اور یہ چارج باہری برقی میدان پیدا کرے گا جو ناپا جائے گا۔ دوسری طرف چارج کا وہی نقل پٹی کے اندر کے موثر برقی میدان $u \times B$ کو ٹھیک پورا پورا منسوخ کر دے گا اور اس لیے اگر ہم اینٹگریشن کے لیے ایک ایسا راستہ لیں جس کا کچھ حصہ پٹی کے اندر ہو اور کچھ حصہ پٹی کے باہر تو ایک بند حلقے پر لیا گیا برقی میدان کا اینٹگرل غائب نہیں ہوگا۔ یہ نتیجہ طبیعی طور پر مشاہدہ کیے گئے اس نتیجہ سے اتفاق کرتا ہے کہ گیلوانو میٹر ایک برق محرک قوت جس کی جسامت uBl ہے ناپتا ہے۔ دھیان رکھیے کہ اگر پورا سرکٹ سکون میں ہوتا تو کوئی برق محرک قوت نہیں ہوتا۔

اگر پٹی کو حرکت دینے کے بجائے ہم گیلوانومیٹر والے جوڑ کو پٹی کی لحاظ سے میدان B میں حرکت دیں تو پھر برق محرک قوت uBl دیکھا جاتا ہے کیونکہ اوپر کے اینٹگریشن میں پٹی کے اور جوڑ کے کردار محض آپس میں بدل جاتے ہیں اضافی حرکت کی مختلف حالتوں کا خلاصہ نقشہ 9-1. میں دیا گیا ہے۔

نتیجوں میں دو اہم حقیقتیں امتیازی ہیں (1) جب تک B یکساں ہے B کے ماآخذ کی رفتار کی حالت کوئی اثر نہیں رکھتی اور (2) اس ترتیب سے مطلق حرکت معلوم نہیں کی جا سکتی۔ اس دوسری حقیقت سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر میکسویل کے مساواتوں کی ٹھیک احتیاط تفسیر کی جائے تو وہ اضافیت کے

اصولوں کے مطابق ہیں۔ بعد کو یہ بات زیادہ عام طور سے اور زیادہ تفصیل میں دکھائی جائے گی۔

مسئلہ اور پیچیدہ ہو جاتا ہے، اگر ایک باہری مقناطیسی میدان کے علاوہ ایک اور میدان ہو جو پٹی کے مقناطیسی گردشہ کی وجہ سے پیدا ہوا ہو چاہے یہ مقناطیسی گردشہ ترغیبی ہو یا مستقل۔ ہم نے جو یہ نتیجہ نکالا ہے کہ ایک رُکے ہوئے حلقے میں مشہود برقی میدان خالص برق سکونی ہوگا، اب بھی جائز ہے۔ پھر بھی برق سکونی میدان کا ماخذ کیا ہے یہ تب تک پورے طور سے صاف نہیں ہوگا جب تک کہ متحرک وسیلوں کی مساواتوں کو اس طرح ترمیم نہ کر دیا جائے کہ وہ سرایت پذیر وسیلوں کے لیے بھی لاگو ہوں۔ بدقسمتی سے اس ترمیم کو مدلل طریقہ سے بلا اضافیاتی نقطۂ خیال کیے ہوئے نہیں لایا جا سکتا۔ پھر بھی نتیجہ طبیعی نقطۂ نگاہ سے صاف سمجھ میں آتا ہے کیونکہ مقناطیسی میدان کا ماخذ بشرطیکہ وہ وقت کے ساتھ نہ بدلے اس قوت پر اثر انداز نہیں ہوتا جو میدان پیدا کرتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں متحرک پٹی کے اندر کے کسی متحرک الکٹران پر کام کر رہی قوت اس بات سے آزاد ہے کہ آیا مقناطیسی میدان خارجی ہے یا خود پٹی کے مقناطیسی گردشہ کی وجہ سے ہے۔ وہ واحد چیز جس میں تضاد معلوم ہوتا ہے یہ کہ چونکہ ایک متحرک گردشہ در حقیقت کرنٹ حلقوں کی حرکت ایک برق سکونی میدان پیدا کرتی ہے۔ در حقیقت یہ صحیح ہے جیسا کہ اضافیاتی افکار کی بنا پر بعد میں دکھایا جائے گا۔ ہم یہ دکھا سکیں گے کہ عام طور سے اگر ایک مشاہد ایک M مقناطیئیت کے وسیلہ کی نسبت سے رفتار u سے حرکت کرتا ہے تو وہ ایک مرادف برقی گردشہ کا مشاہدہ کرے گا جس کی عبارت مندرجہ ذیل ہے:

$$\mathbf{P}_{eq} = \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{M}. \qquad (9\text{-}22)$$

اس لیے

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_{eq}}{\epsilon_0} \qquad (9\text{-}23)$$

میدان کے ماخذ کی تعریف کرے گا۔ دھیان رکھیے کہ یہ اثر جس پر دھوکہ ہوتا ہے کہ یہ مساوات (21-9) کے کلاسکی اثر کے مشابہ ہے درحقیقت صرف اضافیت کے مخصوص نظریے کی روشنی میں ہی سمجھا جا سکتا ہے۔ یہ اس حقیقت کی وجہ سے ہوتا ہے کہ مشاہد کے لیے وقت جسے چارج سرکٹ اور مشاہد کی اضافی حرکت کی متوازی سمت میں سفر کرنے میں صرف کرتا ہے اُس وقت سے مختلف ہے جو وہ مخالف متوازی سمت میں حرکت کرنے میں صرف کرتا ہے۔ اس کی وجہ سے ایک موثر تقطیب پیدا ہو جاتی ہے جو حرکت کی سمت کے عمودی ہوتی ہے اور جو کرنٹ حلقہ کے مستوا میں واقع ہوتی ہے۔ ہم اس اثر پر تفصیل کے ساتھ بعد میں بحث کریں گے۔

اگر مقناطیسی پٹی کی لمبائی محدود ہے تو میدان E اب غیر گردشی نہیں رہ جائے گا کیونکہ $\partial B/\partial t$ سکونی فریم میں اب صفر نہیں ہوگا۔ چونکہ یکساں رفتار u، کے لیے $\partial/\partial t = -u \cdot \nabla$ اس لیے $\nabla \times E = -\partial B/\partial t = (u \cdot \nabla)B$، جو B کی صفر ڈائیورجنس کی وجہ سے $-\nabla \times (u \times B)$ میں تحویل ہو جاتا ہے، اس لیے اگر اب B یکساں نہیں رہ گیا ہے تو E بھی اب غیر گردشی نہیں ہے لیکن اس کا کرل وہی ہے جو $-(u \times B)$، کا کرل ہے جو متحرک وسیلے میں موثر برقی میدان بھی ہے۔

مجوّزہ حوالے

برقی حرکیات کی سب کتابوں میں ترغیب کے قانون اور اُس سے پیدا ہونے والے نتائج پر غور کیا گیا ہے *Classical Electric-ity and Magnetism,* Vol. 1, M. Abraham and R. Becker. ہمارے طریقۂ بیان سے سب سے زیادہ قریب ہے۔

مشق

1۔ اگر ایک فلپ کنڈلی ایک کرہ کی سطح پر لپیٹی گئی ہے اور اس کے لپیٹوں

کثافت ρ_0 کے متناسب ہے جبکہ θ قطبی زاویہ ہے تو یہ دکھائیے کہ یہ کنڈلی اپنے مرکز پر محوری میدان جز کو ناپے گی خواہ میدان کتنا ہی غیر یکساں کیوں نہ ہو۔ (دیکھیے مشق 4، باب 8)

2۔ مسئلہ کی کنڈلی کی صفات کو ایک سادہ سلنڈری کنڈلی کے ذریعے تخمینۂ حاصل کیجیے۔ اس طرح کی کنڈلی کا بہترین تناسب (اونچائی کی قطر سے نسبت) گریڈینٹ کے اثرات کو اقل کرنے کے لیے کیا ہوگا۔

3۔ a نصف قطر کے ایک ڈائیلکٹرک ($\kappa > 1$) سلنڈر کی تشریق اس طرح ہے کہ اس کا محور ایک مقناطیسی ترغیبی میدان $\mathbf{B}$ کے متوازی ہے۔ اگر اس کو اپنے محور کے گرد ایک زاویائی رفتار ω سے گھمایا جائے تو فی اکائی حجم پیدا ہوئی تقطیب کو معلوم کیجیے اور وہ چارج دریافت کیجیے جو اس کی سطح پر اکائی لمبائی پر رونما ہوتا ہے۔

4۔ چارج q اور کمیت m کا ایک ذرہ ایک r_0 نصف قطر کے دائری مدار میں ایک مرکزی کشش کے تحت جو فاصلہ کے مربع کے معکوس تناسب سے بدلتی ہے، حرکت کر رہا ہے۔ ایک خارجی یکساں مقناطیسی میدان $\mathbf{B}(t)$ مدار کے عمودی لگایا جاتا ہے اس طرح پر کہ:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= 0, & t &< 0, \\ &= \mathbf{B}_0(t/T), & 0 &< t < T, \\ &= \mathbf{B}_0, & t &> T. \end{aligned}$$

(a) حساب کر کے حرکت معلوم کیجیے۔

(b) $t < 0$ اور $t > T$ کے لیے مقناطیسی گردشہ کا حساب لگائیے۔

(c) یہ مان کر $t > T$ کے لیے زاویائی رفتار ω_0 ہے $t < 0$ کے لیے زاویائی رفتار ω کا حساب لگائیے۔

5۔ فضا کے کسی خطہ کے لیے ویکٹر مضمر $\mathbf{A}$ حسب ذیل سے ملتا ہے

$$\mathbf{A}(r, \varphi, z) = a r \hat{\varphi} + (b + c r^2)\hat{z},$$

جہاں $\hat{\varphi}$ اور $\hat{z}$ ترتیب سے r اور z سمتوں میں اکائی ویکٹر ہیں۔

اس ویکٹر مضمر کی مطابق کرنٹ تقسیم $\mathbf{j}(r, \varphi, z)$ کیا ہے۔

6. فضا میں ایک ایسے خطے پر غور کیجیے جہاں مقناطیسی ترغیبی میدان $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_0')$ کی شرح سے بدل رہا ہے دکھایئے کہ فضا میں ترغیب سے پیدا ہوا برقی میدان $\mathbf{E}$ حسب ذیل سے ملتا ہے۔

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{B}})}{r^3}\,dv', \qquad (9\text{–}24)$$

جہاں $r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0')$ میدانی نقطہ $\mathbf{x}_0$ اور نقطہ $\mathbf{x}_0'$ کے درمیان فاصلے کی قدر ہے۔

7. مشق 6 کی اُس مخصوص حالت کو لیجیے جس میں $\dot{\mathbf{B}}$ محوری تناسب رکھتا ہے یعنی $\dot{\mathbf{B}}$ ایک z محور کے گرد ایز متھی زاویہ φ کا فنکشن نہیں ہے دکھایئے کہ اس حالت میں (9–24) یہ ہو جاتا ہے:

$$\mathbf{E}(r, z, \varphi) = \frac{1}{2\pi r}\dot{\Phi}_m\hat{\varphi}, \qquad (9\text{–}25)$$

جہاں $\dot{\Phi}_m$ وہ مقناطیسی فلکس ہے جو ایک r نصف قطر کے دائرے میں محیط ہے۔

ابتدائی دلیلوں کے ذریعہ سیدھے فیراڈے کے قانون سے مساوات (9–25) کو پھر اخذ کیجیے مان لیجیے کہ $B_z(r, z)$ محوری تناسب کے مقناطیسی ترغیبی میدان کا z جزو ہے۔ خیال کیجیے کہ اس میدان کے اثر کے تحت ایک ذرہ r نصف قطر کے دائری مدار میں حرکت کر رہا ہے دکھایئے کہ اگر

$$2\pi r^2\dot{B}_z = \dot{\Phi}_m, \qquad (9\text{–}26)$$

تو مدار کا نصف قطر r مستقل رہے گا۔ اس مساوات کو "بیٹاٹران شرط" کہتے ہیں۔

باب (10)

برق مقناطیسی میدان میں توانائی قوت اور تحرک رشتے

برق سکونی میدانوں میں توانائی کے رشتوں پر بحث (باب (6)) کرتے وقت ایک مخصوص عمل پر غور کرنے سے ہم برقی میدان کے ساتھ ایک توانائی کثافت منسلک کرنے میں کامیاب ہوئے تھے۔ اس سلسلہ میں مخصوص عمل چارجوں کا اکٹھا کرنا تھا جس کے دوران کام ہوا تھا اور میدان میں تبدیلیاں واقع ہوئی تھیں۔ کام اور توانائی کی رقموں کا توازن کرنے سے حرحرکیاتی معنی میں آزاد توانائی کی کثافت پانا ممکن ہوا۔ اس سے قبل کہ ہم برق مقناطیسی میدان کے لیے ایک عام رشتوں کا سٹ پانے کے لیے رجوع کریں آیئے ہم ایک مقناطیسی میدان کو قائم کرنے کے لیے اسی طرح کے عمل پر غور کریں۔

10-1 نیم مستقل کرنٹ نظاموں میں توانائی کے رشتے

ایک ایسے عمل پر غور کیجیے جس میں ایک بیٹری جس کا برق حرک میدان E' ہے، حراری نقصانات میں اور مقناطیسی میدان دونوں میں توانائی صرف کر رہا ہے۔ اگر ہم j اور مساوات

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}'), \qquad (7\text{–}4)$$

کا اسکیلر ضرب میں تو ہم پاتے ہیں:

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{j} = \frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \qquad (10\text{–}1)$$

مساوات (10-1) کا بایاں حصہ وہ وقتی شرح بتاتا جس سے بیٹری کام کر رہی ہے ؛ دائیں طرف کی پہلی رقم کرنٹ لے جانے والے وسیلے میں جول حراری نقصان بتاتی ہے اور آخری رقم ہم ابھی مان لیتے ہیں کہ وہ شرح ہے جس سے توانائی مقناطیسی میدان کو دی جا رہی ہے ۔ اگر سب میدان تقریباً مستقل ہوں یعنی بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہو رہے ہوں تو نقل کرنٹ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور میکسویل کا چوتھا مساوات $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ہو جاتا ہے ۔ جب ہم اسے مساوات (10-1) میں رکھتے ہیں اور ساری فضا پر انٹیگریشن کرتے ہیں تو ہمیں میدانوں کی شکل میں وہ کل طاقت ملتی ہے جو بیٹری نے خرچ کی :

$$\int \mathbf{E}' \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, dv = \int \frac{(\nabla \times \mathbf{H})^2}{\sigma}\, dv - \int \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, dv. \qquad (10\text{-}2)$$

آخری رقم کو نیچے کے رشتہ کے ذریعہ حصوں میں اینٹگریٹ کیا جا سکتا ہے ۔

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}); \qquad (10\text{-}3)$$

اور اگر ہم ڈائیورجنس مقالہ کا اور میکسویل کی تیسری مساوات کا استعمال کریں تو ہم پاتے ہیں کہ

$$\int \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, dv = -\int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, dv - \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}. \qquad (10\text{-}4)$$

چونکہ برق سکونی اور تقریباً مستقل مقناطیسی میدانوں میں $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ کم سے کم $1/r^5$ کے حساب سے کم ہوتا جاتا ہے اس لیے مساوات (10-4) کا سطحی اینٹگرل نظر انداز کیا جا سکتا ہے ۔ دھیان رکھیے کہ ایسا اس حالت میں ممکن نہیں ہوگا جب $\mathbf{E}$ اور $\mathbf{H}$ بحساب $1/r$ کم ہو رہے ہوں جیسا اشعاعی میدانوں میں ہوتا ہے ۔ نقل کرنٹ والی رقم کے نہ رہنے پر ایسے میدان پیدا نہیں ہو سکتے ۔ کم شرح سے بدلنے والے میدانوں کی ہماری پابندی مقناطیسی میدان کی سب اشعاعی رقموں کو نظر انداز کرنے کے مترادف ہے ۔ برق سکونی میدان کی توانائی کے غور و فکر میں اسی طرح کی روک عائد ہوگی ۔ ابھی تک ہم نے ایک

طرف برق سکونی میدانوں میں اور دوسری طرف نیم مستقل کرنٹ کے مقناطیسی میدانوں میں توانائی رشتوں کو الگ الگ استعمال کیا ہے۔ بعد کو ہمیں دیکھنا ہوگا کہ یہ تصورات کس طرح ہم آہنگ طریقے سے سنوارے جائیں کہ ہم عام توانائی کے اظہار حاصل کر سکیں۔

اس طرح بیٹری کے ذریعہ کل خرچ کی گئی طاقت مساوات (10-2) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\int \mathbf{E}' \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, dv = \int \frac{(\nabla \times \mathbf{H})^2}{\sigma}\, dv + \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, dv. \qquad (10\text{–}5)$$

داہنے طرف کی پہلی رقم کو پہلے ہی شناخت کیا جا چکا ہے کہ یہ جول حراری خسارہ ہے۔ آخری رقم سے اب صاف ظاہر ہے کہ یہ وہ شرح ہے جس سے توانائی میدان میں جا رہی ہے۔ اس لیے مقناطیسی میدان کی توانائی میں تبدیلی δU_m مندرجہ ذیل سے مل سکتی ہے:

$$\delta U_m = \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}\, dv. \qquad (10\text{–}6)$$

یہ برق سکونی توانائی کی تبدیلی

$$\delta U = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}\, dv. \qquad (6\text{–}30)$$

سے ملتا جلتا ہے۔ U_m بھی U کی طرح آزاد توانائی ظاہر کرتا ہے۔

ہمیں $\mathbf{H}$ اور $\mathbf{B}$ کے درمیان کوئی فنکشنی رشتہ مان لینا ہوگا تاکہ مساوات (10-6) کا انٹیگرل لیا جا سکے۔ ایسے وسیلہ کے لیے جس کی مقناطیسیت خطی ہے، انٹیگریشن مساوات (6-14) کی طرح کیا جا سکتا ہے۔ جس سے ہمیں:

$$U_m = \tfrac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\, dv. \qquad (10\text{–}7)$$

ملتا ہے۔ غیر خطی اشیا جیسے فیرومیگنٹ کے لیے مساوات (10-6) کو صرف واضح حالتوں کے درمیان ہی انٹیگریٹ کیا جا سکتا ہے اور جواب عام طور سے نمونے

کی پرانی تاریخ پر منحصر ہوگا۔ فیرو میگنٹ کے لیے مساوات (10-6) کے انٹیگرل میں جب B کو ایک پورے سائیکل کے لیے لیا جائے جیسے ایک متبادل کرنٹ کے میدان کے لیے لیا جاتا ہے تو انٹیگرل کی کوئی مخصوص قیمت آئے گی جو صفر نہیں ہوگی۔ پورے سائیکل کا توانائی خسارہ اس سے ملتا ہے :

$$\Delta U_m = \int\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}\, dv. \qquad (10\text{-}8)$$

اس کا مطلب ہے کہ جب ایک مقناطیسی شے کو مقنائیت کا ایک چکر دیا جائے تو اکائی حجم کے لیے خرچ کی گئی توانائی ہسٹریسس حلقہ کے رقبے کے برابر ہوگی جو ایک گراف میں B کو H. کے خلاف پلاٹ کرنے سے ملتا ہے :

مساوات (10-7) توانائی کو میدانوں کے اوپر ایک انٹیگرل کی شکل میں دیتا ہے۔ اگر ہم چاہتے ہیں کہ عبارت ماخذ کے اوپر ایک حجمی انٹیگرل کی شکل میں ملے تو ہمیں صرف B کو ویکٹر مضمر A کے لحاظ سے اور H کو مستقل کرنٹ j. کے لحاظ سے لکھنا ہوگا پہلے ہم پاتے ہیں :

$$U_m = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dv. \qquad (10\text{-}9)$$

اب اگر ہم حصّوں کو انٹیگریٹ کریں اور سطحی رقم کو پہلے کی طرح چھوڑ دیں تو ہم پاتے ہیں کہ

$$U_m = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}\, dv, \qquad (10\text{-}10)$$

جو حجمی چارج کثافت اور اسکیلر مضمر کے لحاظ سے برق سکونی توانائی کی عبارت کے مشابہ ہے مساواتوں (10-6) ، (10-7) اور (10-10) کو ایک مخصوص "خیالی عمل" کے ذریعہ اخذ کیا گیا ہے۔ لیکن عبارتیں صرف آخری میدانوں پر ہی منحصر ہیں۔ عمل کی فطرت پر نہیں۔ اس لیے ان کو مقناطیسی میدان کی توانائی کا عام اظہار مانا جا سکتا ہے کو مساوات (10-7) اور (10-10)

پر B اور H کے درمیان صرف ایک خطی رشتے کی پابندی عائد ہوگی۔

مساوات 10-10 میں جز $\frac{1}{2}$ مساوات (6-1) کے جز $\frac{1}{2}$ کی طرح ہے اور اس حقیقت کی وجہ سے ہے کہ ویکٹر مضمر A میں کرنٹ j کے میدان بھی شامل ہیں۔ ایک باہری میدان میں جس کے مضمرات ϕ اور A ہیں کرنٹوں اور چارجوں کے کسی نظام کی تفاعلی توانائی اس سے ملتی ہے:

$$U_{\text{interaction}} = \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_{\text{external}} + \rho\phi_{\text{external}})\, dv. \qquad (10\text{–}11)$$

10-2 کرنٹ نظاموں پر کام کرنیوالی قوتیں

اب ہم توانائی کی عبارتوں کا دو مقاصد کے لیے استعمال کریں گے: پہلے تو کرنٹوں کے درمیان قوت کے لیے عبارت اخذ کرنے کے لیے جو کرنٹوں کے ہی لحاظ سے اور ان مناسب جیامٹریائی پیرامیٹروں کے لحاظ سے ہوں جو ان کے جائے وقوع پر منحصر ہیں؛ اور دوسرے مقناطیسی میدان کی توانائی کی تبدیلی اور جیامٹریائی سمتی قدروں کی تبدیلی کے لحاظ سے ظاہر کرنے کے لیے۔

آیئے ہم جیامٹریائی لحاظ سے n خطی سرکٹوں کے ایک نظام کا جو کرنٹ لے جارہی ہیں تجزیہ کریں۔ ان خطی سرکٹوں کے لیے مساوات (10–10) یہ ہو جاتی ہے:

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} J_k \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} J_k \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}_k$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} J_k \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} J_k \Phi_k, \qquad (10\text{–}12)$$

جہاں ہم نے اسٹوک کے مصدقہ کا استعمال کیا ہے اور $\Phi_k = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_k$ وہ فلکس ہے جو k ویں سرکٹ کو منسلک کرتا ہے، جیسا کہ جز 8-4 اور مساوات (9-1) میں ہے۔ ایک خطی کرنٹوں کے نظام کے لیے فلکس کے انٹیگرل لاگرتھمی انداز سے پھیلتے ہیں۔ جیسے تار کا نیم قطر صفر کی طرف جاتا ہے۔ اس لیے

آگے کی بحث میں ہم U_0 $U'_m = U_m -$ کو مقناطیسی میدان کی توانائی کے اُس حصہ کے طور پر استعمال کریں گے جو سرکٹ کے عناصر کے اضافی مقاموں پر منحصر ہے۔ U_0 اجزا کی "خود توانائی" ہے۔

قوتوں کو اخذ کرنے کے لیے آیئے ہم مان لیں کہ i ویں سرکٹ پر ایک خیالی انتہائی سست رفتار $\mathbf{u}_i$ عائد کی گئی ہے تو جس شرح سے i ویں سرکٹ پر لگنے والی ایک قوت $\mathbf{F}_i$ کام کر رہی ہے وہ $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i$ سے ملتی ہے۔ اس خیالی عمل میں توانائی کے بدلنے کی کل شرح صفر ہے لیکن اس کا توازن چار مقداروں کے درمیان ہوتا ہے :-

(1) وہ شرح $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i$ جس سے i ویں سرکٹ پر میکانکی کام ہوتا ہے

(2) مقناطیسی میدانی توانائی کے بدلنے کی شرح dU'_m/dt

(3) جول حراری خساروں کی شرح $\sum J_k^2 R_k$, جہاں k ویں سرکٹ کی مزاحمت R_k ہے

(4) وہ شرح جس سے سرکٹ کے اندر کے برق محرک قوتوں پر کام ہو رہا ہے، $-\sum J_k \mathcal{E}_k$ اس طرح ہم پاتے ہیں :-

$$\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i + \frac{dU'_m}{dt} + \sum J_k^2 R_k - \sum J_k \mathcal{E}_k = 0. \qquad (10\text{-}13)$$

ہم نے یہ مان لیا ہے کہ مقناطیسی میدان کی توانائی U'_m کو k ویں کرنٹ کی سمتی قدروں $\mathbf{x}_k$ کے اور کرنٹ J_k کے صریحی فنکشن کی شکل میں انھیں آزاد متغیرہ مان کر ظاہر کیا گیا ہے۔ دھیان رکھیے کہ جول حرارت اور برق محرک قوت کے کام کی رقموں کی وجہ سے ہم i ویں کرنٹ پر لگی قوت $\mathbf{F}_i$ کو محض مستقل کرنٹ پر میدانی توانائی U'_m کے منفی گریڈینٹ کے برابر نہیں رکھ سکتے گو یہ عمل جائز ہوتا اگر کوئی دوسری توانائی کی ارقام موجود نہیں ہوتیں۔ آیئے اب ہم ایک مخصوص قسم کے مستقل کرنٹ عمل پر غور کریں یعنی وہ جس میں خارجی برق محرک قوتوں کو خیالی رفتار $\mathbf{u}_i$ کے فنکشن کی شکل میں ایک واحد پیرامیٹر $\mathbf{x}_i$ کی تبدیلی کے لیے اس طرح سنوارا جاتا ہے کہ نظام کے

اندر کرنٹ مستقل رہیں۔ اس حالت میں اگر ہم مساوات (10-16) میں U'_m کے لیے مساوات (10-13) کا استعمال کریں اور فیراڈے کے قانون [مساوات [(9-2)], کے مطابق $\mathcal{E} = JR + d\Phi/dt$ لکھیں تو ہم پاتے ہیں:

$$\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} J_k \frac{d\Phi_k}{dt} - \sum_{k=1}^{n} J_k \frac{d\Phi_k}{dt} = 0,$$

یا

$$\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i = \frac{\partial U'_m}{\partial t} = \frac{\partial U'_m}{\partial x_{i_\alpha}} u_{i_\alpha}, \qquad (10\text{–}14)$$

بشرطیکہ سب J مستقل رہیں اور i ویں سرکٹ کو چھوڑ کر باقی سب سرکٹیں اپنے مقاموں پر قائم رہیں۔ اس لیے:

$$F_{i_\alpha} = \left.\frac{\partial U'_m}{\partial x_{i_\alpha}}\right|_{J\ \text{constant}} \qquad (10\text{–}15)$$

وہ قوت جسے میدان i ویں چالک پر لگاتا ہے۔ دھیان رکھیے کہ نشان اس نشان کا الٹا ہے جس کی اس حالت میں توقع کی جاتی جب توانائی کی دوسری رقموں کو نظر انداز کر دیا جاتا۔ اس کا مطلب ہے کہ جب جیامٹری بدل رہی ہے تو اس غرض سے کہ سرکٹوں میں کرنٹ مستقل بنا رہے بیٹریوں کو جول حراری خساروں کو پورا کرنے کے علاوہ اس سے ٹھیک دوگنا کام کرنا ہوگا جو باہری قوت کے خلاف کیا گیا تھا۔ مساوات (10-15) کرنٹ لے جا رہی سرکٹوں پر کام کرنے والی قوتوں کا حساب کرنے کے لیے بہت کارآمد ہے اگر مقناطیسی میدانی توانائی کو میدان پیدا کرنے والے کرنٹوں کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

10-3 ترغیب مقناطیسی میدانی توانائی

$$U'_m = \tfrac{1}{2}\sum_{k} J_k\Phi_k \qquad (10\text{–}12)$$

کو کرنٹ اور جیامٹری کے فنکشن کے طور پر ظاہر کرنے کے لیے ترغیبیت کے تصور کو لانا کارآمد ہوگا۔ k ویں سرکٹ میں گزرنے والی فلکس اس سے

ملتی ہے:

$$\Phi_k = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_k = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}_k = \oint_k \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_k. \qquad (10\text{-}16)$$

A کے عام حل

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r}\, dv \qquad (8\text{-}29)$$

کو خطی سرکٹوں کے لیے ایک خطی انٹیگرل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\mathbf{A}(x_k) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \oint \frac{J_i\, d\mathbf{l}_i}{r_{ik}}. \qquad (10\text{-}17)$$

مساوات (10-17) میں مساوات (10-16) کو رکھ کر ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$\Phi_k = \sum_{i=k} L_{ik} J_i, \qquad (10\text{-}18)$$

جہاں

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\oint \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_k}{r_{ik}} = L_{ki} \qquad (10\text{-}19)$$

ایک خالص جیامٹریائی مقدار ہے L_{ik} کو i ویں اور k ویں سرکٹ کے درمیان باہمی ترغیبیت کہتے ہیں اور مساوات (10-19) نیومین کا فارمولہ کہا جاتا ہے۔

مساوات (10-18) کا استعمال کرنے سے مساوات (10-12)

$$U'_m = \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_k{}' L_{ik} J_i J_k, \qquad (10\text{-}20)$$

ہو جاتا ہے جہاں رقم $i = k$ جوڑ میں شامل نہیں ہے۔ مساوات (10-15) سے وہ زور جو i ویں سرکٹ پر کام کر رہا ہے یہ ہے:

$$F_{i_\alpha} = + \left.\frac{\partial U'_m}{\partial x_{i_\alpha}}\right|_{J\ \text{constant}} = \tfrac{1}{2} \sum_j \sum_k{}' J_j J_k \frac{\partial L_{jk}}{\partial x_{i_\alpha}}. \qquad (10\text{-}21)$$

مساوات (10-20) اور (10-21) کے جوڑوں میں رقم جس کے لیے دونوں نشانات مختلف ہیں دوبارہ آتی ہے۔ اس لیے دو سرکٹوں کی باہمی توانائی

$$U'_m = J_1 J_2 L_{12}. \tag{10-22}$$

اب ہم رواجی طور پر سرکٹوں کی خود توانائی کو یوں رکھ سکتے ہیں:

$$U_s = \tfrac{1}{2}(J_1^2 L_{11} + J_2^2 L_{22}), \tag{10-23}$$

جہاں L_{ii} کو ترغیبیت کہتے ہیں۔

قوت کی عبارت (10-21) پہلے حاصل کیے گئے مساوات (7-24). کے مقناطیسی تفاعل کے مطابق ہے۔ اگر ہم قوت کے مساوات میں جس کا اطلاق دو سرکٹوں پر کیا گیا ہے مساوات (10-19) کو رکھیں تو ہم پاتے ہیں:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint\oint (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\nabla\left(\frac{1}{r_{12}}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint\oint \mathbf{r}_{12}\left(\frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}^3}\right),$$

جو بالکل وہی ہے جو مساوات (7-27)

قوت کے مساوات (10-21) کو اس سادی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$F_{i_\alpha} = J_i \sum_k J_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_{i_\alpha}}, \tag{10-24}$$

چونکہ صرف وہ رقمیں جن کے لیے $j = i$ یا $k = i$ ہو x_i پر منحصر ہیں اور غیر صفر تفرقی اخذ دیتی ہیں، اس لیے مساوات (10-24) کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے:

$$F_{i_\alpha} = J_i \left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{i_\alpha}}\right|_{J\ \text{constant}}, \tag{10-25}$$

جہاں وہ فلکس ہے جو Φ_i ویں سرکٹ سے منسلک ہے، ظاہر ہے کہ یہ عبارت اگر

ابتدائی قوت رشتہ

$$dF = J\, dl \times B. \qquad (10\text{-}26)$$

سے اتفاق کرتی ہے۔

اِن خیالات کے پیش نظر ہم میدانی توانائی کی عام تبدیلی کو جیامٹریائی سمتی قدروں اور کرنٹوں کے آزاد فنکشنوں کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ چونکہ:

$$U_m = \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_k L_{ik} J_i J_k, \qquad (10\text{-}20)$$

اس لیے ہمیں یہ ملتا ہے (دھیان رکھیے کہ ہر رقم دو بار آتی ہے)

$$\delta U_m = \sum_i \left[\left(\sum_k L_{ik} J_k \right) \delta J_i + \sum_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_{i_\alpha}} \delta x_{i_\alpha} J_i J_k \right]. \qquad (10\text{-}27)$$

اس لیے مساوات (10-18) اور (10-24) سے:

$$\delta U_m = \sum_i (\Phi_i \delta J_i + F_{i_\alpha} \delta x_{i_\alpha}), \qquad (10\text{-}28)$$

جہاں Φ_i وہ کلی فلکس جو i ویں سرکٹ سے منسلک ہے۔ یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ مقاموں اور کرنٹوں کا رول حرحرکیاتی معنی میں توسیعی متغیروں کا ہے جب کہ قوت اور فلکس مکمل متغیروں کا رول ادا کرتے ہیں۔

اگر فلکس کی وابستگی کو مستقل رکھا جائے تو قوت کے حساب میں مخالف برق محرک قوت کی رقموں کو چھوڑا جا سکتا ہے۔ اس حالت میں بیٹری کے ذریعے مہیا کیا گیا کام صحیح صحیح جول حراری خساروں کے متوازن ہوتا ہے۔ ان حالات میں مساوات (10-13) سے براہ راست

$$F_{i_\alpha} = - \left. \frac{\partial U'_m}{\partial x_{i_\alpha}} \right|_{\Phi \text{ constant}}, \qquad (10\text{-}29)$$

ملتا ہے۔ جو مساوات (10-15) سے مختلف ہے۔

باہمی ترغیبیتوں کو حساب نیومین کے فارمولے کے علاوہ اور کسی طرح سے لگایا جا سکتا ہے۔ ایک طریقہ تعریف کرنے والے مساوات (10-18) کا

استعمال ہے k میں سرکٹ سے وابستہ فلکس کو جو i ویں سرکٹ کی کرنٹ کی وجہ سے ہے۔ سیدھے i ویں سرکٹ کے معلوم میدان سے یا ویکٹر مضمر سے نکالا جا سکتا ہے۔ ایک دوسرا طریقہ اُس حالت میں خاص طور سے کارآمد ہے جب مسئلہ مسلسل کرنٹ تقسیم اور اس لیے جزوی روانی متسلکات پر مشتمل ہو ــــ مقناطیسی میدان کی مندرجہ ذیل دو عبارتوں کا سیدھا استعمال ہے۔

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2}\int \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv. \qquad (10\text{–}30)$$

$\mathbf{H}$ اور $\mathbf{B}$ کے حلقوں کو ان طریقوں سے جن پر پہلے ہی بحث ہو چکی ہے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ تب $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$ کے انٹیگرلوں کی قیمت نکال کر ترغیبیتوں کا حساب لگایا جاتا ہے۔ خود ترغیبیتوں L_{ii} کا حساب لگانے صرف یہی ایک طریقہ ہے۔

کرنٹ لے جانے والے چالکوں کی ترغیبوں کا حساب لگانے کے لیے عام طور سے یہ فائدہ مند ہوتا ہے کہ مسئلہ کو دو حصّوں میں بانٹ دیا جائے: (1) وہ ترغیب جو چالک کے باہر کے میدان کی وجہ سے ہے۔ (2) ترغیبیت کا وہ حصّہ جو تار کے اندر کی میدانی توانائی کی وجہ سے ہے یہ تقسیم اس لیے ضروری ہے کیونکہ باہری میدان کی وجہ سے ترغیبیت کو چالک کا نصف قطر صفر مان کر نہیں نکالا جا سکتا۔ عام طور سے اس طرح کے مفروضہ سے متعلقہ انٹیگرل کا لاگرتھمی پھیلاؤ ہو جاتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اونچے تواتروں پر ترغیبیت میں تار کے اندر کے میدان کا حصّہ ناقابلِ لحاظ ہو جاتا ہے۔ کیونکہ کرنٹ تار کے اندر سرایت نہیں ہوتی۔ نیچے تواتروں پر اور خاص طور سے ان چالکوں کے لیے جو فیرو میگنیٹک ہیں اس اندرونی کرنٹی کا حصّہ خاصا ہو سکتا ہے۔

10-4 مقناطیسی حجمی قوت

اب ہم نے کرنٹ نظاموں کے درمیان قوتوں کا حساب کرنٹوں اور مناسب جیومیٹریائی مقادیر کے لحاظ سے نکال لیا ہے۔ توقع کے مطابق یہ قوت ایمپیر کے بنیادی تفاعلی قانون کے، جو مساوات (7-24) میں دیا ہے پھر سے اظہار ہیں۔ ہم برق سکونی مسئلہ کے مشابہ مقناطیسی جسمی قوت فی اکائی حجم کے لیے بھی ایک عبارت

دریافت کر سکتے ہیں جو میدان سرایت پذیری اور ایک دیے نقطہ پر کرنٹ کے لحاظ سے ہو گی۔ برق سکونی مسئلہ میں ہم نے $\mathbf{F}_v$ کی تعریف اس رشتہ سے کی تھی۔

$$\frac{dU}{dt} = -\int \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{u}\, dv \qquad (6\text{–}51)$$

اور پایا تھا کہ $\mathbf{F}_v$ اس سے ملے گا

$$\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla \kappa + \frac{\epsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \frac{d\kappa}{d\rho_m} \right). \qquad (6\text{–}88)$$

$$\frac{dU_m}{dt} = -\int \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{u}\, dv$$

اسی طرح ہم لکھ سکتے ہیں۔ اور ماثلہ $\mathbf{F}_v$ کو مقناطیسی جسمی قوت کے طور پر شناخت کر سکتے ہیں۔ عام عبارت لکھنے کی جگہ آیئے ہم حسب ذیل پابندیاں لگائیں: (1) وسیلہ خطی ہے یعنی اس کی سرایت پذیری میدان کا تفاعل نہیں ہے۔ (2) کوئی مستقل مقناطیسی گردشہ موجود نہیں ہے۔ (3) کوئی مقناطیسی اسٹر کشن نہیں ہے یعنی $d\kappa_m/d\rho_m = 0$. ان پابندیوں کے تحت ایک سیدھا حساب اس طرح سے ہمیں

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \nabla \kappa_m \qquad (10\text{–}31)$$

ملتا ہے۔ یہ پھر ممکن ہے کہ ایک اطمینان بخش میدانی نظریہ کے تقاضے کے مطابق ایک دیے ہوئے حجم پر کام کرنے والی پوری قوت کو اس حجم کی حدود پر میدان کی قیمت کی شکل میں اخذ کیا جائے۔ دوسرے لفظوں میں ایک ایسے زور ٹینسر کی تعریف کرنا ممکن ہے جس سے حجمی قوت کو مساوات (6–35) کے ٹینسر ڈائیورجنس رشتہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مقناطیسی مسئلہ میں میکسویل ٹینسر کی شکل مقناطیسی اسٹر کشن کی عدم موجودگی میں شکلی طور پر حسب معمول جوڑ کے رواج کے ساتھ مساوات (6–82) کے مشابہ ہے:

$$T_{\alpha\beta} = H_\alpha B_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} H_\gamma B_\gamma, \qquad (10\text{–}32)$$

اس ٹینسر کی جیامٹریائی تفسیر مقناطیسی قوتوں کے متعلق انہی نتیجوں پر پہنچاتی

ہے جن پر باب 6 میں برقی قوتوں کے لیے پہنچے تھے: کسی سطح کے عمودی اور اُس سطح پر کام کرنے والے ماحصل مقناطیسی زور کے درمیان کے زاویہ کو مقناطیسی میدان کی سمت دو برابر حصوں میں بانٹتی ہے۔ مقناطیسی زور کی جسامت میدان کے عمودی یا متوازی سمت میں $HB/2$. ہوتی ہے۔

10-5 برق مقناطیسی توانائی کے لیے عام عبارتیں

ابھی تک ہم نے برق سکونی میدان اور مقناطیسی سکونی میدان یا نیم قائم کرنٹ میدانوں پر الگ الگ غور کیا ہے۔ آیئے اب ہم یہ دریافت کریں کہ اُس عام حالت کے لیے جس میں میدانی مقداروں کی وقت کے ساتھ بدلنے کی شرح پر کوئی پابندی نہ ہو، توانائی قوت یا تحرک کے رشتوں میں سے کس کو بدلنے کی ضرورت ہے۔ ہم اپنی توجہ کو بلا کسی زیادہ دلچسپی کے نتائج کو چھوڑتے ہوئے خلائی میدانوں اور غیر سرایت پذیر چالکوں تک محدود رکھیں گے۔ خلا میں میکسویل کے مساوات یہ ہیں:۔

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{true}}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{4}$$

(9-7)

یہ مساوات برق مقناطیسی میدانوں کے رویّے کا مکمل اظہار کرتے ہیں جب ان کو مناسب ترکیبی مساواتوں اور حدودی شرائط کے ساتھ استعمال کیا جائے یہ تیزی سے بدلنے والے میدانوں کے لیے بھی صحیح ہے یا کم سے کم اگر کوئی من مانی تبدیلی کی شرح مان لی جائے تو کوئی داخلی تضاد رونما نہیں ہوتا۔ پھر بھی ترکیبی مساواتوں کے استعمال میں احتیاط برتنا ضروری ہے کیونکہ مادّی مستقلے عام طور سے میدانوں کے تواتر پر منحصر ہوتے ہیں۔ ترکیبی مساواتوں کی ایسی مخصوص صفات کی وجہ سے پیچیدگیوں کو بچانے کی خاطر ہم اپنے کو اکثر خلائی حالتوں کے لیے ہی محدود رکھیں گے۔

تیسری اور چوتھی مساواتوں کو ترتیب سے H اور E سے اسکیلر ضرب دینے کے نتیجے سے میکسویل کے مساواتوں کا ایک توانائی انٹیگرل پایا جا سکتا ہے۔ گر ہم حاصل شدہ دو مساواتوں کا فرق لیں اور کراس ضرب کے ڈائیورجنس کی ویکٹر مماثلہ مساوات (10-3) کا استعمال کریں تو ہم پاتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (10\text{-}33)$$

آیئے اب ہم یہ مان کر کہ ترکیبی مساوات خطی ہیں مساوات (10-33) کا حجمی انٹیگرل لیں:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\, dv = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\, dv + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}, \qquad (10\text{-}34)$$

جہاں سطحی رقم ڈائیورجنس مصدقہ کے استعمال کا نتیجہ ہے۔ مساوات (10-34) کے بائیں حصہ کو پہچانا جا سکتا ہے کہ یہ برق مقناطیسی میدانی توانائیوں کے جوڑ کے گھٹنے کی شرح ہے [مساوات (6-14) اور (10-7)] جو سکونی حالت کے لیے اخذ کیا گیا تھا۔ مساوات (10-1) کے ذریعہ داہنے ہاتھ کی پہلی رقم کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\, dv = \int \left(\frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{E}' \cdot \mathbf{j} \right) dv. \qquad (10\text{-}35)$$

اس لیے مساوات (10-35) اُس جوڑ کو ظاہر کرتا ہے جس میں جول حراری خسارے اور برق محرک قوتوں کے کام کرنے کی منفی شرح شامل ہیں۔

مساوات (10-34) کے داہنے طرف کی آخری رقم پر احتیاط غور چاہتی ہے یہ ایسی توانائی ظاہر کرتی ہے جسے ابھی تک نظر انداز کیا جاتا رہا ہے کیونکہ سکونی اور نیم سکونی میدانوں کے لیے انٹیگرل کو محیط کرنے والی سطح کو من مانا بڑا لے کر غائب کر دیا جا سکتا ہے۔ لیکن جیسا ہم بعد کو دیکھیں گے متحرک چارجوں اور بدلتے والی کرنٹوں کے برقی اور مقناطیسی تابانی میدان عام طور سے بڑے فاصلوں پر محض $1/r$ کے حساب سے گھٹتے ہیں۔ اس حالت میں $\int(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$

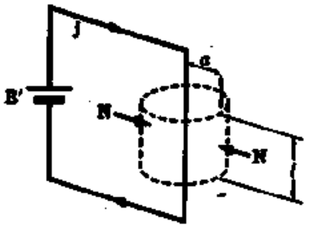
کسی من مانی بڑی سطح کے لیے ایک مستقل قیمت کے قریب پہنچے گا اور اس طرح یہ انٹیگرل توانائی کے توازن میں حصہ دار ہوسکتا ہے۔

ویکٹر

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad (10\text{-}36)$$

کو پوائنٹنگ ویکٹر کہا جاتا ہے۔ مساوات (10-34) کے مطابق اس کو ایک دی ہوئی سطح کے پار فی اکائی رقبہ فی اکائی وقت بہنے والی برقی مقناطیسی توانائی کا اظہار سمجھا جاسکتا ہے۔ لیکن اس کا دھیان رکھنا ہوگا کہ N کا پورا سطحی انٹیگرل ہی توانائی کے توازن میں حصہ دار ہے اگر کوئی پوائنٹنگ ویکٹر کو کسی خاص نقطہ پر فی اکائی رقبہ بہنے والی توانائی ماننے کی کوشش کرے تو متضاد نتائج حاصل ہوسکتے ہیں۔ یہ توانائی رقم $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ کے حجمی انٹیگرل کی شکل میں پیدا ہوئی تھی اور برقی مقناطیسی میدان میں توانائی کا بہاؤ کل ملا کر ہمیشہ غائب ہوجائے گا۔ اگر پوائنٹنگ ویکٹر کا ڈائیورجنس صفر ہو۔ مثال کے طور پر سکونی منطبق برقی اور مقناطیسی میدانوں میں کرنٹوں کی عدم موجودگی میں فضا کے مختلف نقطوں پر پوائنٹنگ ویکٹر کی قیمتیں صفر سے مختلف ہوسکتی ہیں لیکن جیسا مساوات (10-33) سے دیکھا جاسکتا ہے اس کا ڈائیورجنس ہر جگہ غائب ہوجاتا ہے۔

ہم نے اب دیکھ لیا ہے کہ مساوات (10-34) کو سمجھا جاسکتا ہے کہ وہ برقی اور مقناطیسی میدانی توانائی، مزاحمتی گرمی کے خسارے، برقی محرک قوتوں کے مآخذ کے ذریعہ کیا گیا کام اور اشعاعی کا خسارہ ان سب کے توانائی توازن کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ برقی سکونی اور مقناطیسی سکونی میدانوں کی توانائی کثافتوں کے لیے جو عبارتیں اخذ کی گئی تھیں وہ اس وقت بھی جائز رہتی ہیں جب میدانوں کو من مانے ڈھنگ سے وقت کے ساتھ بدلنے دیا جاتا ہے۔ توانائی کی برقراریت قائم رکھنے کی خاطر جس امر کی مزید ضرورت پڑتی ہے وہ یہ ہے کہ یہ مان لیا جائے کہ میدان انٹیگریشن کے حجم کے اندر یا باہر توانائی کو ایسی شرح سے لے جاسکتے ہیں



[شکل 10-1: کسی کرنٹ کے ایک حصّہ کے لیے توانائی کی برقراریت میں
پوائنٹنگ ویکٹر کا رول دکھایا گیا ہے]

جو پوائنٹنگ ویکٹر کے سطحی انٹیگرل سے ملتی ہے۔

برقراریت کے قانونوں میں ایک سطحی رقم کے داخل ہوجانے کا ایک نیا نتیجہ توانائی اور مقدار حرکت کا توازن کسی نظام کے صرف ایک حصّہ کے لیے کیے جاسکنے کا امکان ہے، پوائنٹنگ ویکٹر کا سطح کے اوپر انٹیگرل ہمیں اجازت دیتا ہے کہ توانائی کی برقراریت کسی نظام کے ایک حصّہ میں بنائے رکھا جائے چاہے اشعاع کے عمل موجود ہوں یا نہ ہوں۔ اس بات کو دکھانے کے لیے اس سادہ عمل پر غور کیجیے جس میں ایک بیٹری (برقی محرک قوت E کی) مزاحمت (چالکتا σ) کو شکل 10-1 کے مطابق کرنٹ کثافت (j) دے رہی ہے۔ آیئے ہم مزاحمت کی l لمبائی کے حجم پر توانائی کے توازن پر غور کریں۔ لمبائی a کا نصف قطر شکل میں بڑا کرکے دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی غور و فکر سے

$$E = \frac{j}{\sigma}; \quad H = \frac{1}{2} ja; \quad N = \frac{j^2 a}{2\sigma}$$

جہاں N کا رخ سلنڈر کی بازو کی سطح پر اندر کی طرف ہے۔ اس لیے

$$\int \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = -j^2 \frac{(\pi a^2 l)}{\sigma} = -\int \frac{j^2}{\sigma} dv = -\text{Joule heat.}$$ جول حرارت

اس طرح مساوات (10-34) کی پابندی ہوجاتی ہے اور توانائی کا توازن یہ مان کر ہوجاتا ہے کہ میدان پوائنٹنگ ویکٹر کے ذریعے بلا کسی صریحی مآخذ یعنی بیٹری کے میدان کو داخل کیے مزاحمت کو توانائی مہیا کررہا ہے۔

10-6 تحرک کا توازن

برقی مقناطیسی میدانوں میں تحرک کے رشتوں کی تفتیش کرنے کے لیے ہم یہ معلوم کریں گے کہ آیا ایک مکمل میکسویل زور ٹینسر کی ڈائیورجنس ایک ایسی حجمی قوت دے گی جو تجربہ سے مطابقت رکھتی ہے۔ اگر ہم برقی اسٹرکشن اور مقناطیسی اسٹرکشن کی رقموں کو چھوڑ دیں تو زور ٹینسر مساوات (6-82) اور (10-32) کا جوڑ

$$T_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta - \tfrac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta} E_\gamma D_\gamma + H_\alpha B_\beta - \tfrac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta} H_\gamma B_\gamma. \qquad (10\text{–}37)$$

ہوگا۔ مساوات (10-37) کی ٹینسر ڈائیورجنس ہے۔

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} + D_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 \frac{\partial \kappa}{\partial x_\alpha} - D_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}$$

$$+ H_\alpha \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\beta} + B_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \frac{\partial \kappa_m}{\partial x_\alpha} - B_\beta \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\alpha}. \qquad (10\text{–}38)$$

مساوات (10-38) کو ویکٹر شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے، میکسویل کے پہلے مساوات سے پہلی رقم میں $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{true}}$ دوسری اور چوتھی رقمیں $-\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})$ ہوجاتی ہیں جو $\mathbf{D} \times \partial \mathbf{B}/\partial t$ کے برابر ہے ؛ چھٹی اور آٹھویں کڑیاں $-\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ ہوجاتی ہیں جو $-\mathbf{B} \times (\mathbf{j}_{\text{true}} + \partial \mathbf{D}/\partial t)$ کے برابر ہے ؛ پانچویں رقم غائب ہوجاتی ہے۔ اس حقیقت کی وجہ سے کہ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$؛ اور تیسری اور ساتویں رقمیں محض κ اور κ_m کے گریڈینٹوں پر مشتمل ہیں۔ اس لیے :

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \left[\mathbf{E}\rho_{\text{true}} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla\kappa - \frac{\mu_0}{2} H^2 \nabla\kappa_m - \mathbf{B} \times \mathbf{j}_{\text{true}} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B})\right]_\alpha \qquad (10\text{–}39)$$

پورے ٹینسر ڈائیورجنس کو رقموں کے جوڑ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے :

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \left[\mathbf{F}_{ev} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B})\right]_\alpha, \qquad (10\text{–}40)$$

جہاں پہلی رقم ،

$$\mathbf{F}_{ev} = \mathbf{E}\rho_{true} - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \nabla \kappa - \frac{\mu_0}{2} H^2 \nabla \kappa_m - \mathbf{B} \times \mathbf{j}_{true} \quad (10\text{–}41)$$

معولی حجمی قوت ہے جو مادّی اجسام پر ایک نیم قائم برقی مقناطیسی میدان میں کام کرتی ہے۔ مساوات (10–41) ایک برقی میدان میں حقیقی چارجوں یا غیر یکساں ڈائیلکٹرکوں پر حجمی قوت کا اور ایک مقناطیسی میدان میں حقیقی کرنٹوں یا غیر یکساں سرایت پذیر اشیا پر حجمی قوت کا مکمل جائزہ لیتا ہے۔ مساوات (10–40) کی دوسری رقم نئی ہے اور پوائنٹنگ ویکٹر کے وقت کے ساتھ بدلنے کی شرح کے متناسب ہے۔ مساوات (10–40) کو صریحی طور پر اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \left[\mathbf{F}_{ev} + \mu\epsilon \frac{\partial(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}{\partial t}\right]_\alpha$$
$$= \left[\mathbf{F}_{ev} + \frac{\kappa\kappa_m}{c^2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}\right]_\alpha \quad (10\text{–}42)$$

جہاں

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (10\text{–}43)$$

$\mathbf{F}_{ev}$ کا وجود چارج لے جانے والے یا ڈائیلکٹرک صفات رکھنے والے مادّی اجسام کی موجودگی پر منحصر ہے۔ دوسری طرف مساوات (10–42) کی دوسری رقم خلا میں بھی غائب نہیں ہوتی اور اس لیے بظاہر یہ گمان ہوتا ہے کہ یہ خلا کے اوپر حجمی قوت ہے اس رقم نے بہت سی قیاس آرائیوں کو جنم دیا ہے۔ یہ ایک ایسے ایتھر نظریے میں صحیح بیٹھتی ہے جس میں خلا مختلف میکانکی صفات رکھتا ہے جو اسے الاسٹک لہریں ترسیل کرنے کی اور جسمانی قوتوں کو بنائے رکھنے کی اہلیت دیتا ہے۔ وہ طریقہ جس سے ایسی ایتھر قوت ناپی جا سکے صرف ایتھر کے مادہ پر عمل کے ذریعہ ہو سکتا ہے۔

لارنز کے الکٹران نظریے کے مطابق وہ واحد قوت جو طبعی معنی رکھتی ہے ایک ماحصل قوت ہے جو مادّی چارجوں اور کرنٹوں پر کام کرنے والی فضا۔ وقت کی اوسط قوتوں سے پیدا ہوتی ہے، یعنی وہ جسے :

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (10\text{–}44)$$

کے اوسط سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم یہ بھی پائیں گے کہ اضافیت کی مخصوص نظریے کے ڈھانچے کے اندر ایسی کوئی پیمائش ایجاد نہیں کی جا سکتی جو ایتھر کی رفتار یا دوسری صفات معلوم کر سکے۔ اس لیے اگر ہم یہ نقطۂ نظر اپنائیں کہ جس اکیلی حجمی قوت کا طبیعی نظریے میں کوئی مقام ہے وہ ایسی قوت ہے جو لارنز قوت مساوات (10–44) سے اخذ جا سکتی ہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مساوات (10–42) کی دوسری رقم گھٹانے کے عمل سے نکل جائے گی۔ تب حجمی قوت اُس حالت میں جب $\kappa = \kappa_m = 1$, ہو۔

$$F_{v\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial N_\alpha}{\partial t}, \tag{10–45}$$

ہوجاتی ہے جو لارنز قوت کے برابر ہے۔

اگر ہم اس مساوات کو ایسے حجم پر عائد کریں جس کے اندر مادّہ اور انشعاع دونوں ہوں اور جو ایک محدود سطح سے محیط ہو تو ہم پاتے ہیں کہ[1]

$$F_\alpha = \int T_{\alpha\beta}\, dS_\beta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int N_\alpha\, dv. \tag{10–46}$$

چونکہ انٹیگریٹ کیا ہوا اجسامی قوت F_α حجم کے میکانکی تحرک p_α, کی تبدیلی کی پوری شرح بتاتا ہے، اس لیے مساوات (10–46) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{d}{dt}\left[p_\alpha + \frac{1}{c^2}\int N_\alpha\, dv\right] = \int T_{\alpha\beta}\, dS_\beta. \tag{10–47}$$

یہ مساوات بیان کرتا ہے کہ میکانکی تحرک کے بدلنے کی شرح میں اگر پوائنٹنگ

---

[1] ہم نے ایک رقم کو چھوڑ دیا ہے جو مادہ کے اندر مندرجہ ذیل عبارت سے ظاہر کی جاتی ہے۔

$$\frac{(\kappa\kappa_m - 1)}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int N_\alpha\, dv,$$

اور جو در حقیقت موجود رہتی ہے جب کوئی برقی مقناطیسی لہر مادّہ میں سے گزرتی ہے۔ محدود لمبائی کی لہر قطار کی وجہ سے اس کا کل ملا کر دھکا ہمیشہ غائب ہوجاتا ہے ہم اس کی تفسیر پر جو کسی قدر پیچیدہ ہے بحث نہیں کریں گے۔

ویکٹر کے حجمی انٹگرل کو c^2 سے تقسیم کرکے جوڑدیں تو نتیجہ اس پورے میکسویل زور کے جو حجم کو محیط کرنے والی سطح سے ترسیل ہوتا ہے سطحی انٹگرل کے برابر ہوگا۔ اگر اتنی وسیع سطح پانا ممکن ہو سکتا ہے کہ میدان سے پاک فضا میں ہوتی تو میکانکی تحرک اور پوائنٹنگ ویکٹر کے حجمی انٹگرل کا جوڑ وقت میں مستقل ہوتا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وہ تصحیحی رقم جسے مساوات (10-45) میں داخل کرنے کی ضرورت صرف حجمی قوت کی ایک طبیعی تفسیر کے ہمارے تقاضے کی وجہ سے ہوئی۔ تحرک کے تصور میں ایک تبدیلی کو لازمی کر دیتی ہے۔ چونکہ ایتھر کی کوئی ایسی طبیعی صفت نہیں ہے جس کو ناپا جاسکے، اس لیے ہم تحرک کی برقراریت کے قانون میں تبدیلی کرنے پر مجبور ہو جاتے ہیں۔ یہ قانون صرف مادہ پر ہی لاگو نہیں ہوگا بلکہ اس میں برقی مقناطیسی اشعاع میدان کی تحرک کثافت بھی شامل کرنی ہوگی جو پوائنٹنگ ویکٹر کو ایک مستقلہ c^2 سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے پوائنٹنگ ویکٹر توانائی کو لے جانے والے اور تحرک کو لے جانے والے دوہرے رول میں ظاہر ہوتا ہے۔ اضافیت کے مخصوص نظریے میں یہ معلوم ہوگا کہ توانائی کی ترسیل تحرک کی ترسیل سے اسی مناسبت سے مطابقت رکھتی ہے جو یہاں اخذ کی گئی ہے۔ دراصل یہ ہر شکل کی توانائی کے بہاؤ کی صفت ہے اور برقی مقناطیسی اشعاع تک محدود نہیں ہے۔

مجوزہ حوالے

M. Abraham and R. Becker, *Classical Theory of Electricity and Magnetism.*

توانائی کے مصدقوں کو صاف اور آسان ڈھنگ سے حاصل کیا گیا ہے۔

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media.*

باب IV مقناطیسی میدانی توانائی اور کرنٹ نظاموں کے تفاعل پر تشریح سے بحث کی گئی ہے۔

W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity.* بہت سے مخصوص مسئلے

موضوعات کی ترتیب موجودہ کتاب سے بہت مختلف ہے لیکن دلچسپ

J. H. Jeans, *Electricity and Magnetism*. استعمال دیے گئے ہیں

مشق

1. - نیومین کے فارمولے کے استعمال سے دو برابر متوازی چالکوں کے درمیان فی اکائی لمبائی باہمی ترغیبیت کا حساب لگائیے۔ اگر دونوں تار ایک واحد سرکٹ بناتے ہیں تو ان کے درمیان قوت معلوم کیجیے۔

2. - ایک ہم محوری کیبل ہے جو ایک a نصف قطر کے مرکزی تار اور ایک $b \gg a$ نصف قطر کے پتلے خول پر مشتمل ہے۔ چالکوں کے اس جوڑے کی ایک سرکٹ کے طور پر فی اکائی لمبائی خود۔ ترغیبیت دریافت کیجیے اور اندرونی تار اور خول کے درمیان باہمی ترغیبیت نکالیے۔ دکھائیے کہ اندرونی تار اور خول کی باہمی ترغیبیت وہی ہے جو خول کی خود۔ ترغیبیت۔ کیا جواب مختلف ہو جائیں گے اگر اندرونی تار اور خول ہم محوری نہیں ہیں؟

3. - ایک ٹھوس چالک سلنڈر پر لگنے والا ٹارک معلوم کیجیے جو کم رفتار سے ایک یکساں مقناطیسی میدان میں جو سلنڈر کے محور کے عمودی ہے گردش کر رہا ہے۔

4. - ایک پتلا کروی شیل جس کی چالکتا σ، موٹائی t اور نیم قطر ہے ایک یکساں زاویائی رفتار سے ایک محور کے گرد جو ایک مقناطیسی میدان کے عمودی ہے گردش کر رہا ہے۔ وہ طاقت معلوم کیجیے جو گردش کے بنائے رکھنے کے لیے ضروری ہے۔

5. - ایک نصف قطر a کا فولادی کرّہ یکساں مقناطیت M سے مستقل طور پر مقنایا گیا ہے۔ N چکروں اور نصف قطر $b > a$ کی ایک دائری کنڈلی جس میں کرنٹ J بہہ رہی ہے M کے متوازی ایک مستوا میں اس طرح رکھی گئی ہے کہ کنڈلی کا مرکز کرّہ کے مرکز پر ہے۔ کنڈلی پر ٹارک معلوم کیجیے۔

6 - مشق 10, باب 8 کے لوہے کے کٹے چھلے میں لوہے کے اندر اور ہوائی جھری میں پوری میدانی توانائی اور میدانی توانائی کی کثافت معلوم کیجیے - ایک خارجی میکانکی قوت کے ذریعہ جھری کو تھوڑا بڑھانے کے عمل کے توانائی توازن پہ بحث کیجیے۔

7 - دکھلائیے کہ ٹینسر ڈائیورجنس $\partial T_{\alpha\beta}/\partial x_\alpha$ حجمی قوت کا جز مساوات (10-30)، دیتا ہے، جہاں $T_{\alpha\beta}$ مساوات (10-32) سے ملتا ہے۔

باب (11)

لہر مساوات اور مستوی لہریں

11-1 مساوات

میکسویل کے مساواتوں کے توانائی اینٹگرل مساوات (10-34) میں ہم نے دور پہ ایک سطح کے اوپر غیر صفر اینٹگرل کی تفسیر اس طرح کی تھی کہ یہ توانائی کا بہاؤ بتاتا ہے جسے ہم اشعاع کہتے ہیں ان مساواتوں کو اس طرح ملایا جا سکتا ہے کہ ان ترسیلی میدانوں کو زیادہ صریحی طور پہ ظاہر کر سکیں : ان چار پہلے آرڈر کی خطی جزوی تفرقی میدانی مساواتوں کو دوسرے آرڈر کی خطی جزوی تفرقی مساواتوں کے ایک نظام میں بدلا جا سکتا ہے۔ یہ تبدیلی عمل لانے کے لیے ہمیں یاد کرنا ہے کہ میکسویل کے مساوات یہ ہیں :-

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{true}, \\
&(2) \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\
&(3) \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
&(4) \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{true} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.
\end{aligned}
\qquad (9\text{-}7)
$$

ایک ایسے خطّہ کو سوچیے جہاں کوئی حقیقی چارج اور برق محرک قوت کے ماخذ نہ ہوں۔ اس لیے $\rho_{true} = 0$ اور $E' = 0$, اور جہاں ϵ اور μ سمتی قدروں کے اور وقت کے فنکشن نہ ہوں۔ مساوات (3) (9-7) کا کرل لیجیے اور B کی جگہ μH رکھ دیجیے:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mu \mathbf{H}). \qquad (11\text{-}1)$$

مساوات (4) (9-7) کو H کے کرل کی جگہ رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{j}_{true} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \tag{11-2}$$

اب کسی ویکٹر کے لیے یہ صحیح ہے کہ

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

لیکن چارج سے پاک خطے میں $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ اور مساوات (7-3) کے مطابق $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$ اس لیے مساوات (11-2) کی شکل

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\kappa\kappa_m}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \tag{11-3}$$

ہو جاتی ہے۔ جہاں ہم نے آزاد فضا کے مستقلوں $\mu_0\epsilon_0$ کے حاصل ضرب کی جگہ $1/c^2$ لکھا ہے۔ مساوات (11-3) سے دیکھا جا سکتا ہے کہ c کی پیمائش رفتار کی ہونی چاہئیں۔

مساوات (11-3) کو لہروں کا عام مساوات کہتے ہیں۔ اس مساوات کے کسی مخصوص اطلاق میں عموماً یا تو دوسری رقم یا تیسری رقم نکل جاتی ہے۔ ایک غیر چالک وسیلہ میں تیسری رقم غائب ہو جاتی ہے اور جیسا ہم دیکھیں گے لہروں کا ایک ترسیلی مساوات رہ جاتا ہے جو رفتار $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon},$ سے سفر کرتی ہیں۔ ایک چالک وسیلے میں دوسری رقم عموماً ناقابلِ لحاظ ہوتی ہے اور ہمیں وہی مساوات ملتا ہے جو ایصال حرارت یا نفوذ کے لیے ہے۔ ایک ایسے میدان کے لیے جو ایک زاویائی تواتر ω سے بدل رہا ہے دونوں رقموں کی اضافی جسامت کا اندازہ آسانی سے لگایا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_a)e^{-i\omega t}. \tag{11-4}$$

جب مساوات (11-4) کو مساوات (11-3) میں رکھا جاتا ہے تو ہمیں ایک ایسا مساوات ملتا ہے جس کا انحصار وقت پر نہیں ہے۔

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\kappa\kappa_m}{c^2}\omega^2 \mathbf{E} + i\mu\sigma\omega \mathbf{E} = 0. \tag{11-5}$$

مساوات (11-5) اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}\right)\mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E} = 0, \qquad (11\text{-}6)$$

اور وسیلہ کے استراحت کا وقت، جس پر سکشن 7-4، میں بحث ہو چکی ہے،
اس عبارت سے ملتا ہے

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}. \qquad (7\text{-}20)$$

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر استراحت کا وقت τ سائن ارتعاش کے وقفہ $2\pi/\omega$ کے مقابلہ میں اتنا لمبا ہے کہ مساوات (11-6) میں قیاسی رقم کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے تو ہمارے پاس ایک ترسیلی مساوات رہ جاتا ہے۔ دوسری طرف اگر استراحت کا وقت وقفہ کے مقابلہ میں کم ہے تب قیاسی رقم اکائی کے مقابلہ میں بڑی ہوگی اور لازمی طور پر نفوذ کی حالت ہوگی۔

سب خالص دھاتوں کے لیے استراحت کا وقت 10^{-14} سکنڈ کے درجہ کا ہوتا ہے اس لیے سبھی تواتروں کے لیے جو مرئی اسپیکٹرم کے تواتر سے نیچے ہیں نفوذ کی طرح کا مساوات جائز ہوگا۔ اس کا مطلب ہے کہ دھاتی چالکوں کے اندر ترسیلی رقم $\mu\epsilon\, \partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ کو بہت اونچے تواتر کے ریڈیو خطہ کے لیے بھی نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ دوسری طرح سے کہا جائے تو نقل کرنٹ دھاتوں میں بیش ترین تواتروں کے لیے جنھیں نظریاتی طور پر میکرو اہتزاز کاروں سے حاصل کیا جا سکتا ہے ایصالی کرنٹ کے مقابلہ میں ناقابلِ لحاظ ہوتی ہے۔

وہ ضریبے جو مساوات (11-5) میں آتے ہیں کئی کارآمد طرح سے ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہم لکھیں

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\lambda_0}, \qquad (11\text{-}7)$$

تو λ_0 آزاد فضا میں 2π. سے تقسیم شدہ لہر کی لمبائی ہے۔ اسی طرح ایسے وسیلے کے لیے جس کی خصوصیات κ اور κ_m ہوں، ہم لکھ سکتے ہیں کہ:

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\lambda}, \qquad (11\text{-}8)$$

جہاں $u = c/\sqrt{\kappa\kappa_m}$ ایصالی کرنٹ کی قدر اور نقل کرنٹ کی قدر کی نسبت کو ان رشتوں کے لحاظ سے پھر سے اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

$$\frac{1}{\omega\tau} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}\frac{\lambda}{u} = \sigma\lambda\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sigma\lambda R_0\sqrt{\frac{\kappa_m}{\kappa}}, \qquad (11\text{-}9)$$

جہاں

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \qquad (11\text{-}10)$$

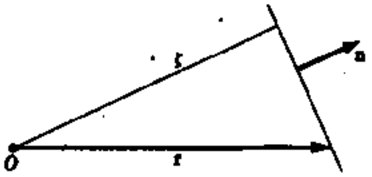
ایک مزاحمت ہے جس کی عددی قیمت 376.7 اوم ہے۔ اس عدد کو کبھی کبھی آزاد فضا کی امتیازی مقاومت کہتے ہیں۔ لہری اشاعت اور "مجموعی" ترسیلی لائن پیرامیٹروں کے درمیان مشابہت کچھ عملی مسئلوں میں کارآمد ہے لیکن ہم اس قسم کی مشابہتوں کی بجائے خود برق مقناطیسی میدانوں کے امتیازی خاصتوں پر دھیان دیں گے۔ مساوات (11-9) کے معنی کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ اگر ایک مکعب کی جس کا کنارہ λ ہے مزاحمت R_0 سے زیادہ ہے تو ایسے وسیلے میں نقل کرنٹ ہی غالب رہے گا جب کہ اگر اس کا برعکس صحیح ہو تو وسیلے میں برقی مقناطیسی میدانوں کے رویے کا تعین ایصالی کرنٹ کرے گی۔

مساوات (11-3) اور H یا B کے مشابہ مساوات میدانی ویکٹروں میں متجانس ہیں کیونکہ ان کو اس شرط کے تحت اخذ کیا گیا تھا کہ کوئی چارج یا برقی محرک قوت کا کوئی ماخذ موجود نہیں ہے۔ ان میدانوں اور ان کے ماخذ کے درمیان رشتہ کی تفتیش کے لیے سکونی میدان کی طرح یہ سہل ہوگا کہ مضمروں کو بیچ کی میدانی مقادیر کی شکل میں داخل کیا جائے۔ باب 14 میں ہم پھر واپس اس مسئلہ پر لوٹیں گے۔ بہت سے دلچسپ اور اہم نتائج پر جو میدان کی بنیاد پر منحصر نہیں ہیں۔ بلا مضمروں کا استعمال کیے غور کیا جا سکتا ہے۔

11-2 مستوالہریں

آئیے ہم اس حالت پر غور کریں جس میں سب میدان صرف مبدا سے ایک دیے ہوئے مستوا کے فاصلہ کے فنکشن ہیں جیسا شکل 11-1 میں دکھایا ہے۔ اگر یہ فاصلہ z ہے اور اگر مستوا کے

عمودی n ایک اکائی ویکٹر ہے تو سب نقطوں کے لیے مکانی اشتقاقات



[شکل 11-1 ایسی ہموار سطحوں پر جو اکائی عمودی n سے دکھائی گئی ہیں
سب میدان مستقل ہیں]

صرف ζ کے لحاظ سے ہوں گے اور آپریٹر ∇

$$\nabla = \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

ہو جاتا ہے اس طرح میکسویل کے مساوات یہ ہو جاتے ہیں:

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{n}\times\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{n}\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (11\text{–}11)$$

سے مساوات (4) (11-11) کو اسکیلر ضرب دینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\mathbf{n}\cdot\left(\frac{\sigma}{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{D} = 0. \qquad (11\text{–}12)$$

مساوات (11-12) اور (1) (11-11) کا مطلب ہے کہ D اور E, کے طولی جزو یعنی وہ جزو جو شکل کی مستوا سطح کے عمودی ہیں ζ سے بے تعلق ہیں اور ان کا وقت پر انحصار ایک ایکسپونٹی انداز سے زوال کے قانون کا تابع ہے جو وسیلہ کے امتیازی استراحت وقت کے مطابق ہے۔ اس طرح

$$E_n = E_{n_0}e^{-t/\tau} = E_{n_0}e^{-(\sigma t/\epsilon)}. \qquad (11\text{–}13)$$

اس کا مطلب ہے کہ میدانی مساواتوں کا طولی حل صرف برق سکونی حل ہے اور محدود چالکتا کی موجودگی میں برق سکونی حل وقت کے ساتھ ایکسپونینسی انداز میں غائب ہو جائیں گے۔

اور مساوات (3) (11-11) کے اسکیلر ضرب سے

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad (11\text{-}14)$$

ملتا ہے، جو مساوات (2) (11-11) کے ساتھ دکھاتا ہے کہ میدانی مساواتوں سے مطابقت رکھنے والا مقناطیسی میدان کا طولی جز صرف ایک مستقل یکساں مقناطیسی میدان ہے۔ اس طرح اگر کوئی غیر مستقل حل ہے تو وہ عرضی میدانوں پر ہی مشتمل ہوگا یعنی وہ میدان ایسے ہوں گے کہ ان کے ویکٹر اس مستوا میں ہوں گے جو شکل 11-1. میں n سے دکھایا گیا ہے۔

برقی میدان کا ہر عرضی جز اس تفرقی مساوات کی پابندی کرتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \qquad (11\text{-}15)$$

جس کو مساواتوں (3) (11-11) اور (4) کے درمیان H کو خارج کرنے سے اخذ کیا جا سکتا ہے یا سیدھے مساوات (3-11) سے لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات (11-15) کو "ٹیلیگرافی کا مساوات" کہا جاتا ہے۔ اگر وسیلہ کی چالکتا صفر ہو تو یہ مساوات

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad (11\text{-}16)$$

ہو جاتا ہے۔ مساوات (11-16) کا عام حل

$$E = f(\zeta - ut) + g(\zeta + ut), \qquad (11\text{-}17)$$

ہے۔ جہاں f اور g اپنے اپنے آرگومینٹوں کے من مانے فنکشن ہیں، اور پہلے کی طرح $u = c/\sqrt{\kappa\kappa_m} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$، ان کا عام حل ζ کی سمت میں سفر کرنے والی لہروں کو بتاتا ہے یعنی شکل f کا ایک اضطراب جو ζ کی مثبت

سمت میں وقت گزرنے کے ساتھ ترسیل ہوتا ہے اور ایک ζ شکل کا جو اس سے الٹی سمت میں ترسیل ہوتا ہے u وہ رفتار ہے جس سے اضطراب کی شکل سفر کرتی ہے اور اسے فیز رفتار یا لہری رفتار کہتے ہیں۔ آزاد فضا کی رفتار کا تناسب اُس رفتار سے جو κ اور κ_m امتیازی خاصہ والے وسیلے میں ہے $c/u = \sqrt{\kappa\kappa_m}$ کو اس وسیلہ کا انعطافی انڈیکس کہلاتا ہے اور اکثر n سے دکھایا جاتا ہے۔

اگر یہ مان لیا جائے کہ E کی وقت کے ساتھ تبدیلی سائن خم نما ہے۔ جس کا زاویائی تواتر ω ہے جو جزو $e^{-i\omega t}$ سے ملتی ہے تو مساوات (11-16) کا حل مندرجہ ذیل ہوگا۔

$$E = E_0 e^{-i(\omega t \pm k\zeta)}, \qquad (11\text{-}18)$$

جہاں

$$k = \omega/u = 2\pi/\lambda = 1/ƛ.$$

ترسیل کی سمت میں k کو ایک ویکٹر لکھنا اکثر کارآمد ہوتا ہے۔ یہ ترسیلی ویکٹر اس سے ملتا ہے

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{u^2}\mathbf{u} = \frac{1}{ƛ}\frac{\mathbf{u}}{u}, \qquad (11\text{-}19)$$

اس لیے مساوات (11-16) کا ایک حل اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \qquad (11\text{-}20)$$

آیئے ہم اُس حالت پر غور کریں جب مساوات (11-18) کے مخلوط ایکسپونینسی کا نشان منفی ہے جس کی وجہ سے لہر زیادہ مثبت ζ طرف جا رہی ہے مساوات (3) (11-11) ہو جاتا ہے۔

$$\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = i\omega \mathbf{B} = ik\mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

یا

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\,\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}. \qquad (11\text{-}21)$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ کے ہر عرضی جزکے ساتھ ایک مقناطیسی میدان منسلک ہے۔ اگر $\mathbf{E}$ یا $\mathbf{B}$ کی سمت وقت کے ساتھ بدلتی نہیں تو لہر کو مستوی تقلیب شدہ یا خطی تقطیب شدہ کہا جاتا ہے، چونکہ میدانی مساواتیں کسی ایک میدانی ویکٹر کے مختلف جزو کے درمیان کوئی رابطہ نہیں دکھاتے اس لیے اگر ہم اپنی بحث کو مستوی تقطیب شدہ لہروں تک محدود رکھیں تو بحث کے عام ہونے میں کوئی فرق نہیں ہوگا $\mathbf{E}$ اور $\mathbf{B}$ ایک دوسرے کے عمودی ہیں اور اشاعت کی سمت کے بھی عمودی ہیں اور مساواتوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ $\mathbf{E}, \mathbf{B},$ اور $\mathbf{n}$ (یا $\mathbf{k}$) ایک داہنے ہاتھ کا سمتی قدری نظام اسی ترتیب سے بناتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ میدانوں کا وقت پہ مخلوط ایکسپونِنشی انحصار میکسویل کے مساوات کو ایک خاص طور سے سادہ شکل دے دیتا ہے اور مخلوط عبارتیں جیسا مساوات (11-20) میں $\mathbf{E}$ کے لیے ہے عام طور سے ریاضیاتی نقطۂ نظر سے بہت سہولت والی ہوتی ہیں لیکن ہمیں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ میدان خود مخلوط مقدار کے حقیقی حصّے ہیں۔ سائنی ڈھنگ سے بدلنے والے میدانوں سے وابستہ توانائی کثافت وقت کے ساتھ گھٹتی بڑھتی ہے چونکہ اس میں جز $E^2 = E_0^2 \cos^2 (kz - \omega t)$ شامل ہے جو مساوات (11-20) مربع کا حقیقی حصّہ ہے E^2 کا وقتی اوسط ٹھیک $\frac{1}{2}E_0^2$ ہے۔ عام طور سے دو ویکٹروں کے حقیقی حصّوں کے حاصل ضرب کا وقتی اوسط جن میں سے ہر ایک $e^{-i\omega t}$ کے حساب سے بدل رہے ہوں، ایک ویکٹر اور دوسرے کے مخلوط زوج کے حاصل ضرب کے حقیقی حصّہ کا آدھا ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\overline{(\text{Re}\,\mathbf{F}) \cdot (\text{Re}\,\mathbf{G})} = \tfrac{1}{2}\,\text{Re}\,(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}^*) = \tfrac{1}{2}\,\text{Re}\,(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{G}), \qquad (11\text{–}22)$$

جہاں $*$ کا مطلب مخلوط زوج ہے۔ داہنے طرف کے حاصل ضرب وقت پر منحصر نہیں ہیں، اس لیے اوسط دکھانے والی لکیر کی کوئی اہمیت نہیں ہے $\mathbf{F}$ اور $\mathbf{G}$ کو حقیقی اور قیاسی حصّوں کے جوڑ کی شکل میں لکھنے سے مساوات (11-22) کی آسانی سے توثیق کی جا سکتی ہے۔ تفصیل ایک مسئلہ کے لیے چھوڑ دی گئی ہے۔

مساوات (11-20) اور (11-21) سے ملے مستوالہری میدانوں کے لیے اور متعلقہ

میدانوں D اور H کے لیے توانائی کثافت کا وقتی اوسط یہ ہے:-

$$\overline{U} = \tfrac{1}{2}\overline{(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{D})} = \tfrac{1}{2}\epsilon E_0^2 \text{ joules/meter}^3, \qquad (11\text{-}23)$$

جس میں برقی اور مقناطیسی میدانوں کا برابر برابر کا حصہ ہے، پوائنٹنگ ویکٹر $\mathbf{N} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ لہر کی اشاعت کی سمت ہے اور اس کا وقتی اوسط یہ ہے:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\epsilon/\mu}\, E_0^2\, \mathbf{n} \quad \text{watts/meter}^2\\ &= \overline{U}\mathbf{u}. \qquad (11\text{-}24)\end{aligned}$$

اس طرح ایک ساکن یکساں غیر چالک وسیلہ میں ایک مستوی لہر کے ساتھ وابستہ توانائی کی اسی رفتار سے اشاعت ہوتی ہے جس سے کہ میدان کی۔

11-3 اشعاع کا داب

جز 10-6 میں ہم نے دیکھا ہے کہ ایتھر نظریہ اور لارنز کا الکٹرانی نظریہ حجمی قوت کے لیے دو مختلف عبارتیں دیتے ہیں، میکسویل زور ٹینسر ڈایورجنس ایک حجمی قوت دیتا ہے جو چارجوں اور کرنٹوں کی غیر موجودگی میں غائب نہیں ہوتا۔ اور اس قوت کو لارنز قوت سے ہم آہنگ کرنے کے لیے ہمیں جس تصحیح کی ضرورت ہوتی ہے اس کا مطلب برقی مقناطیسی میدان میں تحرک کثافت کا وجود ہے۔ اب ہم یہ دیکھتے ہیں ایک مستوی لہر اپنے ساتھ توانائی لے جاتی ہے۔ آیئے آگے ہم اس بات کی تفتیش کریں کہ ایک مستوی لہر پر تحرک کے توازن کے اطلاق کے کیا نتائج ہیں۔

آیئے پہلے ہم ایک خطی تقطیب شدہ مستوی لہر پر غور کریں جو ایک ایسی شے کی پٹی پر عمودی گزر رہی ہے جو اسے پورا پورا جذب کر لیتی ہے یعنی جو سیاہ جسم ہے۔ اگر ہم اشاعت کی سمت کو x محور مانیں تو y کو ہم برقی میدان کی سمت لے سکتے ہیں اور مقناطیسی میدان z محور کے متوازی ہو گا۔ میکسویل کا زور ٹینسر (بلا برقی یا مقناطیسی اسٹکرشن کے)

$$T_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}(E_\gamma D_\gamma + H_\gamma B_\gamma), \qquad (10\text{-}37)$$

کے اس حالت میں صرف قطری جز ہوں گے جو یہ ہیں :-

$$T_{xx} = -\tfrac{1}{2}(E_y D_y + H_z B_z),$$
$$T_{yy} = E_y D_y - \tfrac{1}{2}(E_y D_y + H_z B_z), \qquad (11\text{-}25)$$
$$T_{zz} = H_z B_z - \tfrac{1}{2}(E_y D_y + H_z B_z).$$

مساوات (10-45) سے اخذ کی گئی قوت جو حجمی قوت کو کسی مادی وسیلے میں لارنز قوت کے مطابق بنا دیتی ہے یہ ہے

$$F_{v\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_\alpha, \qquad (11\text{-}26)$$

جس کا x جز

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(E_y D_y + H_z B_z) - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(E_y H_z). \qquad (11\text{-}27)$$

ہے۔ قوت کے y اور z جز غائب ہو جاتے ہیں کیونکہ میدان y اور z کے فنکشن نہیں ہیں اور کیونکہ پوائنٹنگ ویکٹر کے کوئی y اور z اجزا نہیں ہیں۔

چونکہ میدان جذب ہو جاتے ہیں اس لیے حجمی قوت کے وقتی اوسط کے x جز کو انٹیگریٹ کرنے سے شے کی پٹی پر لگنے والا پورا داب حاصل ہوگا۔

$$\int_0^\infty \overline{F_{vx}}\,dx = \tfrac{1}{2}(\epsilon\overline{E^2} + \mu\overline{H^2}), \qquad (11\text{-}28)$$

جو اندر آنے والی اشعاع کے میدان کی توانائی کثافت بالکل برابر ہے اگر E_y اور H_z سائن خم نما انداز سے بدلتے ہیں تو پوائنٹنگ ویکٹر کے وقتی تفرقی اخذ کا وقتی اوسط غائب ہو جاتا ہے اور اس لیے یہ رقم مساوات (11-28) میں چھوڑ دی گئی ہے۔ اگر ہم ایک محدود لمبائی کے لہر سلسلہ کے ذریعہ ترسیل کیے گئے موثر دھکے (net impulse) کو جاننا چاہیں تو داب کا انٹیگرل وقت $+\infty$, تک لینا ہوگا، اور اس بار بھی وقتی تفرقی اخذ انٹیگریشن میں نکل جائے گا ز ایک

سلسلہ لہر کے جذب ہونے کے دوران فوری داب کی قیمت میں ہی اس کا حصّہ ہوگا لیکن پورے اثر میں نہیں ہوگا۔ اس طرح اشعاع کا داب وہی ہے جو ایتھر نظریہ میں ہے اس پر دلمحاتیوں کے سوا) اس تصحیحی رقم کا کوئی اثر نہیں پڑتا جس کی ضرورت حجمی قوت کو لارنتز قوت سے مطابقت میں لانے کے لیے ہوئی تھی۔ دھیان رکھیے کہ مساوات (11-28) اس داب سے اتفاق کرتا ہے جو یہ مان کر حاصل کیا گیا تھا کہ حجم c dt کا تحرک جس کی قدر Nc dt/c² ہے جسم کے اکائی رقبہ پر جذب ہوتا ہے۔

اس نتیجہ کو مختصراً اس طرح کہا جا سکتا ہے کہ اشعاع کے داب کا مظہر برق مقناطیسی لہروں کے تحرک کے تصوّر سے ہم آہنگ ہے اور اس زیادہ عام تصوّر سے بھی کہ توانائی کے ہر ترسیلی عمل میں تحرک لے جایا جاتا ہے۔ اس داب کی پیشین گوئی برق مقناطیسی اشعاع کی اضافیت نظریہ کے پہلے کی کلاسکی ایتھر نظریے نے کی تھی اور اس میں برق مقناطیسی نظریے کی جدید جدّتوں سے کوئی تبدیلی نہیں ہوئی ہے متعلقہ قوت محض لارنتز قوت ہے اور جذب کے عمل کے سب تفصیلی ماڈل ایک ہی جواب پر پہنچاتے ہیں جو یہ ہیں کہ داب واقع اشعاع کی توانائی کثافت کے برابر ہوتی ہے۔ اس کی شدت کی نظریاتی پیشین گوئیوں کی تصدیق اشعاع داب کی ناپ کرنے سے ہوئی ہے۔

اشعاع کے داب کا حساب اس حالت میں بھی لگایا جا سکتا ہے جب کہ سطحیں مکمل یا جزوی طور سے انعکاسی ہوں۔ آیئے ہم جاذب دیواروں والے ایک جوف کو لیں جس میں یکساں اور سمتی یکساں اشعاع ہے یعنی اشعاع غیر تقطیب شدہ ہے اور سب سمتوں میں اس کی شدت ایک سی ہے۔ تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ مساوات (11-26) کی حجمی قوت کا نہ غائب ہونے والا جزو وہ ہے جو دیواروں کے عمودی ہے اگر ہم محور کو زیرِ غور سطح کے قطعہ پر عمودی لیں تو یہ قوت اس طرح لکھی جا سکتی ہے:

$$F_{v_x} = \epsilon\left[\frac{\partial E_x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z)\right]$$
$$+ \mu\left[\frac{\partial H_x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(H_xH_y) + \frac{\partial}{\partial z}(H_xH_z)\right] - \frac{\epsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial x} - \frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial x}. \quad (11\text{-}29)$$

وقتی تفرقی اخذوالی رقم پہلے کے ہی وجوہات سے چھوڑدی گئی ہے) چونکہ برقی میدان کے مختلف اجزا میں کوئی آپسی رشتہ نہیں ہے اس لیے سب ضربی رقموں کے وقتی اوسط غائب ہوجائیں گے اور ہم کو

$$\overline{F_{e_x}} = \epsilon \frac{\partial \overline{E_x^2}}{\partial x} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \overline{E^2}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \overline{H_x^2}}{\partial x} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial \overline{H^2}}{\partial x}. \qquad (11\text{-}30)$$

ملے گا۔ چونکہ ہمارے مفروضہ کے مطابق میدانوں کا تشریق بالکل بے ترتیب ہے لہذا

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2} = \tfrac{1}{3}\overline{E^2},$$

اور اس طرح

$$\overline{H_x^2} = \tfrac{1}{3}\overline{H^2}.$$

اس لیے عمودی قوت یہ ہوجاتی ہے :

$$\overline{F_{e_x}} = -\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} [\epsilon \overline{E^2} + \mu \overline{H^2}] = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{U}}{3}\right)$$

جہاں اشعاع کی توانائی کثافت ہے، وسیلے کی سطح سے لے کر میدان سے پاک فضا تک اینٹگریٹ کرنے پر، ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ پورا اشعاع داب اشعاع کی توانائی کثافت کے $\frac{1}{3}$ برابر ہے :

$$\int_0^\infty \overline{F_{e_x}}\, dx = \tfrac{1}{3}\overline{U}. \qquad (11\text{-}31)$$

اسٹیفن۔ بولٹزمین قانون اور وین کے سیاہ جسم اشعاع کے نقل قانون کے حرحرکیاتی اخذ اسی مساوات پر مبنی ہیں، یہ بات دھیان دینے کی ہے کہ اشعاع کے مکمل طور پر یکساں اور سمتی یکساں ہونے کے لیے اور اس طرح وہ بے ترتیبی حاصل کرنے کے لیے جس کو مساوات (11-29) کو سادہ بنانے کے لیے استعمال کیا گیا ہے یہ لازمی ہے کہ دیواریں "سیاہ" ہوں یعنی پوری جاذب ہوں۔ مساوات (11-31) کو دیگر حالات میں جائز نہیں ماننا چاہیے جیسے مثال کے لیے ایسے جوف جن کی دیواریں چکنی انعکاسی ہوں۔

11-4 متحرک وسیلے میں مستوی لہریں

اشعاع کے داب کی پیشین گوئی پہلے برقی مقناطیسی نظریے نے کی تھی اس کے برعکس روشنی کی متحرک وسیلوں میں رفتار کو فرینل نے ساکن ایتھر میں الاسٹک ارتعاشوں کے مفروضہ کی بنیاد پر اخذ کیا تھا اور فیزو نے 1853. میں اس کی تصدیق کی تھی۔ فرینل کی پیشین گوئی جسے بعد کو اضافیاتی نقطۂ نظر سے اخذ کیا جائے گا، وسیلوں میں میکسویل کے مساواتوں سے اتفاق کرتی ہے بشرطیکہ ہم وسیلے کی رفتار اس رفتار کو سمجھیں جو اس حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے جس میں روشنی کی آزاد فضائی رفتار c. ہے۔

فرینل اور فیزو کے مطابق روشنی کی رفتار ایسے جسم میں جو مشاہد کی نسبت سے رفتار v سے حرکت کر رہا ہے اس عبارت سے ملتی ہے:۔

$$u = u_0 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \qquad (11\text{-}32)$$

جہاں $n = \sqrt{\kappa\kappa_m}$ وسیلہ کا انعطافی انڈیکس ہے اور $u_0 = c/n.$ کو اکائی ویکٹر $\mathbf{n}$, نہیں سمجھ لینا چاہیے جو لہر کی اشاعت کی سمت میں ہے۔ یعنی $\mathbf{u} = u\mathbf{n}.$ ہم سیکشن 9-4. کے افکار کی بنا پر برقی مقناطیسی لہروں کی رفتار کسی غیر سرایت پذیر وسیلہ میں جو ایسی رفتار سے حرکت کر رہا ہے جو c کے مقابلے میں کم ہے اخذ کر سکتے ہیں۔ میکسویل کے مساوات حقیقی چارجوں اور کرنٹوں سے آزاد متحرک وسیلے میں مندرجہ ذیل ہو جاتے ہیں:

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad (2)$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (3) \qquad (11\text{-}33)$$

$$\nabla\times\mathbf{B}/\mu_0 = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \nabla\times(\mathbf{P}\times\mathbf{v}) \qquad (4)$$

جیسا مساوات (9-18) سے دیکھا جا سکتا ہے۔ تقطیب متحرک وسیلہ میں موثر میدان کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \qquad (9\text{–}19)$$

دھیان رکھیے کہ مساوات (11-33) اور (9-19) میں دیے گئے سارے میدان وہ ہیں جو مشاہد کے سکونی فریم میں ناپے گئے ہیں۔ اگر ہم مساوات (9-19) کے تقطیبی میدان کو مساوات (4) (11-33) میں رکھیں اور تب میکسویل کے تیسرے مساوات کا استعمال کریں تو ہم $\mathbf{v}$: میں خطی رقموں تک صحیح پاتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left\{ \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_0(\kappa - 1)\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_0(\kappa - 1)\left[\mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v})\right]\right\} \\ &= \frac{\kappa}{c^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)[-\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v})]\right\}. \qquad (11\text{–}34) \end{aligned}$$

اگر ہم ویکٹر ٹرپل ضرب کو پھیلائیں تو یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, مستقل $\mathbf{v}$, کے لیے مساوات (11-34) مندرجہ ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے:۔

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\kappa}{c^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)[2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{E} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})]\right\}. \qquad (11\text{–}35)$$

کرل لینے پر اور مساواتوں (3)(11-33) اور (2) کا استعمال کرنے پر ہم کم رفتار سے متحرک وسیلوں کے لیے لہری مساوات پاتے ہیں:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\kappa}{c^2}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + 2\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)(\mathbf{v} \cdot \nabla)\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right] \qquad (11\text{–}36)$$

چونکہ یہاں ہماری دلچسپی صرف اُن رقموں میں ہے جو رفتار میں خطی ہیں اس لیے یہ تخمینہ لینا جائز ہوگا کہ سمتی قدر ζ کی طرف سمت $\mathbf{n}$ میں مستوا لہروں کی اشاعت کے لیے

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\frac{\partial}{\partial \zeta} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{u_0}\frac{\partial}{\partial t}.$$

اس لیے

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{1}{u_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}\left[1 - 2\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{u_0}\right] = 0. \qquad (11\text{–}37)$$

یہ ایک لہری مساوات ہے جس کی مطابقہ ترسیلی رفتار ہے:۔

$$u = u_0\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{u_0}\right]^{-1/2} \simeq u_0 + \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, \quad (11\text{-}38)$$

جو مساوات (11-32) سے v/c کے درجے تک اتفاق کرتا ہے اور جس کی جانچ نہ صرف فیزو نے کی ہے بلکہ زیادہ صحت کے ساتھ مائیکلسن اور مارلے نے بھی کی ہے۔

مساوات (11-38) کی طبیعی تفسیر یہ ہے کہ لہر کی ترسیلی رفتار کے صرف ایک ہی حصہ پر وسیلے کی حرکت کا اثر ہوتا ہے اور وہ $(1 - \frac{1}{\kappa})$ متناسب ہے۔

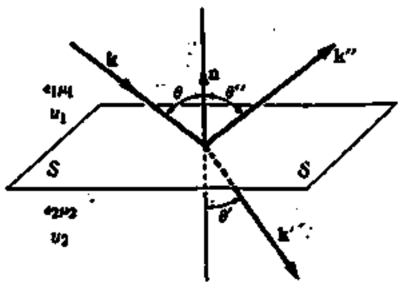
$$1 - \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \propto \frac{\partial P/\partial t}{\partial D/\partial t}. \quad (11\text{-}39)$$

اس طرح یہ کہ تقطیبی کرنٹ اور نقل کرنٹ کی نسبت کے متناسب ہے۔ چونکہ تقطیبی کرنٹ درحقیقت دو قطبوں کی حرکت کی وجہ سے ہوتی ہے اس لیے یہ مان لینا بے جا نہ ہوگا کہ لہر کا وہی حصہ وسیلہ کی رفتار سے متاثر ہوگا جو ان دو قطبوں سے مطابقت رکھتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ایک مستوا لہر پر وسیلہ کا اثر صرف یہ ہے کہ واقع لہر سے وسیلہ تقطیب شدہ ہو جاتا ہے اور نتیجے کے طور پر بنے دو قطبے ایک لہر پیدا کرتے ہیں جو واقع لہر کے ساتھ اس طرح مل جاتی ہے کہ ماحصل کی فیز رفتار سے مطابقت رکھتی ہو۔ یہی وہ ابطالی مربوط جز ہے جس کا متحرک وسیلے سے اخراج ہوتا ہے اور یہی فرینل۔ فیزو ضربیہ پیدا کرتا ہے۔ یہ قابلِ غور ہے کہ اس کلاسکی غیر اضافیاتی نظریے میں جو طبیعی مفروضات شامل ہیں وہ اضافیتی مفروضات سے ہم آہنگ ہیں اور ہم دیکھیں گے کہ یہ سب نتائج اضافیاتی اصولوں کے مطابق ہیں۔

11-5 ایک مستوا حد سے انعکاس اور انعطاف

میدانی مساواتوں میں جو حدودی شرائط موجود ہیں وہ اس بات کا تعین کرتی ہیں کہ جب ایک مستوا لہر مختلف برقی اور مقناطیسی صفات کے دو وسیلوں کی درمیانی حد پر واقع ہوتی ہے تو کیا ہوتا ہے۔ آیئے ہم ایک مستوا لہر کو لیں جو وسیلہ 1 میں $\mathbf{k}$ سمت میں سفر کر رہی ہے اور ذریعہ 1 اور 2 کے درمیان کی ہموار سطح پر واقع ہے، جیسا شکل 11-2 میں دکھایا گیا ہے۔ وسیلوں کی امتیازی صفات مستقلوں ϵ_1 اور

ϵ_1, μ_2 اور ϵ_2 سے ظاہر کی گئی ہیں۔



[شکل 11-2. ایک ہموار سطح پر انعکاس و انعطاف کے لیے اشاعتی ویکٹر k اور n، جو انعکاسی سطح کے عمودی ہیں وقوع کے مستوا کا تعین کرتے ہیں]
اشاعتی ویکٹر k اور اکائی ویکٹر n جو حدودی سطح کو بتاتے ہیں اس مستوا کا تعین کرتے ہیں جسے لہر کا وقوع مستوا کہا جاتا ہے۔ مساوات (11-20) اور (11-21) کے مطابق واقع میدان اس طرح ظاہر کیے جاتے ہیں :-

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{\omega\mu_1}. \qquad (11\text{-}40)$$

چونکہ E اور H دونوں کے مماسی اجزا حد کے پار مسلسل ہونے چاہئیں اس لیے واحد آگے بڑھنے والی لہر سے حدودی شرائط پوری نہیں ہو سکتیں۔ اگر ہم وسیلہ 2 میں جانے والی لہر کے لیے ایک زبر والے حرف اور منعکس لہر کے لیے دو زبر والے حرف استعمال کریں تو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \mathbf{H}' = \frac{\mathbf{k}'\times\mathbf{E}'}{\omega\mu_2},$$

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \mathbf{H}'' = \frac{\mathbf{k}''\times\mathbf{E}''}{\omega\mu_1}. \qquad (11\text{-}41)$$

مماسی میدانوں کا تسلسل جب ہی ممکن ہے اگر حد پر تینوں میدانوں کے لیے ایکسپونشل ایک ہی ہوں۔ اس لیے ہم مساوات (11-41) میں سب جگہ یہ مان لینے

میں حق بجانب تھے کہ پار ہو جانے والی اور منعکس لہروں میں تواتر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ اس کے علاوہ مزید شرائط یہ ہیں کہ حد کی سطح پر

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} \tag{11-42}$$

مساوات (11-42) سے ظاہر ہے کہ سب اشاعتی ویکٹر یک مستوی ہیں اگر ہم سہولت کے لیے سمتی قدری ویکٹر $\mathbf{r}$ کا مبدا اکائی ویکٹر $\mathbf{n}$, سے ظاہر کیے گئے حدودی مستوا میں لیں تو $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ مستوا کا مساوات ہوگا۔ تب حد پر

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r} = -\mathbf{r}$$

اور $\mathbf{r}$ سے مساوات (11-42) میں رکھنے پر ہم

$$\begin{aligned}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')\times\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{r}) &= 0,\\ (\mathbf{k}-\mathbf{k}')\times\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{r}) &= 0.\end{aligned} \tag{11-43}$$

پاتے ہیں۔

اب اشاعتی ویکٹر $\mathbf{k}$ اور $\mathbf{k}''$ اسی وسیلہ میں ہونے کی وجہ سے جسامت میں برابر ہیں اور $|\mathbf{k}|/|\mathbf{k}'| = u_2/u_1$, دونوں وسیلوں میں فیز رفتاروں کی نشست ہے۔ اس لیے انعکاس اور انعطاف کے قوانین مساوات (11-43) میں پوشیدہ ہیں اور زاویوں کے لحاظ سے حسب معمول طرح سے اس طرح لکھے جا سکتے ہیں:

$$\theta = \theta'',$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{u_1}{u_2}. \tag{11-44}$$

ان مساواتوں میں سے دوسرے کو اسنل کا قانون کہتے ہیں۔

مختلف وسعتوں کے درمیان اُن رشتوں کو معلوم کیا جا سکتا ہے جو نیچے کی حدودی شرائط کے پابند ہوں۔

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}+\mathbf{E}'') = \mathbf{n}\times\mathbf{E}',$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E} + \mathbf{k}''\times\mathbf{E}'')/\mu_1 = \mathbf{n}\times(\mathbf{k}'\times\mathbf{E}')/\mu_2,$$

یہاں ہم نے مقناطیسی وسعتوں کو برقی میدانوں کی وسعتوں کے لحاظ سے لکھا ہے

ہمارے لیے صرف اس حالت پر غور کرنا کافی ہوگا جس میں $\mu_1 = \mu_2$. $\mathbf{E}$ کی تشریح اختیاری ہے لیکن اسے ہمیشہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنانے والے دو اجزا کے جوڑ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے اور اگر فیز میں کوئی فرق ہے تو اسے $\mathbf{E}$ کو مخلوط لے کر شمار میں لیا جا سکتا ہے۔

(a) جب $\mathbf{E}$ وقوع مستوا کے عمودی ہو: اگر $\mathbf{E}$ وقوع مستوا کے عمودی ہے تو سارے برقی میدان کے ویکٹر سطح کے مماسی ہوں گے اور

$$E_0 + E_0'' = E_0'. \qquad (11\text{–}45)$$

چونکہ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$ غائب ہو جاتا ہے اس لیے دوسری حدی شرط کے تہرے ویکٹر ضرب کے پھیلاؤ سے

$$E_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) + E_0''(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'') = E_0'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'),$$

ملتا ہے، یا شکل 11-2 کے زاویوں کے لحاظ سے

$$E_0\cos\theta - E_0''\cos\theta'' = \frac{u_1}{u_2}E_0'\cos\theta'. \qquad (11\text{–}46)$$

مساوات (11–45) اور (11–46) کو ملانے سے ترسیلی اور انعکاسی وسعتوں کو واضح لہر کی وسعت کے لحاظ سے معلوم کیا جا سکتا ہے:

$$E' = E\frac{2\cos\theta}{\cos\theta + (u_1/u_2)\cos\theta'},$$

$$E'' = -E\frac{(u_1/u_2)\cos\theta' - \cos\theta}{(u_1/u_2)\cos\theta' + \cos\theta} \qquad (11\text{–}47)$$

یہاں اس حقیقت کا استعمال کیا گیا ہے کہ $\theta'' = \theta$, اور زاویہ θ' کو اسنل کے انعطاف قانون کے ذریعہ خارج کیا جا سکتا ہے۔ وسیلہ 2 کی وسیلہ 1 کے لحاظ سے نسبتی انعطافی انڈیکس $u_1/u_2 = n_{21}$, ہے اور نیچے کے نشانوں کے n عام طور سے n_{21} سمجھا جاتا ہے۔

(b) جب $\mathbf{E}$ وقوع کے مستوا میں ہو: اس حالت میں $\mathbf{H}$ حد کے متوازی ہوتا ہے اور اخذ شکلاً بالکل ویسا ہی ہوتا ہے جیسا اوپر دیا ہے۔ صرف

مندرجہ ذیل رشتہ

$$\mathbf{E} = -\mu\omega\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{H}}{k^2}, \qquad (11\text{–}48)$$

جو ایک مستوا لہر کے لیے میکسویل کے رشتوں سے حاصل ہوتا ہے مستقلوں کی کسی قدر مختلف ترتیب دیتا ہے اگر ہم پھر یہ مان لیں کہ دونوں وسیلوں کی سرایت پذیری ایک ہے تو وقوع کے مستوا میں E کے لیے آخری نتائج یہ حاصل ہوتے ہیں :

$$H' = H\frac{2\cos\theta}{\cos\theta + (u_2/u_1)\cos\theta'},$$

$$H'' = -H\frac{(u_2/u_1)\cos\theta' - \cos\theta}{(u_2/u_1)\cos\theta' + \cos\theta}, \qquad (11\text{–}49)$$

مساوات (11-47) اور (11-49) کو فرنیل کے فارمولے کہتے ہیں اور یہ پہلے پہل ایک الاسٹک ایتھر کے مفروضہ سے اخذ کیے گئے تھے۔ ان کا دوسری سہل شکلوں میں استحالہ اور نتیجہ کے طور پر انعکاسی اور انعطافی ضربیوں کا اخذ مسئلوں کے لیے چھوڑ دیے جاتے ہیں۔

اس حقیقت کے، کہ دونوں کا جزا کا یکساں انعکاس اور انعطاف نہیں ہوتا بہت سے دل چسپ نتائج ہیں۔ اوپر دی ہوئی پہلی حالت کے لیے جس میں برقی ویکٹر وقوع مستوا کے عمودی ہے انعکاس ہوگا جب تک کہ $\theta = \theta'$ نہ ہو یعنی جب تک دونوں وسیلوں کی نوری صفات ایک نہ ہوں اگر $\theta + \theta' = 90°$ ہو، یعنی اگر k' اور k'' ایک دوسرے سے عمودی ہوں تو مساوات (11-49) کی منعکس وسعت غائب ہو جاتی ہے۔* وہ وقوع زاویہ جو اس شرط کو پورا کرتا ہے بریوسٹر کا زاویہ یا انقطابی زاویہ کہلاتا ہے اور اسنل قانون کے مطابق اُس کی تعریف یہ ہے :-

$$\tan\theta_0 = u_1/u_2. \qquad (11\text{–}50)$$

* یہ نیچے دیے ہوئے مشق 2، کے فارمولوں سے صاف ظاہر ہے۔

چونکہ اس زاویہ پر منعکس شعاعوں میں صرف وہی جز ہوتا ہے جس کا برقی ویکٹر وقوع مستوا کے عمودی ہوتا ہے اس لیے ڈائیلکٹرک کی پلیٹ یا پلیٹوں کی گڈی کو غیر تقطیب شدہ روشنی سے ایک مستوا تقطیب شدہ لہر پیدا کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

دوسری طرف زاویوں کا ایک پورا رینج ایسا ہو سکتا ہے جس کے لیے روشنی کی ترسیل نہیں ہوتی اگر u_1 سے u_2 بڑا ہے تو انعطاف کا قانون) $\sin\theta'$ کی ایسی قیمتیں دیتا ہے جو اکائی سے بڑی ہوتی ہیں جب θ $\sin^{-1}(u_1/u_2)$ سے بڑا ہو۔ ان حالتوں میں انعکاس کو مکمل کہا جاتا ہے لیکن چونکہ لہر کی وسعتیں کسی حالت میں مخلوط ہو سکتی ہیں اس لیے ہم اس عمل کی جانچ تفصیل سے فرینل کے فارمولوں کا استعمال کر کے کر سکتے ہیں۔ اگر ہم $n = u_1/u_2, (n < 1)$ کا استعمال کر کے θ' کو اسنل کے قانون کے ذریعہ خارج کر دیں تو جب وقوع مستوا کے عمودی ہو تو حالت (a), کے لیے منعکس وسعت مندرجہ ذیل ہو جاتی ہے:

$$E'' = E\frac{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta'\cos\theta'}{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta'\cos\theta'}$$

$$= E\frac{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}, \qquad (11\text{–}51)$$

جہاں یہ حقیقت کہ $\cos\theta' = i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}/n$ قیاسی ہے واضح کر دی گئی ہے۔ مساوات (11–51) سے ظاہر ہے کہ منعکس وسعت جسامت میں واقع لہر کی وسعت کے برابر ہے لیکن ہیئت بدل گئی ہے:

$$E'' = Ee^{-2i\phi}, \qquad (11\text{–}52)$$

جہاں:

$$\phi = \arctan\frac{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta}. \qquad (11\text{–}53)$$

اُس جز کے لیے جس کا برقی ویکٹر وقوع مستوا میں ہے، ہمیں مساوات (11–49) سے:

$$H'' = H\frac{\cos\theta - (i/n^2)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta + (i/n^2)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}$$

$$= He^{-2i\psi}, \qquad (11\text{-}54)$$

ملتا ہے، جہاں

$$\psi = \arctan\frac{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{n^2\cos\theta}.$$

اس طرح اجزا کی ہیئت نا برابر مقداروں میں بدل جاتی ہے اور نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ مستوی تقطیب شدہ اشعاع مکمل طور پر ایسی تقطیب کے ساتھ منعکس ہو جاتی ہے۔ دونوں اجزا کے درمیان ہیئت کا فرق، $2(\phi - \psi)$، وقوع زاویہ اور اضافی انعطافی انڈیکس دونوں پر منحصر ہوتا ہے۔ ایک آسان حساب سے ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ

$$\tan(\phi - \psi) = -\frac{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\sin^2\theta}. \qquad (11\text{-}55)$$

اگرچہ مکمل انعکاس کے لیے ترسیلی ضربیہ صفر ہوتا ہے لیکن دوسرے وسیلے میں لمحاتی میدان غائب نہیں ہوتے۔ یہ حقیقت ہے کہ $\cos\theta$ خالص قیاسی ہے وسیلے کے اندر میدانی شدت کا ایکسپونینشی زوال دیتی ہے۔ دوسرے وسیلہ میں میدان کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر ایک دوسرا زیادہ انڈیکس کا شفاف جسم سطح کے بہت پاس رکھ دیا جائے۔

11-6 چالک وسیلوں میں لہریں اور دھاتوں سے انعکاس

اگر ہم یہ مان لیں کہ وقت کے ساتھ تبدیلی سائن نما ہے تو عام لہری مساوات، مساوات (11-15)، کے حل اسی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں جیسے کہ ترسیلی مساوات، مساوات (11-16)، کے، ہم $\mathbf{E}$ کے کسی عرضی جز کے لیے لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial\zeta^2} = -(\mu\epsilon\omega^2\mathbf{E} + i\omega\mu\sigma\mathbf{E}) = -K^2\mathbf{E}, \qquad (11\text{-}56)$$

جہاں

$$K = \alpha + i\beta = k\sqrt{1 + \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}}. \qquad (11\text{-}57)$$

جب مساوات (11-57) کو K کے حقیقی اور قیاسی حصوں کے لیے حل کیا جاتا ہے تو یہ نتائج ملتے ہیں:

$$\alpha = k\sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\sigma/\epsilon\omega)^2} + 1}{2}},$$

$$\beta = k\sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\sigma/\epsilon\omega)^2} - 1}{2}}. \qquad (11\text{-}58)$$

اس لیے میدان یہ ہیں:-

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)},$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k\mu\omega}(\alpha + i\beta), \qquad (11\text{-}59)$$

جہاں $\mathbf{k}$ پہلے کی طرح z کی سمت میں ہے۔ مساوات (11-59) کے دو پہلو فوراً ظاہر ہو جاتے ہیں: چالکتا لہر کی ایکسپونشنی تقصیر پیدا کر دیتی ہے اور برقی اور مقناطیسی میدان اب ہیئت میں نہیں رہتے۔

ایک ہموار دھات کی سطح پر انعکاس معلوم کرنے کے لیے فرنیل کے فارمولوں کا اطلاق سیدھا ہے لیکن عام طور سے قدرے پیچیدہ نتائج پر پہنچاتا ہے۔ اس تخمینے پر غور کرنا فائدہ مند ہوگا جس میں $\sigma \gg \epsilon\omega$ ہے اور جو زیری خطے کے نیچے سبھی تواتر کے لیے جائز ہے۔ اس حالت میں:

$$K = (1 + i)k\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}} = (1 + i)\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}. \qquad (11\text{-}60)$$

مسئلہ کو آسان بنانے کے لیے مان لیجیے کہ ایک ڈائیلکٹرک میں ایک ہموار لہر ایک چالک کی سطح پر z سمت میں عمودی گرتی ہے۔ تب چالک کے اندر میدان یہ ہوں گے:-

$$E' = E'_0 e^{-\sqrt{(\mu\sigma\omega/2)}\zeta} e^{i(\sqrt{(\mu\sigma\omega/2)}\zeta - \omega t)}$$

$$H' = \frac{B'}{\mu} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}}\, n \times E', \qquad (11\text{-}61)$$

جہاں ہم نے ζ کو حدودی سطح سے ناپا ہے۔ دونوں میدان پیوست ہونے کے ساتھ گھٹتے ہیں اور ایک فاصلہ

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}, \qquad (11\text{-}62)$$

میں جسے کھال کی گہرائی کہتے ہیں گھٹ کر اپنی سطحی قیمتوں کا $1/e$ رہ جاتے ہیں۔ دھیان رکھیے کہ δ صفر کی طرف جاتا ہے جیسے جیسے چالکتا انتہا کی طرف پہنچتی ہے δ صفر کی طرف جاتا ہے۔ اور اونچے تواتروں کے لیے چھوٹا ہوتا جاتا ہے۔ مساوات (11-62) کا بیرونی ادراج لامتناہی تواتروں تک نہیں کیا جاسکتا اور جہاں تخمینہ $\sigma \gg \epsilon\omega$ جائز نہ ہو وہاں مساوات (11-58) سے اخذ کی ہوئی عبارت کو استعمال کرنا ہوگا۔

دھات کے اندر دونوں میدانوں کے درمیان توانائی کی کثافت کا بٹوارہ برابر نہیں ہوتا: برقی توانائی کثافت کا وقتی اوسط اب $\epsilon\overline{E^2}/2$, ہے جبکہ مقناطیسی میدانوں کا متعلقہ اوسط $\sigma\overline{E^2}/2\omega$, ہوتا ہے۔ اس طرح تناسب $\epsilon\omega/\sigma$, ہے جو ہم نے مانا ہے کہ بہت چھوٹا عدد ہے۔ چالک کے اندر برقی توانائی کی کثافت مقناطیسی توانائی کے مقابلے میں ناقابلِ لحاظ ہے اور اچھے چالکوں میں برقی میدان تقریباً بالکل پیوست نہیں ہوتے اسی طرح $\sigma \gg \epsilon\omega$ کی پابندی ہوتی ہے۔

دھات کی سطح "انعکاسی طاقت" آسانی سے نکالی جاسکتی ہے اگر ہم یاد رکھیں کہ منعکس لہر بڑھتے ہوئے منفی ζ, کی طرف سفر کرتی ہے، اس لیے

$$E'' = E''_0 e^{-i(k\zeta+\omega t)},$$

اور پھر یہ شرط عائد کی جائے کہ E اور H دونوں سطح کے پار مسلسل ہیں منعکس توانائی اور واقع توانائی کی نسبت:

$$\left|\frac{E''}{E}\right|^2 = 1 - 2\sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}} \qquad (11\text{-}63)$$

ہوگی۔ اگر $\sqrt{2\epsilon_0\omega/\sigma}$ کی ایک بڑی قوتوں کو نظرانداز کردیا جائے۔

11-7 گروپ رفتار

وہ رفتار u جو لہر مساوات میں اس طرح آتی ہے کہ مستوا لہر کا حل مساوات 11-17 سے ملتا ہے، لہر کی فیز رفتار ہوتی ہے اور انعطافی انڈیکس کی تعریف $n = c/u$. سے کی جاتی ہے۔ اگر انعطافی انڈیکس کا تواتر سے کوئی تعلق نہ ہوتا تو یہی ایک رفتار کام میں آتی۔ لیکن حقیقی وسیلوں میں ڈائیلکٹرک مستقلہ تواتر کا فنکشن ہوتا ہے اور کسی وسیلے میں روشنی کے گذر میں اس کے مختلف فوریر اجزا (Fourier components.) کی فیز رفتار میں فرق کی وجہ سے تبدیلی ہوتی ہے۔

گروپ رفتار کا تصور لہروں کے ایک پلس (pulse) یا لہر کے پیکٹ پر لاگو ہوتا ہے جس کا تواتروں کی ایک پتلی پٹی میں محدود مسلسل اسپیکٹرم ہو، مان لیجیے کہ ایسے پتلے گروپ کے متعلقہ E یا B کے جز کے لیے ہم $\psi(x, t)$ لیتے ہیں، یعنی جس کا اظہار ایک فوریر انٹیگرل :

$$\psi = \int a(k)e^{i(kx-\omega t)}\,dk. \qquad (11\text{-}64)$$

کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔ اگر وسعت $a(k)$ صفر سے مختلف صرف ایک مخصوص تواتر کے آس پاس ہوتا ہے جسے ہم $\omega_1, k_1,$ سے بتا سکتے ہیں تو ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$\psi = A(x, t)e^{i(k_1x-\omega_1 t)}, \qquad (11\text{-}65)$$

جہاں

$$A(x,t) = \int a(k)e^{i[(\Delta k)x-(\Delta\omega)t]}dk, \qquad (11\text{-}66)$$

جبکہ $\Delta\omega = \omega - \omega_1$ اور $\Delta k = k - k_1.$ اگر A آہستہ آہستہ بدل رہا ہے تو گروپ کو نزادیائی تواتر ω_1 کی ایک لہر سمجھا جاسکتا ہے جس کی وسعت A. سے ترسیل ہو رہی ہے رفتار u_0 جس سے A سفر کر رہا ہے وہی ہوگی جس سے

ایک مشاہد سفر کر رہا ہو جس کے لیے وسعت مستقل ہو اس لیے:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}(u_g) = 0, \qquad (11\text{–}67)$$

جس سے

$$u_g = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{A\ \text{constant}} = \frac{-\partial A/\partial t}{\partial A/\partial x} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \to \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_1} \qquad (11\text{–}68)$$

کو پلس کی رفتار مانا جاسکتا ہے۔ یہ مقدار جسے گروپ رفتار کہتے ہیں کئی مختلف کارآمد طریقوں سے لکھی جاسکتی ہے:

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{dk/d\omega}. \qquad (11\text{–}69)$$

دھیان رکھیے کہ u_g کی تعریف ایک مخصوص تواتر کے لیے اس طرح سے کی گئی ہے کہ k_1 کے اوپر اینٹگرل لینے پر وہ فوریرا جزا جن کے تواتر ω_1 سے دور ہیں ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں جب کہ ω_1 کے نزدیک کے اجزا کے اینٹگرل میں ایک دوسرے کی مدد کرتے ہیں جس سے گروپ بنتا ہے۔ اس لیے گروپ رفتار درحقیقت توانائی کی ترسیل کی رفتار ہے۔ اگر فیز رفتار آہستہ آہستہ بدلنے والا تواتر کا فنکشن ہو تو ایک پلس کسی انتشاری وسیلہ میں بنا کسی خاص تبدیلی کے سفر کرے گی؛ لیکن اگر یہ شرط پوری نہیں ہوتی تو گروپ خود بہت زیادہ بدشکل ہو جاتا ہے اور گروپ رفتار کا تصور اس حالت میں جائز نہیں رہتا۔

مجوّزہ حوالے

مستوابرق مقناطیسی لہروں کا بیان بہت سی برقی حرکیات اور طبیعی نوریات کی کتابوں میں اور نظریاتی طبعیات کی عام درسی کتابوں میں دیا رہتا ہے۔ ہماری فہرست میں کچھ بہتر اور زیادہ آسانی سے دستیاب ہو سکنے والی تصنیفات دی گئی ہیں۔

M. Abraham and R. Becker, *Electricity and Magnetism*, Chapter X.

امتیازی طور پر صاف، مستند، کسی قدر ابتدائی

M. Born, *Optik*, Chapter 1.

طبیعی نوریات کی تصنیف میں شاید سب سے زیادہ مکمل اور مستند

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*,

خاص طور سے سیکشن 66 اور 67.

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, Chapter V.

ایک بہت کارآمد بیان جو عام اطلاق کا اور بہت تشریحی ہے۔
کچھ اس سے مختصر بیان ان کتابوں میں ملیں گے

J. H. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*

G. Joos, *Theoretical Physics*.

باب XIX میں غیر سمتی یکساں وسیلوں میں ترسیل پر بحث کی گئی ہے

J. C. Slater and N. H. Frank, *Electromagnetism*.

W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*.

H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons*,

اشعاع کے داب پر نہایت عمدہ بحث ہے

مشق

1. ثابت کیجیے کہ دو مخلوط ویکٹروں کے، جن کا وقت پر انحصار $e^{-i\omega t}$ کے حساب سے ہے، حقیقی حصّوں کے حاصل ضرب کا وقتی اوسط کسی ایک ویکٹر اور دوسرے کے مخلوط زوج کے حاصل ضرب کے حقیقی حصّہ کے نصف سے ملتا ہے۔

2. ثابت کیجیے کہ اُس حالت میں جب برقی ویکٹر واقع مستوا کے عمودی ہو تو فرنیل کے فارمولے یہ ہوں گے :

ترسیلی لہر کے لیے
$$E' = \frac{2\cos\theta\sin\theta'}{\sin(\theta+\theta')}E$$

اور

منعکس لہر کے لیے $E'' = \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)} E$

یہ بھی ثابت کیجیے کہ جب E واقع مستوا میں ہو تو انعکاس کا مساوات مندرجہ ذیل ہوتا ہے:

$$\frac{|E''|}{|E|} = \frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta + \theta')}.$$

3. ایسی لہروں کو لے کر جن کے فرنیل وسعتیں دوسرے ذریعہ میں ہیں ثابت کیجیے کہ مکمل انعکاس کی حالتوں میں ترسیلی ضربیہ غائب ہو جاتا ہے۔

4. ثابت کیجیے کہ عمودی وقوع کی حالت میں انعکاس ضربیہ یا دو ڈائیلکٹرکوں کے درمیان کی سطح سے فی صد منعکس ہوئی روشنی $(n-1)^2/(n+1)^2$ رشتہ سے ملتی ہے جہاں n وسیلہ 2 کا انعطامی انڈیکس وسیلہ کے لحاظ سے ہے۔ ترسیلی ضربیہ کیا ہے؟ ایک شفاف شیشے کی پلیٹ میں سے ترسیل شدہ روشنی کی مقدار کا شیشہ کی انعطامی انڈیکس کے لحاظ سے حساب لگائیے، جب روشنی ہوا میں پلیٹ پر عمودی گر رہی ہے۔

5. ایک مستوا لہر ایک چکنی سطح پر نارمل سے θ زاویہ پر منعکس ہو رہی ہے اشعاع کا داب معلوم کیجیے۔

6. اونچے تواتر کی متبادل کرنٹوں کے لیے ایک چالک تار کی مزاحمت کی اس مزاحمت سے نسبت کا تخمینہ کیجیے جو وہ راست کرنٹوں کے لیے رکھتا ہے۔ نتیجہ کو ریلے کا مزاحمتی فارمولا کہتے ہیں۔

7. مستوا یک رنگی لہریں z محور کے متوازی مثبت اور منفی دونوں سمتوں میں ترسیل ہو رہی ہیں۔ مبدا پر میدانی شدتیں یہ ہیں:

$$E_x = A\cos\omega t, \qquad E_y = 0,$$
$$H_x = 0, \qquad H_y = B\cos\omega t$$

اشعاع کی اوسط شدت کا دونوں سمتوں میں A اور B اور وسیلہ کے مستقلوں کے لحاظ سے حساب لگائیے۔

باب (12)

مقناطیسی میدان میں چالک سیال (مقناطیسی رقیقی حرکیات)

اس سے پہلے کے باب میں ہم نے ایسی لہری حرکتوں پر غور کیا ہے جو بنیادی طور پر برقی اور مقناطیسی توانائیوں کے آپسی تبادل سے تعلق رکھتی ہیں۔ مادّی وسیلے اور ان کی حرکات کی شمولیت صرف اتنی تھی کہ ان کی وجہ سے میدانوں میں ترمیم ہو جائے، لیکن اس حد تک نہیں کہ نظام میں کسی قابلِ لحاظ مقدار توانائی کا اضافہ ہو جائے۔ لیکن اگر مقناطیسی میدانوں کی موجودگی میں زیادہ چالکتا کے سیال ذریعے ہوں تو کرنٹ لے جانے والے ذریعہ کا استمرار اب نا قابلِ لحاظ نہیں رہ جاتا اور ہم کئی ایک بالکل نئے مظہرات سے دوچار ہوتے ہیں جنھیں عام طور سے "مقناطیسی رقیقی حرکیات" کہا جاتا ہے۔

12-1 منجمد قوت خطوط : میدانی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (9\text{–}5)$$

اور اس مساوات پر غور کیجیے جو برقی میدان E اور مقناطیسی ترغیبی میدان B: میں u رفتار سے حرکت کرنے والے وسیلے میں کرنٹ کثافت j دیتا ہے :-

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (9\text{-}19)$$

ان مساواتوں کو ملانے پر ہم پاتے ہیں کہ

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\sigma}\right) \quad (12\text{-}1)$$

اگر چالکتا اتنی زیادہ ہے کہ داہنے طرف کی دوسری رقم ناقابلِ لحاظ ہے تو ہمیں یہ ملتا ہے :-

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (12\text{-}2)$$

وہ شرط جب کہ (12-1) کی دوسری رقم ناقابلِ لحاظ ہو یہ ہے :

$$\left|\frac{\mathbf{j}}{\sigma}\right| \ll |\mathbf{u} \times \mathbf{B}|. \quad (12\text{-}3)$$

اگر نقل کرنٹوں کو چھوڑ دیا جائے تو $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$، اور اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$|\mathbf{B}| \sim \mu_0 L |\mathbf{j}|, \quad (12\text{-}4)$$

جہاں L ایک لمبائی ہے جو نظام کے ابعادوں کا امتیازی خاصّہ ہے۔ اس لیے نا برابری (12-3)

$$R_M = \sigma |\mathbf{u}| \mu_0 L \gg 1, \quad (12\text{-}5)$$

کے مترادف ہے ۔ جہاں R_M ایک ایسی مقدار ہے جسے اکثر عام رقیق حرکیاتی رینالڈ عدد کی مشابہت سے "مقناطیسی رینالڈ عدد" کہتے ہیں جو اسی کی طرح L اور $|\mathbf{u}|$ کے ساتھ خطّی رشتہ رکھتا ہے ۔ عددی مثالوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ لیبوریٹری تجربات میں معمولی چالک اشیا کو استعمال کرنے پر (12-5) کی شرط کو پورا کرنا مشکل ہے ؛ مقناطیسی رقیقی حرکیات کی اہمیت صرف آیَنی گیسوں کی طبیعیات (پلازما طبیعیات) میں ہے یا فلکی اجسام کی طرح کے بڑے چالک نظاموں میں ۔

مساوات (12-2) کی تفسیر آسان ہوجاتی اور اسے ہم سیکشن 9-3 میں ہم نے ایک سطح S میں سے گزرنے والے کل فلکس کے بدلنے کی شرح کے لیے جب کہ سطح وسیلے کے ساتھ u رفتار سے حرکت کر رہی ہو ایک عبارت (9-12) اخذ کی تھی۔ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$ کے ساتھ مساوات (9-12) یہ ہو جاتا ہے:

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\right]\cdot d\mathbf{S}. \tag{12-6}$$

اگر مساوات (12-2) جائز (valid) ہو تو یہ عبارت غائب ہو جاتی ہے۔ اس لیے کسی ایسی سطح میں سے گزرنے والا فلکس مستقل رہتا ہے جو شے کے ساتھ حرکت کرتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ کسی متحرک وسیلے میں جس کا مقناطیسی رینالڈ عدد کافی بڑا ہو، مقناطیسی "خطوط، منجمد" رہتے ہیں۔

اگر نابرابری (12-5) کی پابندی نہیں ہوتی تو مادّی حرکت کا اثر غالب نہیں رہتا اور B تب نفوذی قسم کے مساوات کی تعمیل کرتا ہے جس پر بحث سیکشن 11-1; میں کی گئی ہے۔

$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{12-7}$$

خطوں کا وسیلے میں نفوذ جس کی پیشین گوئی یہ مساوات کرتا ہے، وقت τ_D میں ہوتا ہے جس کی قدر کا درجہ

$$\tau_D \sim \mu\sigma L^2, \tag{12-8}$$

ہے۔ جہاں L پھر ایک لمبائی ہے جو نظام کے ابعادوں کا امتیازی خاصہ ہے وقت τ_D وہ وقت ہے جو شے کو میدان کے پار لے جانے میں اومی خساروں (ohmic losses) کے ذریعے توانائی فرق کے اسراف کے لیے درکار ہے وقت τ_D کا موازنہ اس وقت سے کرنا سبق آموز ہوگا جو وسیلے کو فلکس خطوط کو پار کرنے میں لگتا ہے۔ اگر مقناطیسی رینالڈ عدد بڑا ہو۔ حرکت کا مساوات:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_v, \quad (12\text{-}9)$$

ہوگا، جہاں ρ_m کثافت ہے p داب ہے اور $\mathbf{F}_v$ خارجی حجمی قوتوں کے لیے رکھا گیا ہے مثلاً ارضی مادی کشش یا فی اکائی حجم لزوجی روک قوت۔ مساوات (9-19) سے

$$\rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \sigma[\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{u}B^2 + \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})] - \nabla p + \mathbf{F}_v. \quad (12\text{-}10)$$

برقی میدان اور میکانکی داب کے گریڈینٹ اور قوت کی موجودگی میں قوت خطوط کے آرپار عرضی رفتار $u_\perp$ مندرجہ ذیل مساوات سے ملتی ہے۔

$$\rho_m \frac{du_\perp}{dt} = -\sigma u_\perp B^2. \quad (12\text{-}11)$$

فلکس خطوں کے ساتھ "وابستہ" میکانکی کثافت ρ_m کی روک "کی وجہ سے میدان اور مادہ کے درمیان کوئی عرضی اضافی حرکت کا وقت مستقلہ τ_t سے زوال ہوتا ہے جس کی عبارت مندرجہ ذیل ہے:

$$\tau_t = \frac{\rho_m}{\sigma B^2}. \quad (12\text{-}12)$$

اس طرح میدان $\mathbf{B}$ کا اثر ایک بڑی مقناطیسی "لزوجیت" پیدا کرنا ہے جو فلکس خطوط کے عرضی کسی حرکت کو ضائع کرنے کا کام کرتی ہے۔

اگر مقناطیسی خطوط مکمل طور پر سیال میں "منجمد" ہیں جیسا کہ $\sigma \to \infty$، کی انتہائی حالت میں ہوتا ہے تو رقیق پر لگنے والی رقیق سکونی اور رقیق حرکی قوتوں میں مساوات (10-32) کے مقناطیسی زور ٹینسر سے اخذ کی ہوئی قوتیں اور جڑ جائیں گی یعنی قوت خطوط کی سمت میں $B^2/2\mu_0$ اور رقیقی سکونی داب (ہمہ سمتی) $B^2/2\mu_0$ کے مترادف ہے۔ مساوات (12-9) اب

$$\rho_m \frac{du_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{B_\alpha B_\beta}{\mu_0} + \left(-p - \frac{B^2}{2\mu_0}\right)\delta_{\alpha\beta}\right] + F_{v_\alpha}. \quad (12\text{-}13)$$

ہو جاتا ہے۔ ہم یہاں پر اس مساوات کے بہت سے حلوں پر بحث نہیں کریں گے جن میں سے کچھ پلازما طبیعیات میں اور فلکی نظاموں کے مطالعہ کے لیے بہت کام کے ہیں۔

12-2: مقناطیسی رقیق حرکیاتی لہریں

اگر "منجمد خطوط" کی شرط پوری ہوتی ہو تو ایک نئی قسم کی لہری حرکت کی توقع کی جا سکتی ہے۔ کیفی طور پر اسے ہم بار دار ڈوری پر لہروں کے نظریے کی مشابہت سے سمجھ سکتے ہیں؛ اکائی عرضی تراش کی ہر ایک قوت نلی ایک میکانکی مادی کثافت ρ_m فی اکائی لمبائی سے "لدی" ہوتی ہے اور ایک کھنچاؤ B^2/μ_0 کے زیر اثر ہوتی ہے (اس پر ایک سکونی رقیقی داب $B^2/2\mu_0$ بھی لگا ہوا ہے) اس کے مطابق ہمیں ایک لہری حرکت کی توقع کرنی چاہیے جس کی فیز رفتار v_M سے ترسیل ہوتی ہے جسے تقریبی طور پر مندرجہ ذیل عبارت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$v_M = \left[\frac{(B^2/\mu_0)}{\rho_m}\right]^{1/2} = \frac{B}{(\mu_0\rho_m)^{1/2}} \tag{12-14}$$

لہریں قوت خطوط کی سمت میں ترسیل ہوتی ہیں۔ ان لہروں کا تفصیلی نظریہ نہایت پیچیدہ ہے لیکن ایک آسان طریقے سے بہت سے امتیازی پہلو ظاہر ہو جاتے ہیں۔ ہم اپنی توجہ صرف نہ دبنے والے رقیقوں تک محدود رکھیں گے۔ اور سبھی اسرافی (dissipative) رقموں کو چھوڑ دیں گے یعنی صرف صفر کثافت اور لا متناہی چالکتا لیں گے۔

ان مفروضات کے تحت تفرقی مساواتیں یہ ہیں؛

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \tag{12-15}$$

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_m(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla(p + \psi) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \tag{12-16}$$

جہاں کسی خارجی حجمی قوت F_v کو ایک مضمر توانائی ψ سے ماخوذ ظاہر کیا گیا ہے۔

آیئے ہم مان لیں کہ ایک یکساں مقناطیسی میدان $\mathbf{B}_0$ موجود ہے

اور مان لیجیے کہ b ترسیل ہونے والا اضطراب ہے، یعنی:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}. \qquad (12\text{–}17)$$

میدان $\mathbf{B}_0$ مستقل ہے اور ایسی سمت میں ہے جسے ہم سمتی قدروں کی شاخ مان سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات (12-16) غیر خطی ہے؛ اس لیے عام طور سے مختلف سمتوں میں سفر کرنے والی اور مختلف قطبیت رکھنے والی لہریں ایک دوسرے پر اثر انداز ہوں گی۔ پہلے ہم اس آسان حالت پر (جو چاہے مکمل طور سے حقیقی نہ ہو) غور کریں گے جس میں لہر z کے مثبت سمت میں ترسیل ہو رہی ہے اور جس میں b اور u عرضی ہیں اور مستوا تقطیب شدہ ہیں۔

مساوات (12-15) یہ ہو جاتا ہے:

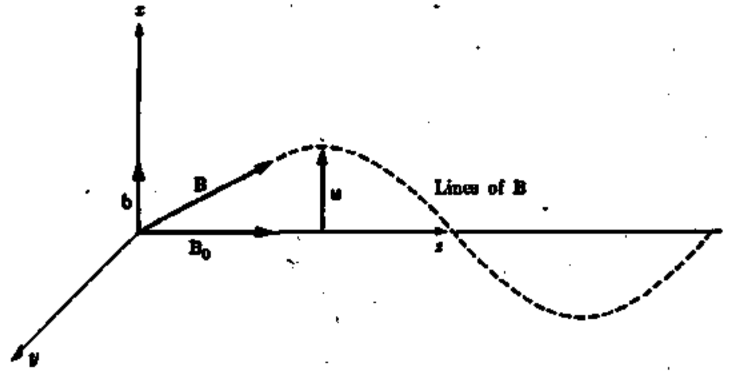
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \qquad (12\text{–}18)$$

اس لیے b اور u ایک ہی مستوا میں تقطیب شدہ ہیں جیسا شکل 12-1. میں دکھایا ہے۔ چونکہ آپریٹر ∇ کا ایک جزو صرف z کی سمت میں ہے اس لیے مساوات (12-16) اب

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla\left(p + \psi + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}. \qquad (12\text{–}19)$$

ہو جاتا ہے۔ دھیان دیجیے کہ $B^2/2\mu_0$ ایک مزید داب کی شکل میں رونما ہوا ہے۔ مساوات (12-19) کا عرضی حصہ صرف یہ ہے:

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}, \qquad (12\text{–}20)$$



[شکل 12-1. مقناطیسی رقیقی حرکیاتی لہروں کی وسعتیں]

جسے مساوات (12-18) کے ساتھ ملانے پر

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial z^2} - \frac{\rho_m \mu_0}{B_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} - \frac{\rho_m \mu_0}{B_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0. \qquad (12\text{-}21)$$

ملتا ہے۔ یہ ایک ابعادی لہری مساوات معلوم ہوتا ہے جس کی فیز رفتار مساوات (12-14) سے ملتی ہے جس میں B کی جگہ B_0 رکھ دیا گیا ہے۔ لیکن یہ یاد رکھنا ہوگا کہ مساوات (12-21) جزوی تفرقی ماخذ پر مشتمل ہے اور یہ کہ بنیادی مساوات سہ ابعادی ہے۔ دراصل ایک واحد تواتر کے لیے مساوات (12-21) کا عام حل یہ ہے :

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{i(k_z z - \omega t)}, \qquad (12\text{-}22)$$

جہاں

$$k_z^2 = \frac{\rho_m \mu_0}{B_0^2}\omega^2 = \frac{\omega^2}{v_M^2}. \qquad (12\text{-}23)$$

اس لیے فیز رفتار یہ ہے :

$$u_p = \frac{\omega}{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}} = \frac{v_M}{\{1 + [(k_x^2 + k_y^2)/k_z^2]\}^{1/2}}, \qquad (12\text{-}24)$$

جو عام طور سے v_M کے برابر نہیں ہے ز وسیلہ بے شک غیر ہم سمتی ہے۔

گروپ رفتار کا ہ جزو بمطابق مساوات (11-69) اس سے ملتا ہے:

$$v_{ga} = \frac{d\omega}{dk_a},$$

اس لیے

$$v_{gz} = v_M, \qquad v_{gy} = v_{gz} = 0. \qquad (12\text{-}25)$$

اس لیے لہری محافذ اور گروپ رفتار کے ویکٹر عمودی نہیں ہیں؛ گروپ رفتار (اور ترسیل توانائی بھی) ہمیشہ B_0 کی سمت میں رہتے ہیں۔

اوپر کی بحث میں یہ مان لیا گیا ہے کہ مقناطیسی رقیقی حرکیاتی لہر کی تقطیب واحد ہے اور ایک ہی ترسیلی سمت بھی ایک ہے، جیسا کہ پہلے کہا جا چکا ہے، مساواتوں کی غیر خطی صفت ظاہر کرتی ہے کہ اس طرح کا حل حقیقی نہیں ہے۔ اس مفروضہ کے بغیر تفرقی مساوات (12-15) اور (12-16) کو لہر مساوات کے (12-21) کے قریبی مانا جا سکتا ہے اگر یہ مان لیا جائے کہ رہنما مقناطیسی میدان کا اضطراب چھوٹا ہے۔ یعنی

$$|\mathbf{b}| \ll |\mathbf{B}_0|. \qquad (12\text{-}26)$$

اس لیے ہم b اور u کو چھوٹی مقداریں مانیں گے اور ان کے حاصل ضرب کو نظر انداز کر دیں گے مساوات (12-15) اب

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \qquad (12\text{-}27)$$

ہو جاتا ہے۔ کیونکہ u کا ڈائیورجنس نہ دبنے والے رقیق کے لیے صفر ہوتا ہے۔ چونکہ

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \cong -\nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{b},$$

اس لیے مساوات (12-16) یہ ہو جاتا ہے:

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla\left[p + \psi + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b})\right] + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{b}. \qquad (12\text{-}28)$$

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\nabla[p + \psi + (B_0 \cdot b)/\mu_0]$ غائب ہو جاتا ہے۔ اس کے لیے دلیل یہ ہے۔ مساوات (12-28) کی باقی دو رقموں کا ڈائیورجنس صفر ہے کیونکہ نہ دب سکنے والے ایک رقیق کے لیے ρ_m مستقل ہوتا ہے اور $\nabla \cdot u = 0$؛ اس کے علاوہ $\nabla \cdot b = 0$۔ اس لیے $\nabla^2[p + \psi + (B_0 \cdot b)/\mu_0]$ غائب ہو جاتا ہے۔ دوسری طرف اضطراب کے خطّہ کے باہر $b = 0$ اور $\nabla p = -\nabla\psi$ تاکہ سیال تعادل کی حالت میں رہے۔ اس طرح فنکشن $[p + \psi + (B_0 \cdot b)/\mu_0]$ ایک محدود کرنے والی سطح پر غائب ہو جاتا ہے اور وہ ہارمونک بھی ہے۔ سیکشن 1-1 کے مصدقوں کے مطابق اس کا گریڈینٹ ہر جگہ غائب ہونے والا ہوگا۔ اس لیے دونوں مساوات یہ ہو جاتے ہیں:

$$\mu_0\rho_m \frac{\partial u}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla)b, \qquad (12\text{-}29)$$

اور

$$\frac{\partial b}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla)u. \qquad (12\text{-}27)$$

اگر B_0 کو محور z کی سمت میں لیا جائے تو مساوات (12-29) اور (12-27) جو مساوات (12-18) اور (12-20) کے مماثل ہو جاتے ہیں۔ ایسی حالت میں لہر مساوات (12-21) ملتا ہے۔

ابھی تک ہم نے سبھی اسرافی اثرات کو چھوڑ دیا ہے۔ آیئے اب ہم ایک محدود چالکتا کے اثر کا اندازہ لگائیں جس کو سارے وسیلے میں یکساں مان لیا گیا ہے۔ چونکہ نفقل کرنٹ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے اس لیے رشتہ

$$\nabla \times \left(\frac{j}{\sigma}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \frac{B}{\mu_0\sigma}\right) = -\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2 B \qquad (12\text{-}30)$$

رشتہ $\nabla \times B = \mu_0 j$ اور B کے صفر ڈائیورجنس سے حاصل ہوتا ہے۔ تب مساوات (12-1) پر غور کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ایک مزاحمت کو حساب میں لینے کا اثر یہ ہے کہ b کی لہر مساوات میں ایک مزید رقم جڑ جاتی ہے

جس میں $\nabla^2(\partial B/\partial t) = \nabla^2(\partial B/\partial t)$ شامل ہے۔

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = v_M^2 \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right). \qquad (12\text{-}31)$$

یہ مساوات جس میں x y اور z کے بھی تفرّقی ماخذ شامل ہیں اس طرح کے اضطرابوں سے مطابقت رکھتا ہے جو z کی سمت میں سفر کرنے کے ساتھ ساتھ باہر پھیلتے جاتے ہیں۔ اس نفوذ کے لیے مطلوبہ وقت τ_D کے درجہ کا ہے جو مساوات (12-8) میں دیا ہوا ہے اس لیے اُن لہروں پر جو "منجمد" خطوں کی سمت میں جاتی ہیں کوئی قابلِ لحاظ اثر نہیں ہوتا اگر ان کا تواتر $1/\tau_D$ کے مقابلہ میں زیادہ ہو۔

مجوّزہ حوالے

یہاں جن حوالوں کی فہرست دی گئی ہے اُن میں اوپر دیے کچھ بنیادی نقطوں پر بحث ہے اور ساتھ ہی شمسی دھبّوں کے نظریہ، ارضی مقناطیس کے نظریہ، تبادل پذیر ستارے اور مقناطیسی میدان میں بہت زیادہ آئینائی گیسوں کے رویہ کے متعلق بہت سے اطلاقوں پر بحث کی گئی ہے۔

H. Alfven, *Cosmical Electrodynamics.*

T. G. Cowling, *Magnetohydrodynamics.*

W. M. Elsasser, *Rev. Modern Phys.* 28, 135 (1956).

زمین کے کور کی مقناطیسی رقیقی حرکیات اور اُس کے ارضی مقناطیسیت کے رشتے پر ہوئے کام پر تبصرہ۔ علاوہ اس کے مقناطیسی رقیقی حرکیات پر ایک عمدہ عام بحث ہے۔

L. Spitzer, Jr., *Physics of Fully Ionized Gases.*

S. Chandrasekhar, *Plasma Physics.*

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media.*

باب VIII بنیادی مقناطیسی سیالی حرکیات کی جس میں دھکا پریا اور ہنگامی بہاؤ شامل ہیں ایک تشریحی بحث پر مشتمل ہے۔

مشق

1 ۔ مساواتِ تسلسل اور مساوات (12-2) سے دکھایئے کہ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho_m}\right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho_m}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}.$$

۲ ۔ مساوات (12-13) کو مساوات (12-9) اور میکسویل کی مساواتوں سے اخذ کیجیے۔

باب (13)

دھاتی حدود کی موجودگی میں لہریں

اس سے پہلے کہ ہم اشعاع کے نظریے کو لیں جو برقی مقناطیسی لہروں کی ابتدا کی جانچ اُن کے ماخذ کے لحاظ سے کرتی ہے، ہم مختلف جیامٹریائی حدود رکھنے والے خطوں میں متجانس لہر مساوات کے حلوں پر مزید غور خاص طور سے ایسے خطوں کے لیے کریں گے جو چالکوں سے گھرے ہوئے ہیں۔ حدودی قیمت کا مسئلہ بہت نظریاتی اہمیت کا ہے اور اس کے بہت سے عملی برقی مقناطیسی اطلاق ہیں خاص طور سے اسپیکٹرم کے مائکرو لہر خطہ میں۔ یہاں ہمارا تعلق اطلاقوں سے نہ ہو کر ان اصولوں سے ہوگا جن پر کہ وہ مبنی ہیں۔

یہاں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جب چارج اور کرنٹ نہ ہوں تو رواجی مضمروں کے استعمال سے عام طور سے کوئی خاص فائدہ نہیں ہوتا۔ میدانوں سے براہِ راست ہی کام کرنے میں اتنی ہی سہولت ہے لیکن یہ یاد رکھنا ہوگا کہ وہ بے تعلق نہیں ہیں کیونکہ ان کو میدانی مساواتوں کی پابندی کرنا ہوگی۔ درحقیقت خم خطی سمتی قدروں میں میدانوں کو سب سے زیادہ سادہ طریقے سے "عظیم مضمروں" ("superpotentials,") کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لیکن ان مخصوص فنکشنوں کا رشتہ مخصوص میدانی اجزا سے آسانی سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ دو غیر منحصر میدانی اجزا مضمروں کا رول ادا کرتے ہیں جن سے پورے میدانوں کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔

13-1 **دھات کی حدودی شرطوں کی فطرت:** آیئے ہم وسیلہ 1 اور

وسیلہ 2 کے درمیان کی سطح پر میدانی ویکٹروں پر عائد عام حدودی شرائط کا تبصرہ کریں :

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=\tau,$$
$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0,$$
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)=0,$$
$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\mathbf{K}, \qquad (13\text{-}1)$$

جہاں τ سطحی چارج کثافت کے لیے لکھا گیا ہے جس سے چالکتا کا گمان نہ ہو اور $\mathbf{K}$ سطحی کرنٹ کثافت ہے۔ حسب معمول $\mathbf{n}$ ایک سطح کے عمودی اکائی ویکٹر ہے جس کی سمت وسیلہ 2 سے وسیلہ 1 کی سمت میں ہے۔ ہم نے سیکشن 6-11 میں دیکھا ہے کہ عمودی وقوع کی حالت میں ایک برقی مقناطیسی لہر ایک اچھے چالک کی سطح کے اندر بہت تیزی سے گھٹتی جاتی ہے اور یہ کہ سطح پر $\mathbf{H}$ کا مماسی جز بڑا ہو سکتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ کا جز کامل چالکتا کی حالت میں غائب ہو جاتا ہے۔ آیئے ہم عمودی جز کے رویہ پر نظر ڈالیں۔

مان لیجیے کہ وسیلہ 2 ایک عمدہ چالک ہے جس کے لیے $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$، جب کہ وسیلہ 1 ایک مکمل حاجز ہے۔ سطحی چارج τ کا چالک کے اندر کرنٹوں کے ساتھ کوئی رشتہ ہوگا۔ دراصل چارج کی برقراریت کا تقاضا ہے کہ

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}=\partial\tau/\partial t=-i\omega\tau.$$

لیکن $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{n}\cdot\sigma\mathbf{E}_2$، اور اس لیے ہم (13-1) مساواتوں کے پہلے مساوات سے پاتے ہیں کہ

$$\left(1-\frac{i\omega\epsilon_2}{\sigma}\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_2=-\frac{i\omega\epsilon_1}{\sigma}\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1. \qquad (13\text{-}2)$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے جیسے چالکتا لامتناہیہ کی طرف جاتی ہے چالک کے اندر $\mathbf{E}$ کا عمودی جز بھی کم ہو کر غائب ہونے کے برابر ہو جاتا ہے، اور حقیقی سطحی چارج کی موجودگی میں سطح پر اس میں سلسلہ شکنی آجاتی ہے۔ دوسری طرف $\mathbf{B}$ کا عمودی جز سطح کے پار مسلسل ہوتا ہے۔

اگر ایک کامل چالک کے اندر E غائب ہو جاتا ہے تو E کا کرل بھی غائب ہو جاتا ہے اور اس کی مطابقت میں B کی وقتی تبدیلی کی شرح بھی صفر ہو جاتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ اس طرح کے چالک کے اندر کوئی بھی اہتزازی میدان نہیں ہیں اور یہ کہ باہر کی میدانی حدودی قیمتیں درج ذیل رشتوں سے ملتی ہیں:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\mathbf{D} &= \tau, \\ \mathbf{n}\times\mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{n}\times\mathbf{H} &= \mathbf{K}. \end{aligned} \qquad (13\text{–}3)$$

اس طرح ایک کامل چالک کی سطح پر برقی میدان عمودی ہوتا ہے اور مقناطیسی میدان مماسی۔ اچھے چالکوں کے لیے یہ شرائط خارجی میدانوں کی جیامٹریائی تشکیلوں کا بہت اچھا اظہار دیتی ہیں لیکن حقیقی میدانوں کے کچھ اہم پہلوؤں کو بالکل نظرانداز کر دیتی ہیں جیسے کہ جوفوں (cavities) میں خسارے اور ترسیل شدہ لہروں میں سگنل کا تخفیف۔

خساروں کا اندازہ لگانے کے لیے یہ دیکھنا فائدہ مند ہوگا کہ $1/\sigma$ کے لیے پہلا تخمینہ لینے پر مماسی اور عمودی میدانی اجزا نسبتاً کتنے ہو جاتے ہیں E کا مماسی جزو بالکل مسلسل ہوتا ہے اس لیے سیکشن 11-6, کے مطابق چالک کی سطح پر

$$\mathbf{H} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}}\,\mathbf{n}\times\mathbf{E} \qquad (13\text{–}4)$$

اب ہم بلا مکمل حل دریافت کیے یہ مان لیتے ہیں کہ ایک لہر کی جس کا H تقریباً بالکل مماسی ہے اور E تقریباً بالکل عمودی ہے، دھات کی سطح کے سمت میں ترسیل ہوتی ہے۔ اگر ترسیلی ویکٹر کا جزو سطح کی سمت میں k ہے تو سطح کے ٹھیک باہر

$$|\mathbf{H}_{\parallel}| \simeq \frac{k}{\mu\omega}|\mathbf{E}_{\perp}|. \qquad (13\text{–}5)$$

مساوات (13-4) کے مطابق H کے مماسی جزو کے ساتھ ایک چھوٹا $\mathbf{E}_{\parallel}$ کا مماسی

جز بھی ہوتا ہے ۔ان دونوں عبارتوں کا موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ :

$$\frac{|E_{\parallel}|}{|E_{\perp}|} \simeq k\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} = \frac{\delta}{\lambda}, \tag{13-6}$$

اور E کے مماسی جز کی اس کے عمودی جز سے نسبت کا درجۂ جسامت وہی ہے جو کھال کی گہرائی کو لہرلمبائی سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے ۔ یہ آسانی سے دکھایا جاسکتا ہے کہ H کے عمودی جز کی نسبت اس کے مماسی جز سے اُتنے ہی جسامت کی ہے لیکن خساروں کا اندازہ لگانے کے لیے ہماری دلچسپی E کے مماسی جز میں ہوگی ۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اونچی چالکتا کی انتہائی حالت میں جس کا مطلب کھال کی گہرائی غائب ہونا ہے کوئی میدانی چالک کے اندر پیوست نہیں ہوسکتا اور حدودی حالت ٹھیک وہی ہونگے جو مساوات (2-13) دیتا ہے ۔ ہم انھیں حدودی شرائط کے ساتھ متجانس لہرمساوات کے حلوں کو معلوم کرنے کی کوشش کریں گے ۔

13-2 لہرمساوات کے آئگن فنکشن اور آئگن قیمتیں

کارتیسی سمتی قدروں میں ویکٹر لہرمساوات محض تین اسکیلر مساواتوں کا ایک سٹ ہے ۔ ویکٹر کے ہر مستطیلی جز کے لیے ایک ۔ دوسرے سمتی قدروں کے نظاموں میں مسئلہ زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے لیکن ہم دیکھیں گے کہ کم سے کم سلنڈری اور کرّ دی قطبی سمتی قدروں میں میدانوں کو اسکیلر فنکشنوں کے لحاظ سے لکھا جاسکتا ہے ۔ ہمارا مسئلہ اس مساوات کو حل کرنا ہے جس کی شکل مندرجہ ذیل ہے :-

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{13-7}$$

جہاں E یا H, کے ایک جز کو Ψ اس طرح ظاہر کرتا ہے کہ چند حدودی شرائط کی پابندی ہو ۔

لاپلاس مساوات کے برعکس مساوات (7-13) اپنے آزاد متغیروں میں متشاکل نہیں ہے ؛ وقت کے لحاظ سے دوسرے تفرّقی اخذ کا نشان

فضائی تفرق، اخذوں کے نشان کے برخلاف ہے۔ اس کے نتیجہ کے طور پر ممکن حلوں کی فطرت میں سکونی مضری مسئلوں سے ایک بنیادی طبیعی فرق ملتا ہے: ایک ڈھکے ہوئے بند ماخذ سے پاک خطہ میں اب پورے طور سے اہتزازی حل ہو سکتے ہیں جب کہ مثال کے طور پر ایک ارضیدہ چالک کے اندر سکونی میدان سب جگہ صفر ہوگا۔

عبارت

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)T(t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t}, \qquad (13\text{-}8)$$

میں فنکشن $T(t)$ کا وقت پر انحصار سادہ ہارمونک مان سکتے ہیں، جہاں صرف فضائی متغیروں کا فنکشن ہے اور نیچے کے تفرقی مساوات کی پابندی کرتا ہے:

$$\nabla^2\psi = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi = -k^2\psi. \qquad (13\text{-}9)$$

مستطیلی سمتی قدروں میں ہم $\psi = X(x)Y(y)Z(z)$, رکھ سکتے ہیں۔ الگ کرنے پر یہ ملتا ہے:

$$X'' + k_1^2X = 0,$$
$$Y'' + k_2^2Y = 0, \qquad (13\text{-}10)$$
$$Z'' + k_3^2Z = 0,$$

ساتھ ہی

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 = \omega^2/c^2. \qquad (13\text{-}11)$$

مساوات (13-11) سے ظاہر ہوتا ہے کہ فاصل مستقلوں کی تعداد توقع سے زیادہ نہیں ہے یعنی چار آزاد متغیروں کی مطابقت سے فاصل مستقلے تین ہیں مساواتوں (13-10) کو یا دوسرے سمتی قدریں نظاموں میں ان کی مطابقت کے مساواتوں کو ان حدودی شرائط کے تحت حل کرنا ہوگا جو میدانی جز پر عائد ہیں جس کا اظہار اسکیلر فنکشن ψ سے ہوتا ہے یا جو اس کے ساتھ رشتہ بند ہے۔

آیئے ہم اس مسئلے کو زیادہ عام نقطہ سے دیکھیں (13-10) مساواتوں میں سے ہر ایک نیچے لکھی عمومی شکل کی ایک سادہ مثال ہے:۔

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]X = 0, \qquad (13\text{–}12)$$

جہاں λ ایک پیرامیٹر ہے جو یہاں فاصل مستقلہ ہے۔ حلوں کے لیے ضروری ہے کہ وہ سارے وقفہ $a \le x \le b$ کے دوران مسلسل اور محدود رہیں اور $x = a, x = b$ پر چند حدودی شرائط کے پابند ہوں۔ [غیر واضح فنکشنوں $p(x), q(x), r(x)$, کی ماہیت کے متعلق ہمیں صرف یہ مان لینے کی ضرورت ہے کہ وہ ایسے ہیں جو اس وقفہ کے اندر کوئی ندرت شامل نہیں کرتے اگرچہ حدوں پر ندرتیں ہوسکتی ہیں] عام طور سے حدودی شرائط کی پابندی λ کی کنہیں قیمتوں سے اور λ کی ان قیمتوں کے مطابقت کے مساوات (12-13) کے مخصوص حلوں سے ہی ہوسکتی ہے۔ λ کی جن قیمتوں کی اجازت ہے انھیں آئگن قدریں کہتے ہیں اور جن حلوں کی اجازت ہے انھیں آئگن فنکشن کہتے ہیں۔ آپ نے یہ پہچان لیا ہوگا کہ متغیروں کے الگاؤ کے طریقے کا سکونی مضمری مسئلوں پر اطلاق کرتے وقت ہم اس ایک ابعادی مسئلہ سے پہلے دوچار ہوچکے ہیں۔ لیکن یہاں پورے ہی سہ ابعادی مسئلہ کے حل میں آئگن قیمت والے اوصاف ہوسکتے ہیں جن کا تعلق تواتر سے ہو۔

بحث کو آسان بنانے کے لیے آیئے ہم پہلے اس حالت پر غور کریں جس میں $q(x) = 0$، $r(x) = 1$ ان شرائط کے تحت ہے کہ وقفہ کے سروں پر $X(x) = 0$ ہے۔ مساوات (12-13) یہ ہوجاتا ہے:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right] = -\lambda X. \qquad (13\text{–}13)$$

مساوات (13-13) سے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر $x = a$, پر ہمارا حل $X(x)$ برابر صفر کے ہو تو یہ اسی شرط کو $x = b$ پر کبھی پورا نہیں کرسکتا اگر λ منفی ہو کیونکہ اس حالت میں اگر یہ اپنی صفر قیمت سے ایک بار ہٹنا شروع کردے تو برابر ہٹتا ہی جائے گا، لیکن λ کی مثبت قیمتوں کے لیے خمی کا نشان $X(x)$ کے مقابلہ میں اُلٹا ہے اور λ کی کسی خاص قیمت کے لیے فنکشن x محور

پر ٹھیک b پر پھر واپس آجائے گا۔ اگر λ کی قیمت اور بڑھا دی جائے تو ایسا کرنے سے $X(x)$ کا نشان b پر پہنچنے سے پہلے ہی بدل جائے گا لیکن λ کو بڑھاتے جانے پر ہم ایک ایسی قیمت پر پہنچیں گے جس کے لیے $X(x)$ پھر $x = b$ پر صفر ہو جائے گا لیکن اس بار وقفہ $a \leq x \leq b$ کے بیچ میں ایک مرتبہ صفر قیمت آئے گی۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ λ کی ایک کمترین حد ہے اور آئگن قیمتوں کا اظہار $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ سے کیا جا سکتا ہے جہاں زیریں عدد وقفہ میں صفروں کی تعداد بتاتے ہیں۔

مساوات (13-12) کی زیادہ عام حالت کے لیے اس پوری دلیل کو دہرایا جا سکتا ہے سوا اس فرق کے کہ خمی کے نشان کا انحصار $q(x)$ اور $r(x)$ پر ہوگا۔ اب بھی λ کی جن قیمتوں کی اجازت ہے ان میں ایک کم ترین قیمت ہوگی، لیکن تفرقی مساوات میں $X(x)$ کے پورے ضربیہ کے نشان سے خمی کا تعین ہوگا۔ مثال کے طور پر جب بیسل کا مساوات اس شکل میں لکھنے پر

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_n}{dr}\right) + \left(k^2r - \frac{n^2}{r}\right)J_n = 0$$

ہو جاتا ہے۔ اور خمی اس طرح کی نہیں ہوگی کہ فنکشن کو واپس x محور کی طرف لے آئے جب تک کہ $k^2r > n^2/r$ نہ ہو۔

اگر حدودی شرائط ایسی ہیں کہ یا تو $X(x)$ یا اس کا پہلا تفرقی اخذ وقفہ کے سروں پر لازمی صفر ہو جاتا ہے تو مساوات (13-12) کے آئگن فنکشن وقفہ کے اوپر عمودی ہوں گے۔ مان لیجیے کہ X_n اور X_m کوئی دو ممکن حل ہیں جو پیرامیٹر کی دو آئگن قیمتوں λ_n اور λ_m سے مطابقت رکھتے ہیں ان کا آرتھوگونل ہونا ثابت کرنے کے لیے مان لیجیے کہ X_n والے مساوات کو X_m سے اور X_m والے مساوات کو X_n سے ضرب دے کر ایک کو دوسرے میں سے گھٹا دیا جائے اور سارے کا انٹیگرل وقفہ کے اوپر لے لیا جائے چونکہ یا تو سب X فنکشن یا اُن کے تفرقی اخذ حدوں پر غائب ہو جاتے ہیں نتیجہ یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^a r(x) X_m X_n \, dx = 0. \qquad (13\text{-}14)$$

فنکشن $r(x)$ کو اکثر ریاضیاتی تصنیفات میں "وزن فنکشن" کہا جاتا ہے۔

اگر λ کی کسی مخصوص قیمت کے لیے ایک سے زیادہ حل کی اجازت ہو تو مسئلہ کو فاسد کہتے ہیں اور λ کی اس قیمت کی مطابقت کے آزاد حلوں کی تعداد کو فساد کا درجہ کہا جاتا ہے۔ اس حالت میں مساوات (13-14) عمودیت ظاہر نہیں کرتی یعنی $n \neq m$ کے لیے λ_m برابر ہو سکتا ہے λ_n کے۔ پھر بھی حلوں کو اس طرح چنا جا سکتا ہے کہ وہ عمودی ہوں۔ یہ اس حقیقت کی وجہ سے ممکن ہے کہ دیے ہوئے λ کے لیے آزاد حلوں کا کوئی خطی ترکیب بھی ایک حل ہوتا ہے اور یہ خطی ترکیبیں اس طرح پر بنائی جا سکتی ہیں کہ ایک دوسرے کے لیے عمودی ہوں۔ ان عمودی خطی ترکیبوں میں ضربیوں کا چناؤ یکتا نہیں ہوتا لیکن عام طور سے اس طرح کیا جاتا ہے کہ آخری حل نظام کے کسی آسانی سے شناخت کیے جانے والے طبعی وصف سے مطابقت رکھتا ہو۔ بہرحال یہ مان کر کہ تمام فاسد λ' عمودی ہیں ہم ہمیشہ آزاد حلوں کو عمودی کہہ سکتے ہیں۔ کسی سمتی قدری نظام میں جس میں لہر مساوات کو الگ الگ کیا جا سکتا ہے، فنکشن ψ، $X(x)$ کی طرح کے مفرد تفریقیہ فنکشنوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ وہ تواتر جس کے لیے مساوات (13-9) کا کوئی جائز حل ہے تین جائز پیرامیٹروں پر منحصر ہوتا ہے یعنی آئگن فنکشنوں ψ_n اور ψ_m پر گرین کے مصدقہ کا اطلاق کریں تو ہم پاتے ہیں کہ:

$$\int (\psi_m \nabla^2 \psi_n - \psi_n \nabla^2 \psi_m) \, dv = \int (\psi_m \nabla \psi_n - \psi_n \nabla \psi_m) \cdot d\mathbf{S}.$$

دونوں میں سے کوئی حدودی شرط یعنی میدانی جز کا غائب ہونا یا اس کے عمودی تفرقی اخذ کا غائب ہونا سطحی اینٹگرل کو غائب کر دیتی ہے۔ حجمی انٹیگرل کو مساوات (13-9)، کو دھیان میں رکھ کر اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$(k_n^2 - k_m^2) \int \psi_m \psi_n \, dv = 0, \qquad (13\text{-}15)$$

جو کہ دریافت طلب عمودیت رشتہ ہے۔ مساوات (13-14) اور (13-15) کا موزانہ کرنے سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ "وزن فنکشن $r(x)$ ٹھیک وہ جز ہے جس کی تین ابعاد میں صحیح حجمی قطعہ دینے کے لیے ضرورت ہے۔

اس لیے بند جوفوں میں جن کے حدود پر میدانی اجزا یا اُن کے تفرقی اخذ غائب ہو جاتے ہیں ہم خصوصی برقی مقناطیسی ارتعاشوں کو پانے کی توقع کر سکتے ہیں جو ایک مرتعش تار کے طرزوں سے مشابہ ہوں گے۔ ان ارتعاشوں کے تواتروں میں ایک سب سے نیچی آنگمن قیمت کا "بنیادی" ہوگا اور ساتھ میں ایک لامتناہی مجرد سلسلہ اونچے تواتروں کا ہوگا۔ ارتعاشوں کے یہ طرز اس حد تک تیکھے اور غیر منخصر ہوتے ہیں جس حد تک کمال چالکتا کا مفروضہ جائز ہے۔ واقعتاً یہ ایک غیر معینہ مدت تک اپنے کو قائم نہیں رکھ سکتے اور خساروں کا اندازہ لگانے کے لیے ہمیں ایک محدود چالکت کے اثرات کی طرف رجوع کرنا ہوگا۔ یہاں یہ بتا دینا چاہیے کہ جوف کے اندر میدانوں کی واقعی تشکیل ارتعاشوں کو پیدا کرنے کے طریقے پر منحصر ہوگی۔

گو کہ $\Psi(x, y, z, t)$ کے چاروں مفرد متغیروں میں سے اب ہر ایک اہتزازی ہو سکتا ہے صرف تین بند حدود سے تعلق رکھتے ہیں۔ چوتھا آزاد متغیرہ "وقت" اب بھی "کھلا" ہے اور مکمل حل کسی مخصوص وقت $t = t_0$ پر ابتدائی حالات $\Psi(x, y, z, t_0)$ اور $(\partial\Psi/\partial t)_{t=t_0}$ پر منحصر ہوگا۔

13-3 مستطیلی حدود والے جوف

آیئے ہم ایسے خلائی خطہ پر غور کریں جو مستطیلی چالک دیواروں سے بالکل گھرا ہوا ہے۔ اس حالت میں سب میدانی اجزا مساوات 13-10 کے حلوں کے حاصل ضرب دیے ہیں جہاں $k_1, k_2,$ اور k_3 کو اس طرح چُنا گیا ہے کہ برقی میدان حدود پر دیواروں کے عمودی ہوں اور مقناطیسی میدان مماسی، اگر جوف کے ابعاد $A, B,$ اور C ہوں تو یہ آسانی سے تسلیم کیا جا سکتا ہے کہ برقی میدان کے اجزا یہ ہیں:

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_1 \cos(k_1x)\sin(k_2y)\sin(k_3z)\,e^{-i\omega t},\\
E_y &= E_2 \sin(k_1x)\cos(k_2y)\sin(k_3z)\,e^{-i\omega t},\\
E_z &= E_3 \sin(k_1x)\sin(k_2y)\cos(k_3z)\,e^{-i\omega t},
\end{aligned}
\qquad (13\text{-}16)
$$

جہاں فاصل پیرامیٹروں کی وہ آئگن قیمتیں جو حدودی شرائط کو مطمئن کرنے کے لیے ضروری ہیں یہ ہیں :

$$k_1 = l\pi/A, \quad k_2 = m\pi/B, \quad k_3 = n\pi/C, \qquad (13\text{–}17)$$

جہاں $l, m,$ اور n ہندسے ہیں۔ اس طرح جائز تواتر درج ذیل رشتہ سے ملتے ہیں :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \pi^2\left(\frac{l^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} + \frac{n^2}{C^2}\right). \qquad (13\text{–}18)$$

مساوات (13-16) سے یہ ظاہر ہے کہ میدانوں کو غائب نہ ہونے دینے کے لیے $l, m,$ اور n ہندسوں میں سے کم سے کم دو کو صفر نہیں ہونا چاہیے $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}$ کے استعمال سے ملے مقناطیسی میدان از خود حدودی شرائط کی پابندی کریں گے اور یہ دیکھا جائے گا کہ وہ برقی میدانوں سے وقت میں چوتھائی چکر کے فرق سے ہوں گے۔ اس طرح جوف کے اندر کل برقی و مقناطیسی توانائیوں کا جوڑ مستقل رہتا ہے گو کہ دونوں رقمیں الگ الگ گھٹتی بڑھتی ہیں ؛

برقی میدان کے اجزا کی وسعتیں غیر منحصر نہیں ہیں بلکہ ڈائیورجنس شرط $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$ سے منسلک ہیں جس سے یہ ملتا ہے :

$$E_1k_1 + E_2k_2 + E_3k_3 = 0. \qquad (13\text{–}19)$$

عام طور سے دو ممکن تقطیبوں کی مطابقت سے دو خطی غیر منحصر ویکٹر $\mathbf{E}$ ایسے ہوتے ہیں جو اس شرط کو مطمئن کرتے ہیں (سوا اس حالت کے کہ جب l, m, n ہندسوں میں سے کوئی ایک صفر ہو جس کی وجہ سے $\mathbf{E}$ کی سمت ایک سی رہتی ہے)۔ ان ویکٹروں کو جب تک کہ وہ ہم خطی نہ ہوں کسی ڈھنگ سے چُنا جا سکتا ہے اور ہر ایک کے ساتھ ایک مقناطیسی میدان زاویہ قائمہ بناتا ہوا ہوگا، اس طرح یہ پھر $\mathbf{E}, \mathbf{H},$ اور $\mathbf{k}$ ویکٹروں کا ایک عمودی سٹ بناتے ہیں l, m, n ہندسوں کے دیے ہوئے سٹ کے مطابقت کے میدان ایک ایسا ارتعاشی طرز بناتے ہیں جس کی پیشین گوئی گزشتہ سکشن میں کی گئی تھی۔ کل میدان سب ممکن ارتعاشی طرزوں کا جوڑ ہوں گے اور ان کے وسعتی جز طریقہ استعمال

پر منحصر ہوں گے۔

حقیقی چالک دیواریں جوف سے بتدریج توانائی جذب کرتی ہیں جس کی شرح کا اندازہ سیکشن 13-1 کی تحقیق سے آسانی سے لگایا جاسکتا ہے۔ محدود σ کے لیے E کے چھوٹے مماسی جزو کو مساوات (13-4) سے دریافت کیا جاسکتا ہے:

$$E_{\parallel} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}}\,H_{\parallel} \times n.$$

H کا مماسی جزو کامل حل سے قدرے مختلف ہوگا لیکن اس کا اضافی فرق بہت تھوڑا ہوگا جسے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ قوت کا خسارہ نکالنے کے لیے ہم سطح پر دیوار کے اندر کی طرف کے پوائنٹنگ ویکٹر کے وقتی اوسط کا حساب کرسکتے ہیں:

$$\overline{N} = \frac{\mathrm{Re}(E_{\parallel} \times H_{\parallel})}{2} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}}\,H_{\parallel 0}^{2} = \frac{H_{\parallel 0}^{2}}{2\sigma\delta}\,n. \qquad (13\text{-}20)$$

یہاں $H_{\parallel 0}$ مماسی مقناطیسی میدان کی فراز قیمت ہے جو سطحی کرنٹ K کی فراز قیمت کے برابر ہے۔ اگر ہم ایک سطحی مزاحمت کی تعریف اس طرح کریں کہ

$$\overline{N} = n(\overline{K^2}R_s),$$

تو

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta}.$$

اگر ہم مساوات (13-20) کا انٹیگرل دیواروں کے کل رقبہ پر لیں تو کسی جوف کے اندر قوت کا کل خسارہ معلوم ہو جاتا ہے۔ طرز سے متعلق خساروں کو اکثر عامل "Q" بتا کر ظاہر کیا جاتا ہے Q کی تعریف یہ ہے، جو اشتعالی طرز کی وسعت پر منحصر نہیں ہوتی ہے:

$$Q = \frac{\text{جوف میں جمع توانائی}}{\text{دیواروں میں ضائع ہوئی توانائی فی چکر}}$$

13-4 سلنڈری جوف

جس مستطیلی متوازی مجسم پر ہم نے غور کیا ہے وہ ایک خاص طرح کا سیدھا

سلنڈر ہے اور کسی بھی عرضی تراش والے سلنڈری جوفوں سے بہت سی باتوں میں مشابہت رکھتا ہے۔ ہر جوف میں k_i کی جائز قیمتوں کا اور اس لیے جائز تواتروں کا تعین جوف کی جیامیٹری کرتی ہے۔ لیکن ہم نے دیکھا ہے کہ مستطیلی جوف میں k_1, k_2, k_3 کے ہر سٹ کے لیے عام طور سے دو خطی آزاد طرز ہوتے ہیں یعنی تقطیب پر کوئی روک نہیں ہے۔ ہم اس من ملنے پن کا فائدہ اٹھا کر طرزوں کو میدان ویکٹروں کی تشریح کے مطابق دو قسموں میں بانٹ سکتے ہیں: ہم ایک طرز وہ چنیں گے جس میں برقی میدان عرضی تراس کے مستوا میں ہوتا ہے اور دوسرا وہ جس میں مقناطیسی ویکٹر اس میدان میں ہوتا ہے۔ طرزوں کی عرضی برقی (TE) اور عرضی مقناطیسی (TM) میں یہ تقسیم سب سلنڈری جوفوں کے لیے ممکن ہے گو کہ غیر برابر محوروں والا مستطیلی متوازی مجسم اس بات میں یگانہ ہے کہ اس میں ہر طرح کا ایک طرز اسی جائز تواتر کے لیے ہوتا ہے (اگر متوازی مجسم کی کوئی محور برابر ہوں تو لازمی طور پر زیادہ اونچے درجہ کا فساد ہوگا)

یہ دکھانے کے لیے کہ کسی سلنڈری جوف کے لیے یہ بٹوارہ ممکن اور مکمل دونوں ہی ہے ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ اس جز کو جو اونچائی کی سمت قدر z پر منحصر ہے ہر مساوات سے الگ کر کے باہر کیا جا سکتا ہے۔ $z = 0$ اور $z = C$ پر حدودی شرائط کی مانگ یہ ہے کہ z پر انحصار یا تو $\sin k_3 z$ یا $\cos k_3 z$, کے ذریعہ ہو جہاں $k_3 = n\pi/C$. دوسرے لفظوں میں میدان کا ہر جز مساوات

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_3^2\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{Bmatrix} = 0 \qquad (13\text{–}21)$$

اور مساوات

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{Bmatrix} = 0, \qquad (13\text{–}22)$$

کی پیروی کرتا ہے، جب کہ k ابھی تک نامعلوم ہے۔ نیچے کے میدانی مساوات کی پابندی بھی ضروری ہے:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H},$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E} \tag{13-23}$$

اگر ہم مساوات (13-23) کے ہر ویکٹر اور ہر آپریٹر کو ایک عرضی حصے، جسے زیریں نشان s سے ظاہر کیا گیا ہے اور z سمت میں ایک جز کے جوڑ کی شکل میں لکھیں تو ہم پاتے ہیں:

$$i\omega\mu\mathbf{H}_s = \nabla_s \times \mathbf{E}_z + \nabla_z \times \mathbf{E}_s,$$
$$-i\omega\epsilon\mathbf{E}_s = \nabla_s \times \mathbf{H}_z + \nabla_z \times \mathbf{H}_s, \tag{13-24}$$

کیونکہ مثال کے طور پر $\nabla_s \times \mathbf{E}_s = i\omega\mu\mathbf{H}_z$ ہے۔ جب (13-24) مساواتوں میں سے ایک کو دوسرے کی داہنی جانب عرضی میدان کی جگہ رکھا جاتا ہے اور مساوات (13-21) کا استعمال کیا جاتا ہے تو نتیجہ یہ ملتا ہے:

$$\mathbf{E}_s = \frac{\nabla_s(\partial E_z/\partial z)}{k^2 - k_3^2} + \frac{i\omega\mu}{k^2 - k_3^2}\nabla_s \times \mathbf{H}_z,$$
$$\mathbf{H}_s = \frac{\nabla_s(\partial H_z/\partial z)}{k^2 - k_3^2} - \frac{i\omega\epsilon}{k^2 - k_3^2}\nabla_s \times \mathbf{E}_z. \tag{13-25}$$

اس طرح پر سب عرضی میدانوں کو z- اجزا کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے ان میں سے ہر ایک اس تفرقی مساوات کی پابندی کرتا ہے:

$$[\nabla_s^2 + (k^2 - k_3^2)]\begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0, \tag{13-26}$$

جہاں ∇_s^2 دو ابعادی لاپلاسی آپریٹر ہے۔

سلنڈر کی عرضی تراش کے حدود پر جو شرائط E_z اور H_z پر عائد ہیں وہ مختلف ہیں؛ حد پر E_z کو غائب ہو جانا چاہیے جبکہ H_z کے عمودی تفرقی اخذ کو غائب ہو جانا چاہیے جس سے مساوات (13-25) کی دوسری مساوات پر عائد شرائط کی پابندی ہو سکے۔ جب کہ عرضی تراش ایک مستطیل ہو تو یہ دونوں شرطیں جیسا ہم نے دیکھا ہے $(k^2 - k_3^2) = k_s^2 = k_1^2 + k_2^2$ کی ایک ہی ممکن قیمتیں دے سکتی ہیں۔ نہیں تو یہ دو مختلف تواتر دیتی ہیں، ایک وہ

جس کے لیے E_z کی اجازت ہے لیکن $H_z = 0$ دوسرا وہ جس میں H_z ہے لیکن E_z نہیں۔ ہر حالت میں طرزوں کو عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی گروہوں میں بانٹنا ممکن ہے، میدانی اجزا E_z اور H_z آزاد مضمروں کا رول ادا کرتے ہیں ان سے بالترتیب TM اور TE طرزوں کے دوسرے سب میدانی اجزا مساوات (13-25) کے ذریعہ اخذ کیے جاسکتے ہیں۔ تواتروں کو مساوات (13-21) اور (13-26) کی آئگن قیمتوں سے معلوم کیا جاتا ہے۔ اگر ہم E_z یا H_z کا مستوا عرضی تراش کی سمتی قدروں پر فنکشنی انحصار $f(x, y)$، سے ظاہر کریں تو ہم مساوات (13-26) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\nabla_s^2 f = -(k^2 - k_3^2) f = -k_s^2 f. \qquad (13\text{-}27)$$

اب ہم پہلے یہ دکھائیں کہ $k_s^2 > 0$, اور اس لیے $k > k_3$. گرین مصدقہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$-k_s^2 \int f^2\,dv + \int (\nabla_s f)^2\,dv = \int f \nabla f \cdot d\mathbf{S}.$$

اگر f کو یا اس کے عمودی تفرقی اخذ کو سلنڈری سطح S، پر غائب ہونا ہے تو

$$k_s^2 = \frac{\int (\nabla_s f)^2\,dv}{\int f^2\,dv} > 0. \qquad (13\text{-}28)$$

ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ $k_3 = n\pi/C$. جو قیمتیں k_s کے لیے جائز ہیں ان کا انحصار عرضی تراش کی جیامٹری اور طرز کی ماہیت دونوں پر ہے۔

TM طرزوں کے لیے $H_z = 0$, اور E_z کا z پر انحصار $\cos n\pi z/C.$ سے ملتا ہے۔ مساوات (13-27) کو اس شرط کے ساتھ حل کرنا ہوگا کہ عرضی تراش کے مستوا کی حدود پر f غائب ہو جاتا ہے اور اس طرح E_z اور k_s کی دریافت مکمل ہو جاتی ہے۔ عرضی میدان مساوات (13-25) کی مندرجہ ذیل خصوصی حالتیں ہیں:-

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k_s^2}\nabla_s \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$\mathbf{H} = -\frac{i\omega\epsilon}{k_s^2}\nabla_s \times \mathbf{E}_s$$

$$= \frac{i\omega\epsilon}{k_s^2}\hat{z} \times \nabla_s E_z, \qquad (13\text{–}29)$$

جہاں $\hat{z}$ سلنڈر کی دُھری کی سمت میں اکائی ویکٹر ہے۔ TE طرزوں کے لیے جن میں $E_z = 0$، اس شرط کا کہ H_z سلنڈر کے سروں پر غائب ہو جائے، تقاضا ہے کہ $\sin n\pi z/C$، کا استعمال کیا جائے، اور k_s ایسا ہو کہ H_z کا عمودی تفرقی اخذ بھی دیواروں پر صفر ہو۔ مساوات (13–25) جس سے عرضی میدان نکلتے ہیں تب یہ ہو جاتے ہیں:

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{k_s^2}\nabla_s \frac{\partial H_z}{\partial z},$$

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega\mu}{k_s^2}\nabla_s \times \mathbf{H}_s = -\frac{i\omega\mu}{k_s^2}\hat{z} \times \nabla_s H_z, \qquad (13\text{–}30)$$

اور اس طرح طرزوں کی دریافت مکمل ہو جاتی ہے۔

13–5 دائری سلنڈری جوف

آیئے ہم اس سے پہلے کے سیکشن کے طریقوں کا استعمال ایک سیدھے دائری سلنڈر کے TM طرزوں کے لیے کریں۔ ہم یوں لکھ سکتے ہیں:

$$E_z = Af(r, \varphi)\cos(k_3 z)e^{-i\omega t},$$

جہاں $f(r, \varphi)$ اس مساوات کا پابند ہے۔

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + k_s^2 f = 0. \qquad (13\text{–}31)$$

متغیروں کو الگ کرنے پر ہمیں قطری سمتی قدر کے لیے ٹھیک اسی طرح بیسل

کا مساوات ملتا ہے جیسا کہ سلنڈری تناسب والے سکونی برقی مسئلوں کے لیے۔ اگر محور $r = 0$ جوف میں شامل ہے تو ہمیں وہ حل چننا ہوگا جو مبدا پر باقاعدہ (regular) ہو۔ نیم قطر r_0 اور اونچائی C کے ایک جوف کے TM طرز کے لیے:

$$E_z = AJ_m(k_l r)e^{im\phi}\cos(k_3 z)e^{-i\omega t} \qquad (13\text{–}32)$$

k_l کو اس شرط کے استعمال سے معلوم کیا جاتا ہے کہ $J_m(k_l r_0) = 0$، اور یہ مساوات (13–31) میں k_z کی آئگن قیمتیں ہیں۔ کسی طرز کا تواتر اس سے ملتا ہے

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_l^2 + \frac{n^2\pi^2}{C^2}.$$

اس طرح تواتروں کی عددی قیمتیں جاننے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ہمیں بیسل فنکشنوں کے صفروں کا علم ضروری ہے۔

اگر کسی m درجہ کے بیسل فنکشن کے صفر کا آرڈینیل عدد l ہو (آرگومنٹ کی بڑھتی قیمتوں کے ساتھ l بڑھتا ہے) تو مستطیلی حالت کی طرح ہر طرز کی خصوصیت تین ہندسوں n, m, l سے ظاہر ہوتی ہے۔ میدانوں کے سب عرضی اجزا E_z کے معقول تفرقی اقدلے کر معلوم کیے جا سکتے ہیں جیسا کہ مساوات (13-29) میں بتایا گیا ہے۔

عرضی برقی طرزوں کے تواتر اس حقیقت سے معلوم کیے جاتے ہیں کہ $J_m'(k_l r_0)$ کا حد پر ڈھال صفر ہوگا۔ اس طرح k_l آئگن قیمتیں TM والی حالت سے مختلف ہیں اور جوف کے تواتر اسی مطابقت سے مختلف ہوں گے ہمیں پھر طرزوں کا ایک لامتناہی سٹ ملتا ہے جس میں سے ہر ایک کی خصوصیت تین ہندسوں سے ظاہر ہوتی ہے۔

سلنڈروں کے ٹکڑوں کے مسئلہ کو کسری درجہ کے بیسل فنکشنوں کے ذریعہ حل کیا جاتا ہے چونکہ اب m ایک ہندسہ نہیں ہے بلکہ اسے $\phi =$ مستقلہ سطحوں کی حدودی شرطوں سے معلوم کیا جاتا ہے۔ ہم محوری شکل کے

سلنڈری جوفوں کے مسئلوں کو انہیں طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے سوا اس کے کہ دو حدودی سطحوں کے لیے بیسل مساوات کے عام حل کی ضرورت پڑے گی۔ شاید دوہری دیواروں والے جوف کا سب سے زیادہ دلچسپ پہلو یہ ہے کہ TM اور TE طرزوں کے علاوہ TEM طرز بھی ہوتے ہیں جن کے لیے $E_z = 0 = H_z$. جہاں تک ان طرزوں کا سوال ہے متعدد رشتوں والے خطے کے حدود میدانوں کے لیے اندرونی ماخذ کی طرح کام کرتے ہیں۔ طبیعی لحاظ سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ ایک صفر تواتر کا طرز بھی ہوتا ہے جس میں برقی میدان کے اجزا نہیں ہوتے مثلاً وہ حالت جس میں باہری سلنڈر میں ایک کرنٹ اوپر کو بہتی ہو اور اندرونی سلنڈر سے نیچے لوٹتی ہو۔

13-6 لہر گائیڈ

آیئے ہم ایک لہر گائیڈ کے محور کی سمت میں جو محض ایک کھلے سروں والا لمبا سلنڈر ہے، برقی مقناطیسی لہروں کی ترسیل کے امکان پر غور کریں۔ z کی سمت میں ایک پیش رو لہر کو ظاہر کرنے کے لیے ہم میدانوں کے سمتی قدری متغیروں اور وقت پر انحصار کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$f(x, y)e^{i(k_g z-\omega t)} \qquad (13\text{-}33)$$

گائیڈ کا ترسیلی مستقلہ k_g محض مساوات (13-21) کا k_3 ہے سوا اس فرق کے کہ اب اس پر حدودی شرائط کی وجہ سے الگ الگ قیمتوں کی پابندی نہیں ہے۔ سیکشن 13-4 کے عام خیالات لاگو ہوتے ہیں اس وجہ سے ہم TM اور TE طرزوں پر الگ الگ غور کر سکتے ہیں۔

ایک دوسری حالت جس کا مختصر ذکر سیکشن 13-5 میں کیا گیا ہے اس سلسلے میں زیادہ اہمیت کی ہے۔ اگر حدود اکہرے جڑے نہیں ہیں یعنی اگر خطہ کم سے کم دو چالک سلنڈروں سے گھرا ہوا ہے تو میدانوں کا دو العادی لاپلاسین (Laplacian یا $\nabla_t^2 f(x, y)$) حدودی شرائط کے تحت غائب ہو سکتا ہے۔ تب دو العادی برق سکونی مسئلہ کا حل ایک عرضی متوا

میں حل کا تعین کرے گا اور $k_g^2 = k^2$ تاکہ خلا میں ترسیلی رفتار محض c ہے۔ اس طرح کی لہر کے کوئی میدانی اجزا سلنڈر کے محور کے سمت میں نہیں ہونگے E_z سب حدود پر غائب ہوجاتا ہے اور چونکہ وہ $\nabla_t^2 E_z = 0$ کا حل ہے اس لیے سب جگہ غائب ہوجائے گا۔ اسی طرح چونکہ H_z کا عمودی تفرقی اخذ سب حدود پر غائب ہوجاتا ہے اور چونکہ $\nabla_t^2 H_z = 0$, اس لیے H_z سب جگہ غائب ہوجاتا ہے۔ اس لیے اس طرح کی لہر خالص عرضی ہوتی ہے (TEM طرز)۔ ایسے سلنڈروں کی نمونہ مثالیں معمولی ہم محوری اور دو تار کی لائن والی بناوٹیں ہیں۔

اگر حدود اکہرے جڑے ہیں تو t کے لیے حل بالکل وہی ہوتے ہیں جو سلنڈری جوفوں کے لیے ہوتے ہیں جن پر پہلے بحث ہوچکی ہے۔ گوکہ k_0 کی جسامت پر کوئی پابندی نہیں ہے۔ پھر بھی ہم دیکھتے ہیں کہ دو ابعادی مساوات کی ہر آگمن قیمت k_0 کے لیے k_1 کی کمترین قیمت ہے یعنی $k = k_0$ (جسے اکثر لہر گائڈوں کے لیے k_c کہا جاتا ہے) جس کے لیے k_0 حقیقی ہے۔ یہ ایک "خاتم تواتر" کے مترادف ہے جس سے نیچے اس طرز میں لہریں ترسیل نہیں ہوتیں اور بڑھتے z کے ساتھ میدان ایکسپونشی انداز سے کم ہوتے جاتے ہیں سب سے نیچے تواتر کے طرز کے ساتھ یعنی k_0 کی کم سے کم قیمت کے ساتھ ایک مطلق خاتم تواتر منسلک ہوتا ہے۔ عام طور سے

$$k_g^2 = k^2 - k_0^2. \qquad (13\text{-}34)$$

مساوات (13-33) کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ گائڈ کی سمت میں لہر اس فیز رفتار سے ترسیل ہوتی ہے:

$$u_p = \frac{\omega}{k_g} = \frac{k}{k_g}c.$$

چونکہ ترسیل کے لیے کمترین شرط یہ ہے کہ k ، k_0 سے بڑا ہو اس لیے ظاہر ہے کہ لہر یا فیز رفتار خالی فضا میں برقی مقناطیسی لہروں کی رفتار سے زیادہ ہوتی ہے۔ یہ رفتار مستقل نہیں ہوتی بلکہ تواتر پر منحصر ہوتی ہے۔

اس طرح گائڈ کا رویہ ایک فاصل وسیلہ کی طرح ہے اور گائڈ میں ترسیل ہونے والے ایک اضطراب کی گروپ رفتار مساوات (11-68) اور (13-34) سے یہ ہے

$$u_g = \frac{d\omega}{dk_g} = \frac{k_g}{k} c. \qquad (13\text{-}35)$$

یہ دیکھا گیا ہے کہ u_g ہمیشہ c سے کم ہوتا ہے اور دراصل ؛

$$u_p u_g = c^2. \qquad (13\text{-}36)$$

صرف اس حالت میں جب پلس تواتروں ایک تنگ رینج پر مشتمل ہو یہ کہا جاسکتا ہے کہ وہ ایک مخصوص رفتار u_g سے ترسیل ہوتا ہے۔ جبکہ رفتار کسی درمیانی تواتر پر نکالی گئی ہو۔ میدانوں کو سلنڈری جزوں کے مقابلہ میں بھی زیادہ سادگی سے طولی میدانی اجزا کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے چونکہ یہاں $\partial/\partial z = ik_g$. مساوات (13-25) سے دیکھا جاسکتا ہے کہ :

TM طرزوں کے لیے ($Hz = 0$)

$$\mathbf{E}_t = \frac{ik_g}{k_t^2} \nabla_t E_z,$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{\omega\epsilon}{k_g} \hat{z} \times \mathbf{E}_t \qquad \text{or} \qquad c\mathbf{B}_t = \frac{k}{k_g} \hat{z} \times \mathbf{E}_t, \qquad (13\text{-}37)$$

اور TE طرزوں کے لیے ($E_z = 0$)

$$\mathbf{H}_t = \frac{ik_g}{k_t^2} \nabla_t H_z,$$

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\omega\mu}{k_g} \hat{z} \times \mathbf{H}_t \qquad \text{or} \qquad \mathbf{E}_t = \frac{ck}{k_g} \mathbf{B}_t \times \hat{z}. \qquad (13\text{-}38)$$

پوائنٹنگ ویکٹر N کے z جز کا وقتی اوسط یہ ہے ؛

$$\overline{N_z} = \frac{|\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*|}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k}{k_g} \frac{H_{z0}^2}{2}$$ TE طرزوں کے لیے

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k_g}{k} \frac{H_{z0}^2}{2}$$ TM طرزوں کے لیے (13-39)

جہاں زیریں نشان 0 میدان کی فراز قدر ظاہر کرتا ہے۔ لہری گائیڈ کے کسی دیے طرز کے لیے خساروں کا اندازہ مساوات (13-20) کا گائیڈ کی دیواروں پر اینٹگرل لینے سے مل سکتا ہے۔ ایک پیش رد لہر کی توانائی کا بہاؤ میں e^{-Kz} کے حساب سے تخفیف ہوتا جائے گا جہاں :

$$K = \frac{\text{گائیڈ کی اکائی لمبائی پر قوت کا خسارہ}}{\text{گائیڈ میں ترسیل کی گئی قوت}}$$

$$= \frac{1}{2\sigma\delta} \int (H_t^2 + H_z^2)\, dS \Big/ \int \overline{N_z}\, dS, \qquad (13\text{–}40)$$

جہاں شمار کنندہ کا اینٹگرل دیوار کی اکائی لمبائی پر اور نسب نما کا اینٹگرل گائیڈ کے عرضی تراش پر لیا گیا ہے۔ رواجی طور پر گائیڈ مقاومت Z_g کی تعریف یہ لکھ کر کی جاتی ہے :

$$\int \overline{N_z}\, dS = \tfrac{1}{2} Z_g \int H_{z0}^2\, dS. \qquad (13\text{–}41)$$

گائیڈ مقاومت کو ہم مساوات (13-39) کا معائنہ کر کے لکھ سکتے ہیں :

$$Z_g = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k}{k_g}$$ TE طرزوں کے لیے

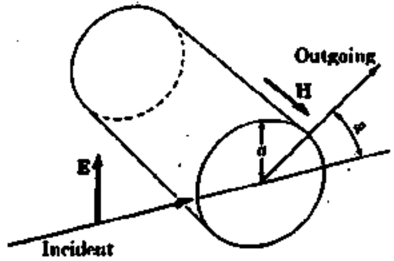
$$Z_g = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k_g}{k}$$ TM طرزوں کے لیے

مساوات (13-40) کے تخفیف مستقلہ K کو مناسب اینٹگریشنوں کو کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ وہ ایکسپوننشی تخفیف جو $k < k_c$ ہونے پر ملتی ہے دیواروں میں قوت کے خسارے پر مشتمل نہیں ہوتی ہے بلکہ داخلی

انعکاسوں کے انطباق کے سبب سے پیدا ہوتی ہے۔

13-7 ایک دائری سلنڈر کے ذریعہ انتشار ایک سلنڈری چالک سے ایک مستوا لہر کا انتشار

متجانس لہر مساوات کے حلوں پر حدودی شرائط لاگو کرنے کی سبق آموز مثال ہے۔ ایک کامل چالکتا کا سلنڈر لیجیے، جس کا نیم قطر a ہے اور جس کا محور سمتی قدر کی z محور سے منطبق ہے جیسا شکل 13-1. میں دکھایا ہے۔ مان لیجیے کہ زاویائی تواتر ω کی ایک مستوا لہر سلنڈر کے محور پر عمودی گر رہی ہے اور اس کی تقطیب اس طرح پر ہے کہ اس کا مقناطیسی ویکٹر z سمت میں ہے۔ پورا میدان واقع لہر پر اور اس لہر پر جو سلنڈر سے منتشر (منعکس) ہوتی ہے مشتمل ہوگا۔ یہ میدان درحقیقت ایک عرضی برقی طرز ہے، جس میں $k_3 = 0$ اور تواتر پر کوئی پابندیاں نہیں ہیں۔



[شکل 13-1. ایک دائری چالک سلنڈر کا عرضی تراش جس پر اشعاع محور پر زاویہ قائمہ بناتی ہوئی گر رہی ہے H سلنڈر کے محور کے متوازی ہے]

بیسل فنکشنوں کو پیدا کرنے والا فنکشن ہمیں اجازت دیتا ہے کہ ہم آنے والی لہر کے مقناطیسی ویکٹر کا معقول پھیلاؤ فوراً لکھ سکیں:

$$H_{z0} e^{i(kr\cos\varphi-\omega t)} = H_{z0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr)\, i^m e^{i(m\varphi-\omega t)}. \qquad (13\text{-}42)$$

منتشر کرنے والے سلنڈر سے باہر جانے والی لہر کا اظہار کرنے کے لیے ہم بیسل فنکشنوں کی وہ ترکیب چنتے ہیں جو r کی بڑی قیمتوں کے لیے $e^{ikr}/\sqrt{r}$ کے تناسب

سے بدلتی ہے۔ یہ ترکیب محض $J_m(kr) + iN_m(kr)$ ہے جس کے لیے مستند نشان $H_m^{(1)}(kr)$ ہے۔ ہم بالا نوشت کو چھوڑ سکتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ اس فنکشن کا مقناطیسی میدان سے مغالطہ نہیں ہو سکتا کیونکہ زیریں نوشت m اور صرف ہی آرگومنٹ kr موجود ہیں۔ اس طرح منتشر لہر کی شکل یہ ہے:

$$H_{z0} \sum_m a_m H_m(kr) e^{i(m\varphi - \omega t)}$$

ضریبہ a_m اس شرط کے استعمال سے دریافت کیے جاتے ہیں کہ پورے برقی میدان کا مماسی جزو سلنڈر کی سطح پر غائب ہو جاتا ہے۔ چونکہ H_z کا انحصار φ پر نہیں ہے اس لیے لہر کے مقناطیسی میدان کا صرف یہی جزو رہ جاتا ہے۔ اس نتیجہ کی توقع ہمیں طبعی وجوہات سے بھی کرنی چاہیے تھی۔ اسی لیے کرل رشتہ سے یہ ملتا ہے کہ:

$$E_\varphi = \frac{-i}{\epsilon_0 \omega} \frac{\partial}{\partial r} H_z. \qquad (13\text{–}43)$$

اس لیے سلسلہ کی ہر کڑی کے لیے حدودی شرائط کا تقاضا ہے کہ:

$$i^m J'_m(ka) + a_m H'_m(ka) = 0,$$

جہاں اوپر کا نشان دلیل کے لحاظ سے تفرق بتاتا ہے۔ a_m کے لیے حل کرنے پر ہمیں یہ ملتا ہے:

$$a_m = -i^m \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)}. \qquad (13\text{–}44)$$

ہماری دلچسپی سلنڈر سے بڑے فاصلہ پر منتشر لہر میں ہے۔ اس کے آرگومنٹ کی بڑی قیمتوں کے لیے

$$H_m(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr} e^{-(2m+1)(\pi/4)i}, \qquad (13\text{–}45)$$

اگر ہم ان رقموں کو چھوڑ دیں جو بڑھتے r کے لیے زیادہ تیزی سے کم ہوتی

ہیں۔ تو منتشر لہر کے میدان یہ ہو جاتے ہیں :

$$H_z = H_{z0}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i(kr-\omega t)}\sum a_m e^{i(m\varphi-(2m+1)(\pi/4))}$$

$$E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,H_z,$$

ان میدانوں سے منسلک پوائنٹنگ ویکٹر لازمی طور سے مثبت r کی سمت میں ہے ۔ اس کا وقتی اوسط مندرجہ ذیل ہے :

$$\overline{N_r} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(E_\varphi H_z^*) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,|H_z|^2. \qquad (13\text{–}46)$$

اگر ہم N کا انٹیگرل ایک سلنڈری سطح کے اوپر یہ معلوم کرنے کے لیے لیتے ہیں کہ سلنڈر کی فی اکائی محوری لمبائی سے منتشر توانائی کی کل شرح کیا ہے تو حاصل ضرب میں دوہرا جوڑ صرف اس وجہ سے اکہرا جوڑ رہ جاتا ہے کیوں کہ فنکشن $e^{im\varphi}$ عمودی ہیں اور ہمیں یہ ملتا ہے :

$$\frac{dU}{dt} = \int_0^{2\pi} Nr\,d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,H_{z0}^2\,\frac{4}{k}\sum_m\left|\frac{J_m'(ka)}{H_m'(ka)}\right|^2 \qquad (13\text{–}47)$$

یا حقیقی بیسل فنکشنوں کے لحاظ سے

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,H_{z0}^2\,\frac{4}{k}\sum_m\frac{[J_m'(ka)]^2}{[J_m'(ka)]^2 + [N_m'(ka)]^2}. \qquad (13\text{–}47')$$

واقع شعاعوں میں فی اکائی رقبہ توانائی کے بہاؤ کا وقتی اوسط یہ ہے :

$$\overline{N_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,H_{z0}^2, \qquad (13\text{–}48)$$

اور مساوات (13-47) میں اس جزو کے ضربیہ کو انتشار کار کا انتشاری عرضی تراش کہتے ہیں۔ یہ وہ رقبہ بتاتا ہے جس سے افتادی شعاعوں کا توانائی بہاؤ انتشاری جسم "برطرف" کر دیتا ہے۔ یہاں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ عرضی تراش کے ابعاد ایک لمبائی کے ہیں لیکن یہ اس وجہ سے ہے کہ

ساری بحث میں ہم نے سلنڈر کی لمبائی کو اکائی میں لیا ہے۔ سلنڈر کا جیامٹریائی رقبہ فی اکائی لمبائی ٹھیک $2a$ ہے۔

انتہائی لمبی لہر لمبائیوں کے لیے جب کہ $ka \to 0$, تو انتشاری عرضی تراش کے اظہار کو بیسل فنکشنوں کو قوت سلسلے کے ذریعہ پھیلا کر سادہ بنایا جا سکتا ہے۔ اس حد میں رقم $m = 0$ اور دو رقمیں جن کے لیے $m = \pm 1$ برابر کا حصہ رکھتی ہیں جب کہ باقی سب دوسری رقمیں ka کی زیادہ اونچی قوتوں پر مشتمل ہیں نتیجہ یہ ہے

$$\sigma = \frac{3}{4}\pi^2 (ka)^3 a, \tag{13-49}$$

جو اشعاع لہر لمبائی کے مکعب کے مقلوب تناسب کے حساب سے بدلتی ہے اور سلنڈر کے جیامٹریائی عرضی تراش سے چھوٹی ہوتی ہے منتشر تابانی کی زاویائی تقسیم کو دریافت کرنے کے لیے ہمیں واپس پوائنٹنگ ویکٹر کے وقتی اوسط پر جانا ہوگا خاص رقموں سے یہ ملتا ہے:۔

$$\sigma(\varphi)\, d\varphi = \frac{\overline{N}r\, d\varphi}{\overline{N}_0},$$

$$\sigma(\varphi) = \frac{2}{\pi k}\left|\frac{J_0'(ka)}{J_0'(ka) + iN_0'(ka)} - \frac{2J_1'(ka)\cos\varphi}{J_1'(ka) + iN_1'(ka)}\right|^2. \tag{13-50}$$

اگر $ka \ll 1$, تو یہ ہو جاتا ہے؛

$$\sigma(\varphi) = \frac{2}{\pi k}\,\frac{\pi^2 (ka)^4}{2^4}(1 - 2\cos\varphi)^2 = \frac{\pi (ka)^3}{8}\, a(1 - 2\cos\varphi)^2.$$

اس لیے انتشار غالب طور پر پیچھے کی طرف ہوتا ہے اور آگے کی سمت میں ایک چھوٹا فراز ہوتا ہے۔ $\varphi = 60°$. پر شدت صفر ہوتی ہے۔

13-6 کرّوی لہریں

اسکیلر لہر مساوات کو آسانی سے کروی قطبی سمتی قدروں میں الگ کیا جا سکتا ہے اور:

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi; t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -k^2 \psi \tag{13-51}$$

کا حل

$$\psi = \Pi(r, \theta, \varphi)e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l+1/2}(kr)\, Y_l^m(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}. \tag{13-52}$$

ہے۔ یہاں $Y_l^m(\theta, \varphi)$ درجہ $l, m,$ کا کروی ہارمونک ہے جہاں l ایک مثبت ہندسہ ہے اور $m = l, l-1, \dots, -l,$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!}\left[(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}(\sin\theta)^m \frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}}[(\sin\theta)^{2l}]e^{im\varphi}$$

$$= \left[(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{13-53}$$

ان فنکشنوں کی دو صفات پر خاص دھیان دینا چاہیے:

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^{m*}(\theta, \varphi),$$
$$\int Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'*}(\theta, \varphi)\, d\Omega = 4\pi\, \delta_{mm'}\, \delta_{ll'}. \tag{13-53'}$$

بیسل فنکشن $Z_{l+1/2}(kr)$ کا انتخاب اس طرح کرنا ہوگا کہ وہ دیے ہوئے مسئلہ کے حدودی شرائط کے لئے موزوں ہو۔ اس میں سہولت رہے گی کہ "کروی بیسل فنکشنوں" کا استعمال کیا جائے جو ایک تعریف کے مطابق یہ ہیں:

$$z_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, Z_{l+1/2}(kr). \tag{13-54}$$

کروی بیسل فنکشنوں $z_l(kr)$ کو $j_l(kr), n_l(kr),$ یا $h_l(kr),$ سے ٹھیک اسی طرح مخصوص کیا جا سکتا ہے جیسے Z_l کو $J_l, N_l,$ یا $H_l.$ کا اظہار کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے (اس پر توجہ دیجیے کہ ہم نے بالا نوشت کو جو عموماً ہینکل فنکشنوں پر لکھا جاتا ہے چھوڑ دیا ہے؛ H_l اور h_l بالکل وہی ہیں جو معمولاً $H_l^{(1)}$ اور $h_l^{(1)}.$ ہیں)۔ مثال کے طور پر

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{l+1/2}(kr),$$

$$h_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, H_{l+1/2}(kr). \qquad (13\text{-}54')$$

اس طرح سے ہم مساوات (13-52) کے فضا پر منحصر کسی مخصوص فاصل پیرامیٹروں کے سٹ کے مطابقت والے جز کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\Pi_l^m(r, \theta, \varphi) = z_l(kr)\, Y_l^m(\theta, \varphi). \qquad (13\text{-}52')$$

لیکن فی الحال یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ ویکٹر میدان کو دریافت کرنے کے لیے اسکیلر حل کسی طرح بھی کارآمد ہے۔ ابھی تک جن سمتی قدری نظاموں کا استعمال کیا گیا ہے ان میں ہم کچھ آسان لیکن طبیعی لحاظ سے دلچسپ نتائج کو دکھانے میں کامیاب ہوئے ہیں، جب کہ ویکٹر لہر مساوات کی فطرتی دشواریوں سے بچتے رہے ہیں بہت کچھ ویسے ہی جیسا ہم نے ویکٹر لاپلاس مساوات کے سلسلہ میں باب 8 میں کہا ہے۔ صرف کارتیسی سمتی قدروں میں جہاں سمتی قدری ویکٹر فضا کے ہر نقطہ پر ایک ہی سمت میں ہوں۔ لاپلاس کی یا ڈی البرٹ کی مساوات ویکٹر کے تین اجزا کے لیے تین اسکیلر مساوات کے مساوی ہوگی۔ درحقیقت عام طور سے متجانس لہر مساوات دو آزاد اسکیلر فنکشنوں کے لحاظ سے حل کیے جا سکتے ہیں[1] سلنڈری حدود پر مشتمل مسئلوں میں میدانوں کو TE اور TM طرزوں میں تقسیم کرنا اسی عام مصدقہ کی ایک خصوصی حالت ہے۔ (سیکشن 13-4 میں ان دو اسکیلر فنکشنوں کو E_z اور H_z لیا گیا تھا) کروی سمتی قدروں میں اس کے مطابقت کے دو "طرز" وہ ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی میدان ترتیب سے سمتی قدروں کے مرکز سے لیے گئے نصف قطر ویکٹر کے عمودی ہیں

ایک فنکشن $\Pi_l^m(r, \theta, \varphi)$ لیجیے جو اسکیلر مساوات (13-51) کو مطمئن کرتا

---

(1) اس مصدقہ کے عام ثبوت کے لیے اور اسے وسیع کر کے دیے ہوئے تقسیم منبع جات کے اندر کے نقطوں پر عائد کرنے کے لیے دیکھیے؛

A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.* 231 A, pp. 250–263 (1955)

ہے Π_l^m کا گریڈینٹ مطابقہ ویکٹر مساوات کا ایک حل ہے اور $\mathbf{r} \times \nabla \Pi_l^m$ بھی ایک حل ہے اگر مساوات سمتی قدروں کے ایک انتہائی خفیف گھما کے لیے غیر متغیر رہتا ہے جیسا کہ ایک مسئلہ میں اشارہ کیا گیا ہے ۔ اگر ہم یہ دھیان میں رکھیں کہ

$$\mathbf{r} \times \nabla \Pi = -\nabla \times (\mathbf{r}\Pi)$$

تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس ویکٹر کا ڈائیورجنس غائب ہو جاتا ہے ؛ اس طرح یہ بہ مآخذ سے پاک یکساں وسیلہ میں $\mathbf{E}$ یا $\mathbf{H}$ کے اوپر لگی ایک ضروری پابندی کو پورا کرتا ہے ۔ اس لیے ایک ایسے ویکٹر میدان کو جس کا کوئی نصف قطری جزء نہ ہو اس طرح کے حلوں کو l اور m کے اوپر ایک جوڑ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے اور اس کے ضریبے مسئلہ کی تفصیلی فطرت کے مطابق ہوں گے ۔ اگر ہم

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{r} \times \nabla \Pi_1, \tag{13-55}$$

رکھیں جہاں Π_1 مساوات (13-51) کا ایک حل (یا حلوں کا جوڑ) ہے تو ہم اس کے مطابقت کے برقی میدان کو فوراً رشتہ $-i\omega\mathbf{D}_1 = \nabla \times \mathbf{H}_1$ سے معلوم کر سکتے ہیں ۔ لیکن اگرچہ کو اسکیلر فنکشن Π_l^m ایک مکمل سٹ بناتے ہیں، پھر بھی $\mathbf{H}_1$ ایک عام مقناطیسی میدان کو ظاہر نہیں کر سکتا کیونکہ اس کا کوئی جزء $\mathbf{r}$ کی سمت میں نہیں ہے ۔ پھر بھی $\mathbf{H}$ اور $\mathbf{E}$ کے رول کو آپس میں بدل کر ویکٹر مساوات کا خطی طور پہ آزاد حل پایا جا سکتا ہے یعنی

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{r} \times \nabla \Pi_2 \tag{13-56}$$

جہاں Π_2 بھی مساوات (13-51) کا ایک حل ہے ؛ اس کے مطابقت کا $\mathbf{H}$ تب رشتہ $i\omega\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{E}_2$ سے معلوم کیا جا سکتا ہے ۔ عام طور سے کسی برقی مقناطیسی میدان کو ان دو طرح کے جزوی میدانوں کے جوڑ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی کرے کی سطح پہ جس کا مرکز سمتی قدروں کا بنیادی نقطہ ہو حدودی شرائط آسانی سے عائد کی جا سکتی ہیں ۔

جیسا ہم پھر باب 14, میں دیکھیں گے دونوں اسکیلر فنکشنوں Π_1 اور Π_2 کو ڈبائی مضمر کہتے ہیں۔ یہ فنکشن درحقیقت ترتیب سے E_1 اور H_2 کے قطری اجزا کے مساوی ہیں جیسا کہ دونوں قسموں کے میدانوں کے فضائی انحصار کے معائنہ سے دیکھا جا سکتا ہے۔ اہر مساوات سے آسانی سے دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \nabla \Pi_l^m$$

تو

$$i\omega\epsilon_0 E_r = [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}\,\Pi_l^m)]_r = \frac{l(l+1)}{r}\Pi_l^m, \qquad (13\text{–}57)$$

اور اس طرح اس قسم کے سب میدانوں کو جنھیں ہم نے زیریں نوشت 1 سے ظاہر کیا ہے E_r کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح اس قسم کے میدان جنھیں ہم نے زیریں نوشت 2 سے ظاہر کیا ہے H_r کے لحاظ سے ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔ میدانوں کو اکثر اس طرح پر نہیں لکھا جاتا بلکہ آسان یہ رہتا ہے کہ انھیں زیریں نوشتوں 1 اور 2 کے بجائے E اور M سے موصوف کیا جائے۔ $\mathbf{H}_E$ $\mathbf{E}_E$, ان میدانوں کا سٹ ہے جن کے لیے برقی میدان ایک قطری جز رکھتا ہے، لیکن مقناطیسی میدان نہیں رکھتا جب کہ $\mathbf{E}_M$ اور $\mathbf{H}_M$ کے لیے صرف مقناطیسی میدان ہی r کی سمت میں ایک جز رکھتا ہے۔ l فاصل پیرامیٹروں اور m کی ہر قیمت کے لیے ہم ہر قسم کے اکائی میدان کی تعریف کر سکتے ہیں:

$$\mathbf{E}_E(l, m) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{r}\,\Pi_l^m,$$

$$\mathbf{H}_E(l, m) = -ik\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\nabla \times \mathbf{r}\,\Pi_l^m, \qquad (13\text{–}58)$$

$$\mathbf{E}_M(l, m) = ik\nabla \times \mathbf{r}\,\Pi_l^m,$$

$$\mathbf{H}_M(l, m) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\nabla \times \nabla \times \mathbf{r}\,\Pi_l^m, \qquad (13\text{–}59)$$

جہاں مستقلوں کو اس طرح داخل کیا گیا ہے کہ دونوں طرح کے میدان $\mathbf{E}_E$ اور $\mathbf{E}_M$ ایک ابعاد کے ہوں۔ صریحی طور پر قسم E، کے لیے اجزا یہ ہیں :-

$$E_r = \frac{l(l+1)}{r} z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \qquad H_r = 0,$$

$$E_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rz_l(kr)]\frac{\partial}{\partial\theta}[Y_l^m(\theta, \varphi)], \qquad H_\theta = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\frac{km}{\sin\theta} z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$E_\varphi = \frac{im}{r\sin\theta}\frac{d}{dr}[rz_l(kr)] Y_l^m(\theta, \varphi), \qquad H_\varphi = ik\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} z_l(kr)\frac{\partial}{\partial\theta}[Y_l^m(\theta, \varphi)], \tag{13-60}$$

اور آزاد طور پر قسم M. کے لیے

$$E_r = 0, \qquad H_r = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\frac{l(l+1)}{r} z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$E_\theta = \frac{-km}{\sin\theta} z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \qquad H_\theta = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rz_l(kr)]\frac{\partial}{\partial\theta}[Y_l^m(\theta, \varphi)]$$

$$E_\varphi = -ikz_l(kr)\frac{\partial}{\partial\theta}[Y_l^m(\theta, \varphi)], \qquad H_\varphi = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\frac{im}{r\sin\theta}\frac{d}{dr}[rz_l(kr)] Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{13-61}$$

یہ دیکھا جاتا ہے کہ یہ میدان مماثل طور پر $l = 0$. کے لیے غائب ہو جاتے ہیں۔ اپنے مکانی تشکل کے اعتبار سے ان کا شمار درجہ 2^l کے متعدد پول میدانوں میں کیا جاتا ہے ز وہ جن کے لیے $\mathbf{E}$ کا قطری جز غائب نہیں ہوتا، مساوات (13-58) اور (13-60) اپنی فطرت کے لحاظ سے برقی متعدد پول ہیں جب کہ مساوات (13-59) اور (13-61) مقناطیسی متعدد پول میدانوں کو ظاہر کرتی ہیں۔ باب 14 میں ہم ان میدانوں کا امتحان ان کے ماخذ کے رشتہ سے کریں گے۔

ایک کروی جوف کے گمکی میدانوں کو بیسل فنکشنوں کے اس مخصوص انتخاب کے لحاظ سے فوراً لکھا جا سکتا ہے جو معقول حدودی شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔ ایک کامل چالک کرے سے محدود جوف کے لیے $z_l(kr)$ صرف $j_l(kr)$ ضرور ہوگا تاکہ $r = 0$. پر باضابطگی کی ضمانت رہ سکے۔ یہ شرط کہ $\mathbf{E}$ کا مماسی جز

جوف کی دیوار پر غائب ہو جائے k پر دونوں طرزوں کے لیے الگ الگ روک عائد کرتی ہے۔ مساوات (13-60) سے یہ دیکھا جاتا ہے کہ جس مساوات کی پابندی برقی متعدد پول میدان کریں گے وہ یہ ہے ؛

$$\left[\frac{d}{dr}\left(rz_l(kr)\right)\right]_{r=r_0} = 0, \qquad (13\text{-}62)$$

جہاں r_0 جوف کا نصف قطر ہے۔ مقناطیسی متعدد پولوں کے لیے k کی آئگن قیمتیں جنھیں مساوات (13-61) بتاتے ہیں وہ ہیں جن کے لیے ؛

$$j_l(k_{l,n}r_0) = 0, \qquad (13\text{-}63)$$

جہاں $k_{l,n}r_0$ ، j_l کا n واں صفر ہے۔

13-9 کرّہ سے انتشار

ایک کرّہ سے ایک مستوا برقی مقناطیسی لہر کے انتشار کے مسئلہ کو ان دو آزاد میدانوں کے لحاظ سے حل کیا جا سکتا ہے جن کو زیریں نوشت E اور M سے موصوف کیا گیا ہے۔ ان قطبی سمتی قدری فنکشنوں کو پہچاننے میں سہولت کے لیے جن کی ضرورت واقع لہر کے مستطیلی اجزا کو ظاہر کرنے کے لیے واسطے ہوگی یہ آسان رہے گا کہ سمتیہ زاویہ φ پر انحصار کو $\cos m\varphi$ یا $\sin m\varphi$ کی شکل میں ظاہر کیا جائے چونکہ خود میدانوں کو ان کے قطری اجزا سے پہچانا جاتا ہے اس لیے اگر قطری جز میں $\cos m\varphi$ آتا ہے تو انھیں جفت اور $\sin m\varphi$ آتا ہے تو طاق کہا جائے گا۔ اس طرح مثال کے طور پر E_E اور H_E جفت کہلائیں گے اگر[1]

---

[1] یہ دیکھا جائے گا کہ میدان (جفت یا طاق $E(l, m;$ اور (جفت یا طاق $H(l, m;$ اُن سے مختلف ہیں جو سیکشن 13-8 میں دیے گئے ہیں۔ فرق ایک نارمل کاری جز

$$\left[(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}$$

کا ہے۔ یہ جز جو ہر کروی طرز سے منسلک توانائی کا حساب کرنے میں (باقی صفحۂ آئندہ پر)

$$E_r(l, m) = \frac{l(l+1)}{r} z_l(kr) P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad (13\text{-}64)$$

اور $\mathbf{H}_M\,\mathbf{E}_M,$ جفت ہیں اگر

$$H_r(l, m) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{l(l+1)}{r} z_l(kr) P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi. \qquad (13\text{-}65)$$

آیئے ہم ایک مستوا تقطیب شدہ کی ایک مستوا لہر لیں جو z محور کی مثبت سمت میں بڑھ رہی ہے اور جس کا برقی ویکٹر z-x مستوا میں مقید ہے۔ ہمیں آنے والے میدانوں کو ان میدانوں کی شکل میں ظاہر کرنا ہے جو مساوات (13-58) اور (13-59) سے ملتے ہیں۔ قطبی محور کی سمت میں ترسیل ہونے والی ایک مستوا لہر کو کرّوی سمتی قدروں میں پھیلانے کے لیے بنیادی فارمولہ یہ سلسلہ ہے۔

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} i^l(2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta). \qquad (13\text{-}66)$$

اب x سمت رکھنے والے ایک ویکٹر کے کرّوی سمتی قدری اجزا اس سے ملتے ہیں :

$$\mathbf{E}_x = E_0 e^{ikr\cos\theta}\hat{\mathbf{x}} = E_0 e^{ikr\cos\theta}(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \qquad (13\text{-}67)$$

لیکن

$$\sin\theta\, e^{ikr\cos\theta} = -\frac{1}{ikr}\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{ikr\cos\theta}), \qquad (13\text{-}68)$$

اور

$$\frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} = -P_l^1(\cos\theta). \qquad (13\text{-}69)$$

(بقیہ حاشیہ صفحہ گزشتہ) بہت سہولت کا ہے ایک مستوا لہر کے کرّوی لہروں کی شکل میں اظہار کے لیے کسی قدر بے ڈھنگا ثابت ہوتا ہے۔ اگر اسے درج کر دیا جائے تو لازمی طور پر انتشاری عرضی تراش کی عبارت میں کٹ کر ختم ہو جائے گا۔

مساوات (13-68) اور (13-69) یہ ممکن کر دیتے ہیں کہ $\mathbf{E}_x$ کے پھیلاؤ کے سلسلے میں $\mathbf{E}_E(l, m)$ کے ضربیہ کو قطری جز کے معائنے سے معلوم کیا جا سکے کیونکہ $\mathbf{E}_M$ کا کوئی جز r کی سمت میں نہیں ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ پیرامیٹر m برابر اکائی رہتا ہے اور یہ کہ φ پر انحصار یہ ضروری کر دیتا ہے کہ (جفت) $\mathbf{E}_E$ کو چنا جائے۔

$\mathbf{E}_M$ کا ضربیہ معلوم کرنے کے لیے ہم ساتھ کے مقناطیسی میدان کے پھیلاؤ کا معائنہ کر سکتے ہیں:

$$H_y\hat{\mathbf{y}} = H_y(\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}). \qquad (13\text{-}70)$$

پھر مساوات (13-68) اور (13-69) کے ذریعہ ہم مساوات (13-70) کے قطری جز کو معلوم کر سکتے ہیں کہ یہ $\mathbf{H}_M(l, 1)$. میں ایک سلسلہ ہے اور یہ دیکھتے ہیں کہ (طاق) $\mathbf{H}_M$ کا انتخاب ضروری ہے۔ چونکہ:

$$\mathbf{E}_M = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,\nabla\times\mathbf{H}_M,$$

اس لیے اب شناخت مکمل ہو جاتی ہے اور گزشتہ سیکشن کے (ترمیمی) اکائی میدانوں کے لحاظ سے ایک مستوا لہر کی عبارت یہ ہے:

$$\mathbf{E}_x = E_0\sum_{l=1}^{\infty}\frac{i^{l-1}}{k}\frac{2l+1}{l(l+1)}[\mathbf{E}_M(l, 1; \text{odd}) + \mathbf{E}_E(l, 1; \text{even})], \qquad (13\text{-}71)$$

$$\mathbf{H}_y = -E_0\sum_{l=1}^{\infty}\frac{i^{l+1}}{k}\frac{2l+1}{l(l+1)}[\mathbf{H}_M(l, 1; \text{odd}) + \mathbf{H}_E(l, 1; \text{even})] \qquad (13\text{-}72)$$

جیسا کہ مساوات (13-66) میں پہلے ہی بتایا جا چکا ہے ان پھیلاؤں میں وہ بیسل فنکشن ہونا چاہیے جو مبدا پر باضابطہ ہو یعنی $j_l(kr)$. m کی قیمت کا صرف $m = 1$. تک ہی محدود ہونا جزو زاویہ φ پر میدانوں کے محدود انحصار سے ظاہر ہے، یہ معنی رکھتا ہے کہ سلسلہ l. کے اوپر اکہرے جوڑوں (single sums) کا ہے۔

اگر یہ مستوا لہر ایک a. نصف قطر کے کرّے پر گرتی ہے جس کا مرکز مبدا

پر ہے تو اسی طرح کا ایک سلسلہ انتشاری لہر کو ظاہر کرے گا جس کے ضربیوں کا تعین کرے کی سطح کے حدودی حالات سے ہوگا۔ اگر زاویائی متغیروں کی سب قیمتوں کے لیے حدودی شرائط کی پابندی ہونا ہے تو باہر جانے والی لہریں $\mathbf{E}_E, \mathbf{E}_M$ کا زاویائی انحصار l کی ہر قیمت کے لیے وہی ہونا چاہیے جو مساوات (13-71) میں ہے لیکن $z_l(kr)$ کو اس طرح چننا ہوگا کہ اس کا r۔ کی بڑی قیمتوں کے لیے رویہ e^{ikr}/r جیسا ہو۔ یہ فنکشن ہے۔

$$h_l = j_l(kr) + in_l(kr) \simeq (-i)^{l+1}\frac{e^{ikr}}{kr}. \qquad (13\text{–}73)$$

انتشاری برقی میدان کی تشکیل ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\mathbf{E}_s = E_0 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^{l-1}}{k}\,\frac{2l+1}{l(l+1)}\,[a_l\mathbf{E}_M(l,1 \text{ طاق}) + b_l\mathbf{E}_E(l,1 \text{ جفت})], \qquad (13\text{–}74)$$

اور ساتھ میں اسی کے مطابقت کی عبارت $\mathbf{H}_s$ کے لیے بھی لکھ سکتے ہیں۔ آسانی کے لیے ہم صرف ایک کمال چالک کرّہ کو لیں گے جس کے لیے واقع اور انتشاری برقی میدانوں کے مماسی اجزا کا جوڑ کرّہ کی سطح کے ہر نقطہ پر سلسلہ کی ہر رقم کے لیے غائب ہونا چاہیے۔ مساوات (13-74) اور (13-71)، کا موازنہ اور " اکائی" میدانوں کے r، پر انحصار سے ہم سبھی a_l، اور سبھی b_l کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

$$a_l = -\frac{j_l(ka)}{h_l(ka)},$$

$$b_l = -\left\{\frac{(d/dr)[rj_l(kr)]}{(d/dr)[rh_l(kr)]}\right\}_{r=a}. \qquad (13\text{–}75)$$

قبل اس کے کہ ہم ان ضربیوں کا معائنہ کرّے کی جسامت کے اور تابانی کی لہر لمبائی کے فنکشنوں کی شکل میں کریں آیئے ہم باہر جانے والے میدانوں کے رویہ پر نظر ڈالیں۔ مساوات (13-73) کے $h_l(kr)$، کے اسموتی فارمولے سے اور $\mathbf{E}_E$، $\mathbf{H}_E$، $\mathbf{E}_M$، $\mathbf{H}_M$، کے اجزا سے یہ ظاہر ہے کہ قطری سمت کے میدان $1/r^2$ کے حساب سے گھٹتے جاتے ہیں جبکہ عرضی میدان بڑے r۔ کے لیے $1/r$ کا تناسب رکھتے ہیں۔ اس لیے

جیسا کہ توقع کی جا سکتی ہے، انتشاری لہر کا پوائنٹنگ ویکٹر قطری ہے اور پوری منتشر اشعاع کو ایک بڑے قطر کے کرّے پر انٹیگرل لے کر دریافت کیا جا سکتا ہے منتشر اشعاع کے وقتی اوسط

$$\frac{dU_s}{dt} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int |\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*| r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int (E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^*) r^2\, d\Omega, \tag{13-76}$$

کی قیمت کو متلازم لیجنڈر فنکشنوں کے انٹیگرل فارمولوں کے ذریعہ نکالا جا سکتا ہے:

$$\int_0^\pi \left(\frac{dP_l^1}{d\theta}\frac{dP_{l'}^1}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}P_l^1 P_{l'}^1\right)\sin\theta\, d\theta = \frac{2[l(l+1)]^2}{2l+1}\delta_{l,l'},$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_l^1}{\sin\theta}\frac{dP_{l'}^1}{d\theta} + \frac{P_{l'}^1}{\sin\theta}\frac{dP_l^1}{d\theta}\right)\sin\theta\, d\theta = 0.$$

مساوات (13-76) میں دکھائے گئے انٹیگرل کو حل کرنے پر نتیجہ یہ ہے:

$$\frac{dU_s}{dt} = \frac{\pi E_0^2}{k_2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)(|a_l|^2 + |b_l|^2). \tag{13-77}$$

چونکہ واقع لہر کی توانائی فی اکائی رقبہ فی اکائی وقت یہ ہے،

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}E_0^2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}},$$

اس لیے انتشاری عرضی تراش کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2}\sum(2l+1)(|a_l|^2 + |b_l|^2). \tag{13-78}$$

گو کہ ضربیہ a_l اور b_l کی قیمت نکالنا مشکل کام ہے ان کے عام رویہ کا کچھ اندازہ انھیں اِس شکل میں لکھنے سے مل سکتا ہے:

$$a_l = ie^{i\gamma_l}\sin\gamma_l, \qquad b_l = ie^{i\gamma_l'}\sin\gamma_l', \tag{13-79}$$

جہاں

$$\tan\gamma_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}, \qquad \tan\gamma_l' = \left[\frac{d[rj_l(kr)]}{dr}\bigg/\frac{d[rn_l(kr)]}{dr}\right]_{r=a}.$$

ان پیرامیٹروں کے لحاظ سے انتشاری عرضی تراش یہ ہے :

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1)(\sin^2 \gamma_l + \sin^2 \gamma_l'), \qquad (13\text{–}80)$$

جس سے یہ ظاہر ہے کہ دونوں قسم کی لہروں کے جن کے برقی میدانوں کو $\mathbf{E}_E$ اور $\mathbf{E}_M$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، شریک حصے ka. کے فنکشنوں کے طور پر اہتزاز کرتے ہیں۔ پورا عرضی تراش ایک بہت سادہ شکل جب ہی اختیار کرتا ہے جب $ka \ll 1$. اس حالت میں مساوات 13-75 کے بیسل فنکشنوں کے پھیلاؤ سلسلوں کی پہلی رقم سے حاصل ہونے والی قدریں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$|a| = \frac{(ka)^3}{3}, \qquad |b| = \frac{2(ka)^3}{3}$$

اس لیے

$$\sigma = \frac{10\pi}{3} k^4 a^6. \qquad (13\text{–}81)$$

اس طرح کم تواتروں کی حد میں انتشاری عرضی تراش لہر لمبائی کی چوتھی قوت کے مقلوب تناسب سے بدلتی ہے اور مطابقہ سلنڈری انتشار مسئلہ کی طرح جیامٹریائی عرضی تراش سے چھوٹی ہے۔

ایک عام برقی اور مقناطیسی صفات والے کرے سے جو ایک ڈائیلکٹرک میں دفن ہے ایک مستوا لہر کا انتشار اسی طرز سے جیسے اوپر بتایا گیا ہے ہوتا ہے کرے کے اندر کے میدان کا بھی خیال کرنا ہوگا لیکن یہ شرط کہ E اور H دونوں کے مماسی اجزا حدوں کے آرپار مسلسل ہوں سب ضریبوں کو معلوم کرنے کے لیے کافی ہے کم تواتروں کی حد میں پھر یہ پایا جاتا ہے کہ عرضی تراش لہر لمبائی کی چوتھی قوت کے مقلوب تناسب میں بدلتی ہے۔

مجوّزہ حوالے

J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory.*

دھات کے حدود والے خطوں میں لہروں پر تصانیف بہت تیزی سے بڑھی ہیں
لیکن اصولوں اور اطلاقوں میں کام آنے والے بہت سے طریقوں پر اس کتاب
کے باب IX میں بحث کی گئی ہے باب VI اور VII میں سلنڈری اور
کرّوی لہروں کا بیان ہے۔

P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics.*

اس میں ریاضیاتی طریقے جن میں حدودی قیمتوں کے مسئلوں کے حل کے طریقے بھی
شامل ہیں، تشریح سے اور عمدہ طریقے سے پیش کیے گئے ہیں۔

E. U. Condon, "Principles of Microwave Radio," *Rev. Modern Phys.* 14 (1942).

ایک پرانا تبصرہ جو جوفوں اور گائڈوں کے طرزوں کی طبیعیات کی نہایت
عمدہ تمہید ہے۔

J. C. Slater, *Microwave Electronics.*

اسی مصنف کی *Rev. Modern Phys.* (1946) کی ایک تحریر کا بڑھایا ہوا زیادہ
حال کا (1950) ایک بیان جس میں طبیعیاتی اصولوں پر زور دیا گیا ہے۔

P. M. Morse, *Vibration and Sound,* and H. Lamb, *Hydrodynamics*

طولی لہروں کے سلنڈری انتشار کا سیکشن 13-7 کے نتائج سے موازنہ
کرنے کے لیے دلچسپ ہیں۔

باب VI میں کرّوی انتشار کا مکمل بیان ہے جس میں لہر لمبائی اور
قطر کے مختلف تناسبوں کے لیے زاویائی تقسیم شامل ہے۔ M. Born, *Optik.*
اس میں جن حدودی قیمت کے مسئلوں پر زور دیا گیا ہے ؛ ———
وہ تاروں پر کی لہروں کے ہیں اس A. Sommerfeld, *Electrodynamics.*
طرح یہ تصنیف اس باب کی اور اوپر دیے حوالوں کی بھی کمی پورا کرتی ہے۔

E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations.*

اس تصنیف کے باب 10 میں آئگن قیمت مسئلہ پر بحث ملے گی۔

E. Jahnke and F. Emde, *Tables of Functions.*

اعدادی اطلاقوں کے یہ سب سے عمدہ اور سب سے زیادہ سہولت کا فنکشنوں

کا چھوٹا گوشوارہ ہے۔

بیسل فنکشنوں کے اوصاف بہت G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions.* سے حوالوں میں ملیں گے لیکن پھیلاؤ، سلسلوں کے ثبوتوں کے لیے اور اسی قسم کی چیزوں کے لیے Watson بہت عمدہ ہے۔

مشق

1. ۔ دکھائیے کہ ایک چالک حد پر مقناطیسی میدان کے عمودی جز کی نسبت اس کے مماسی جز سے اسی درجہ کی ہے جو کہ کھال کی موٹائی کی اہتزازی میدانوں کی لہر لمبائی سے ہے۔

2. ۔ ایک مستطیلی جوف کو جس کے ابعاد a, a, L، ہیں اور دیواریں بڑی چالکتا σ کی ہیں نیچے لکھے طرز میں مشتعل کیا جاتا ہے:

$$E_z = E_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a) e^{-i\omega t},$$

$$H_z = E_x = E_y = 0.$$

ω کیا ہے۔ اُن قوتوں کا حساب لگائیے جو سب رُخوں پر لگتے ہیں۔ اس طرز کے لیے Q کیا ہے؟

3. ۔ دکھائیے کہ ایک مستطیلی عرضی تراش کے لہر گائڈ میں TE طرزوں کے لیے مطلق خاتم TM طرزوں کے مقابلے میں نیچا ہے۔ سب سے نیچے TE طرز کے لیے δ، e تخفیف ضربیہ نکالیے۔

4. ۔ ایک دائری عرضی تراش کے سلنڈری جوف کے لیے کم سے کم تواتر اس کی اونچائی اور نصف قطر کے لحاظ سے معلوم کیجیے۔ اس طرز کے لیے آپ Q کا اندازہ کیسے کریں گے؟

5. ۔ ایک چالک سلنڈر سے ہوئے انتشار کے لیے میدانوں اور عرضی تراش کو اس انتہائی حالت میں جب $ka \ll 1$ ہے معلوم کیجیے، اگر آنے والی لہر اس طرح تقطیب شدہ ہے کہ E کی سمت z، کی طرف ہے جو سلنڈر کے محور کے

متوازی ہے۔

6. ۔ سمتی قدری محوروں کی کسی دی ہوئی تشریق کے لیے لہر مساوات کا کوئی حل ان محوروں کی کسی دوسری تشریق کا بھی ایک حل ہوگا۔ ایک انتہائی چھوٹے گھماؤ کے لیے $\psi(r, \theta, \varphi)$ اور $\psi(r, \theta', \varphi')$ کے درمیان فرق پر غور یہ دکھانے کے لیے کیجیے کہ اگر ψ ایک حل ہے تو $r \times \nabla\psi$ بھی ایک حل ہے۔

7. ۔ سیکشن 13-9 کے انعکاسی کرّے پر لگنے والی کل قوت کا حساب لگایئے شرط یہ ہے کہ $ka \ll 1$. اگر کرّہ کمال چالک نہ ہو کر تانبے کا ہو تو آپ کے نتیجہ میں کیا تبدیلی ہوگی اس کا اندازہ لگایئے۔

8. ۔ ایک مکعب جوف لیجیے جس کی دیواریں کمال چالک ہیں۔ ثابت کیجیے کہ مکعب کے بازو l کے مقابلہ میں چھوٹی لہروں کے لیے تواتر کی وسعت $d\omega$ کے اندر طرزوں کی تعداد مندرجہ ذیل عبارت سے ملتی ہے:

$$\frac{l^3\omega^2\,d\omega}{\pi^2c^3},$$

یا $d\nu$ کے لیے عبارت

$$\frac{l^3 8\pi\nu^2\,d\nu}{c^3}.$$

سے ملتی ہے۔ کیا فی اکائی حجم طرزوں کی تعداد جوف کی شکل پر منحصر ہے؟ یہ فارمولا "سیاہ جسم" اشعاع نظریہ میں بڑی تاریخی اہمیت کا ہے۔

9. ۔ ثابت کیجیے کہ ایک ہم محوری لائن میں TEM لہریں $(E_z = 0$ $= H_z)$ ایسی رفتار سے ترسیل ہو سکتی ہیں جو حاجز وسیلہ میں آزاد برقی مقناطیسی لہروں کی رفتار کے برابر ہے۔ عرضی میدان کا نمونہ کیا ہے؟

باب (14)

غیر متجانس لہر مساوات

14-1 مضمروں کے لیے لہر مساوات

اشعاعی میدانوں کا ان ماخذ سے رشتہ سب سے زیادہ آسان طریقہ سے مضمر فنکشنوں کے لحاظ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ترغیب کے قانون کو نظر میں رکھتے ہوئے curl B ایک تغیر پذیر مقناطیسی میدان میں صفر نہیں ہوگا اس لیے اس حالت میں یہ ممکن نہیں ہے کہ برقی میدان کو محض ایک اسکیلر مضمر سے اخذ کیا جاسکے۔ لیکن B کا ڈائیورجنس ہر حالت میں غائب ہوجاتا ہے اور اس طرح مقناطیسی میدان کو اب بھی ایک ویکٹر مضمر

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{7-40}$$

سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ اگر مساوات (7-40) کو جائز مان لیا جائے تو برقی میدان کو ایک اسکیلر مضمر کے گریڈینٹ اور ویکٹر مضمر کی تبدیلی کی شرح سے ایک مزید غیر بقائی حصے کے جوڑ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ یعنی E کو درج ذیل رشتہ کے مطابق اسکیلر اور ویکٹر مضمروں کے ذریعہ اخذ کیا جاسکتا ہے:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{14-1}$$

جس سے E مساوات (9-7). کے تیسرے رشتہ کی مطابقت میں ہوجاتا ہے۔ پہلے کی طرح A کی ڈائیورجنس غیر تعریف شدہ ہے یا کم از کم ایک من مانے مقامی فنکشن کے اضافہ کے اندر غیر تعریف شدہ ہے۔ ہم A کے ڈائیورجنس کی تعریف

اس سے کرتے رہیں جسے لارنز شرط کہتے ہیں :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi = 0, \qquad (14\text{-}2)$$

جو آزاد فضا میں

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \qquad (14\text{-}3)$$

ہوجاتا ہے۔ پہلی نظر میں لگتا ہے کہ لارنز شرط ایک من مانا ضمنی رشتہ ہے لیکن بالکل ایسا نہیں ہے۔ ہم فوراً یہ دیکھتے ہیں کہ اس سے یہ فائدہ ہے کہ اسکیلر اور ویکٹر مضمروں میں پورا تشاکل آجاتا ہے یعنی اس سے دونوں مضمر اسی طرح مساوات کی پابندی کرتے ہیں جو کہ میدان کرتے ہیں۔ بعد کو ہم پائیں گے کہ لارنز شرط سے اسکیلر اور ویکٹر مضمروں کے درمیان ایک اضافیاتی ہم متغیر رشتہ بن جاتا ہے۔

یہ مضمر جن مساواتوں کی پابندی کرتے ہیں انھیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف تعریفی مساواتوں (7-40) اور (14-1) کو اور لارنز شرط کو میکسویل کی مساواتوں (9-7). کی پہلی اور چوتھی مساوات میں رکھنے کی ضرورت ہے۔ ہمیں ساواتوں کا یہ متشاکل سٹ ملتا ہے :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{j}', \qquad (14\text{-}4)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho/\epsilon. \qquad (14\text{-}5)$$

یہاں $\mathbf{j}'$ ایک کرنٹ بتاتا ہے جو $\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$, سے ملتا ہے۔ یہ کرنٹ کثافت کا وہ حصہ ہے جو باہری برقی محرک قوتوں کی وجہ سے پیدا ہوا ہے۔ اس میں اُس کرنٹ کا کوئی حصہ شامل نہیں ہے جو چالک وسیلوں میں برقی میدانوں کی ترغیب سے پیدا ہوتا ہے اور جسے مساوات (14-4). کی بائیں ہاتھ کی آخری رقم ظاہر کرتی ہے۔ اب ہم ایک علاماتی آپریٹر $\square$, کا استعمال کریں گے جسے ڈی المبرٹین کہتے ہیں اور جس کی تعریف یہ ہے :-

$$\square = \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (14\text{-}6)$$

آزاد فضا میں مساوات (14-4) اور (14-5) تب یہ ہو جاتے ہیں:

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}', \qquad (14\text{-}7)$$

$$\square \phi = -\rho/\epsilon_0, \qquad (14\text{-}8)$$

جہاں J' اور ρ میدان کے ماخذ ہیں اور یہ باہری وجوہات سے پیدا ہوتے ہیں۔ ان مساواتوں کو غیر متجانس لہر مساوات کہا جاتا ہے۔ ان کے خصوصی حلوں کو چارج اور کرنٹ تقسیموں کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جب کہ ان کے اضافی حل یعنی متجانس مساوات کے حل ظاہر ہے کہ محض لہری حل ہوں گے۔

مساوات (7-40) اور (14-1) کے معائنہ سے دیکھا جا سکتا ہے کہ ماحصل برقی اور مقناطیسی میدان میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اگر نیچے دیے قسم کے استحالے کر دیے جائیں:-

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi, \qquad (14\text{-}9)$$

$$\phi' = \phi + \frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (14\text{-}10)$$

جہاں سمتی قدروں کا اور وقت کا فنکشن ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر کوئی عام طبیعی قانون جو برقی مقناطیسی تفاعل پر مشتمل ہے عام برقی حرکیاتی مضمروں $\mathbf{A}$ اور ϕ کے لحاظ سے ظاہر کیا جاتا ہے تو مساوات (14-9) اور (14-10) میں دیے ہوئے قسم کے استحالہ سے اس طبیعی قانون پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔ ان استحالوں کو عام طور سے پیمائشی تبادل کہا جاتا ہے اور اس طبیعی قانون کو جو ایسے تبادلہ غیر متغیر رہے پیمائشی غیر متغیر کہا جاتا ہے پیمائشی غیر متغیری صفت کی وجہ سے وہ طبیعی قانون ایسے نتائج پر نہیں پہنچائے گا جن کو چارجوں اور کرنٹوں کے تفاعل کی میدانی تشکیل میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔

14-2 فوریر تجزیہ کے ذریعہ حل

ہم غیر متجانس مساواتوں کے خصوصی حلوں کی تفتیش کو اس کے ہم پلہ سکونی مسئلہ پر ایک نظر ثانی سے شروع کریں گے۔ سکونی حالت کے لیے مساوات (14-8) پوائسان کا مساوات

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0, \tag{1-35}$$

بن جاتا ہے۔ جس کا خصوصی حل یہ ہے :

$$\phi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(x'_\alpha)}{r(x_\alpha, x'_\alpha)}\,dv'$$

اب ہم جو چیز معلوم کرنا چاہتے ہیں وہ یہ ہے کہ مساوات (14-7) میں وقت پر منحصر رقم کی موجودگی سے مساوات (1-35) کے حل میں کیا ترمیم ہوگی۔

ϕ اور A دونوں کی مساواتیں اس عام شکل کی ہیں :

$$\Box\psi(x_\alpha, t) = -g(x_\alpha, t). \tag{14-11}$$

آیئے اب ہم یہ مان لیں کہ مآخذ فنکشن $g(x_\alpha, t)$ کا فوریر انٹیگرل

$$g(x_\alpha, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\omega(x_\alpha)e^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{14-12}$$

کے ذریعہ تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔ جس کا فوریر تقلیب (inversion) یہ ہے:

$$g_\omega(x_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_\alpha, t)e^{i\omega t}\,dt. \tag{14-13}$$

اس طرح سے ہم عام مضمر $\psi(x_\alpha, t)$ کا تجزیہ فوریر جزوں میں کر سکتے ہیں۔

$$\psi(x_\alpha, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\omega(x_\alpha)e^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{14-14}$$

جس کا مطابقہ تقلیب رشتہ

$$\psi_\omega(x_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_\alpha, t)e^{i\omega t}\,dt. \tag{14-15}$$

ہے۔ مساوات (14-12) اور (14-14) کو مساوات (14-11) میں رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ فوریر جزو $\psi_\omega(x_\alpha)$ اِس تفرقی رشتہ کی پابندی کرتا ہے۔

$$\nabla^2\psi_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\psi_\omega = -g_\omega, \qquad (14\text{–}16)$$

جو پوائسان مساوات کے مشابہ ہے۔

ہم مساوات (14-16) کے حل کا تواصل اکائی نقطہ حلوں کے انطباق سے کر سکتے ہیں جو نقطہ x'_α پر مقیم ماٰخذ کے لیے $g_\omega(x_\alpha) = \delta(x_\alpha - x'_\alpha)$ دیتے ہیں جہاں $\delta(x_\alpha - x'_\alpha)$ ڈیراک δ فنکشن ہے۔ ہر اکائی ماٰخذ مضر اس مساوات کو مطمئن کرتا ہے:

$$\nabla^2 G(x_\alpha, x'_\alpha) + \frac{\omega^2}{c^2} G(x_\alpha, x'_\alpha) = -\delta(x_\alpha - x'_\alpha), \qquad (14\text{–}17)$$

جہاں G x_α اور x'_α دونوں کا فنکشن ہے۔ تب کل ماٰخذ کے تواتر ω کے مطابق جزوی حل اس انطباق سے ملتا ہے:

$$\psi_\omega(x_\alpha) = \int g_\omega(x'_\alpha) G(x_\alpha, x'_\alpha)\, dv'. \qquad (14\text{–}18)$$

G معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (14-17) کا حل نقطہ x_α اور نقطہ x'_α کے درمیان فاصلہ r کے لیے کروی تشاکل والا ہوگا اور اس لیے $r = 0$ کو چھوڑ کر اور سب نقطوں پر بعینہٖ وہی ہوگا جو کہ اس مساوات

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rG)}{dr^2} + k^2 G = 0,$$

کا حل ہے۔ جہاں حسب معمول $k = \omega/c$ اس مساوات کا انٹیگرل فوراً نکالا جا سکتا ہے جس سے:

$$G = \frac{A}{r} e^{\pm ikr}.$$

ملتا ہے۔ مستقلہ A کی قیمت نکالنے کے لیے ہم مساوات (14-17) کے حجمی انٹیگرل

پر غور کرتے ہیں جو نادر نقطہ $r = 0$ کے قرب کے اوپر لیا گیا ہے۔ یہاں G کا رویہ A/r, کی طرح ہے اور انٹیگریشن میں مساوات (1-11) کا استعمال کرنے سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $-4\pi A = -1$. اس لیے

$$G = \frac{1}{4\pi r} e^{\pm ikr} \tag{14-19}$$

مساوات (14-17) کا حل ہے اور اسے مساوات (14-18) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$\psi_\omega(x_a) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g_\omega(x'_a)}{r(x_a, x'_a)} e^{\pm ikr(x_a, x'_a)} \, dv'. \tag{14-20}$$

مساوات (16-14) کی دوہری اثر ترتیب صرف باب 1. کے کولوم مضمر اظہار میں ایک مخلوط ایکسپونینشی جز کو داخل کر دینا ہے۔

مساوات (14-20) کا لحاظ رکھتے ہوئے وقتی انحصار والا مضمر جو مساوات (14-11) کی پابندی کرتا ہے یہ ہے۔

$$\psi(x_a, t) = \int \psi_\omega(x_a) e^{-i\omega t} \, d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{g_\omega(x'_a) e^{-i(\omega t \pm kr)}}{r(x_a, x'_a)} \, d\omega \, dv'. \tag{14-21}$$

ہم ایک نیا وقت

$$t'(x_a, x'_a) = t \pm r/c = t \pm kr/\omega, \tag{14-22}$$

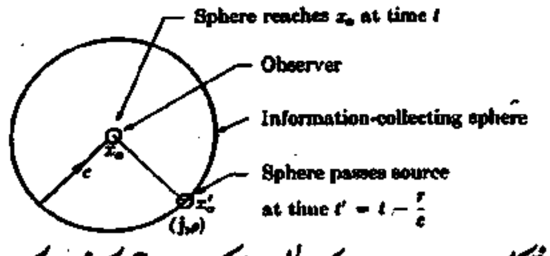
استعمال کرتے ہیں جو وقت کے بنیادی نقطہ کو اتنے وقت کے برابر ہٹا دینے کے برابر ہے جو روشنی کے سگنل کو نقطہ x'_a سے نقطہ x_a. تک ترسیل ہونے میں لگتا ہے۔ اب اگر ہم مساوات (14-12), کا استعمال کر کے فوریر استحالہ کو دریافت کریں تو ہم یہ پاتے ہیں:-

$$\psi(x_a, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(x'_a, t \pm r/c)}{r(x_a, x'_a)} \, dv'. \tag{14-23}$$

دھیان رکھیے کہ نقطہ مشاہدہ صریحاً انٹیگرینڈ کے نسب نما میں شامل ہے اور مساوات

(14-22) کے ذریعہ اُس وقت میں بھی شامل ہے جس پر وقت کے ساتھ بدلنے والے کرنٹ اور چارج انٹیگریشن میں داخل کیے گئے ہیں۔ ریاضیاتی طور پر مساوات (14-23) میں مثبت اور منفی دونوں نشان جائز ہیں لیکن طبیعی اہمیت صرف منفی نشان کی معلوم ہوتی ہے۔ ہمارا واسطہ x_0' پر واقع ماٰخذ کے x_0 پر اثر سے ہے اور منفی نشان سبب کے اثر سے پہلے ہونے سے مطابقت رکھتا ہے۔ منفی نشان کے ساتھ مساوات (14-23) کو غیر متجانس لہر مساوات کا مبطی مضمر حل کہا جاتا ہے۔ مثبت نشان والے حل کو اقدامی مضمر حل (advanced potential) استعمال سببیات (causality:) کے بنیادی تصورات کے خلاف معلوم ہوتا ہے اس کا مطلب ہے کہ اثر وقت میں سبب سے پہلے ہوتا ہے۔ اس وجہ سے ہم اس وقت اس حل کو چھوڑ دیتے ہیں کیونکہ یہ صریحاً ہمارے تجربے کے خلاف ہے۔ ایسا نہیں معلوم ہوتا کہ جو چارج اور کرنٹ میدان کو پیدا کرتے ہیں ان سے پہلے میدان نمودار ہو۔ تاہم میدانی مساواتوں کا جو بنیادی طور پر وقت میں سمٹرک ہیں ریاضیاتی نقطہ سے ایک جائز حل ہے۔ باب 21, میں ہم اس سوال کو پھر اٹھائیں گے لیکن فی الحال ہم اپنی بحث کو بس مبطی مضمری حلوں کے استعمال تک محدود رکھیں گے۔

ایک مبطی مضمر کو حسب ذیل طرح سے سمجھا جا سکتا ہے۔ مان لیجیے کہ ایک مشاہد فضا میں x_0 پر مقیم ہے جیسا کہ شکل 14-1, سے دیکھا جا سکتا ہے اور مان لیجیے کہ ایک کرہ جس کا مرکز x_0 پر ہے ایک قطری رفتار c سے اس طرح سکڑ رہا ہے کہ مشاہدہ کے ٹھیک وقت t پر وہ نقطہ پر پہنچتا ہے تو جس وقت یہ اطلاع جمع کرنے والا کرہ نقطہ x_0' پر واقع برقی میدان کے ماٰخذ پر سے گزرتا ہے وہ وقت t' ہے جب منبع نے وہ اثر پیدا کیا جو x_0 پر وقت t پر محسوس ہوا



[شکل 14-1. x_0 پر کے مبطی مضمر کی اطلاع جمع کرنیوالا کرہ]

اگر ہم مستطیلی براکٹ نشان [ ] سے یہ ظاہر کریں کہ براکٹ کے اندر کے متغیروں کی قیمت مبنی وقت t_r پر لی جانی چاہیے تو کرنٹ تقسیم $\mathbf{j}(x'_a)$ اور چارج تقسیم $\rho(x'_a)$ کے مطابق غیر یکساں لہر مساواتوں (14-7) اور (14-8) کے انٹیگرلوں کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\mathbf{A}(x_a, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\mathbf{j}(x'_a)]}{r(x_a, x'_a)}\, dv', \qquad (14\text{-}24)$$

$$\phi(x_a, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{[\rho(x'_a)]}{r(x_a, x'_a)}\, dv' \qquad . (14\text{-}25)$$

14-3 اشعاع کے میدان

سیکشن 14-2 میں نکالے گئے غیر یکساں لہر مساوات کے حل اس پر مبنی تھے کہ مضروں اور کرنٹوں کے فوریر استحالے مل سکتے ہیں۔ اصولاً وہ ایسے میدانوں کے لیے لاگو نہیں ہوں گے جو ایسے ماخذ سے پیدا ہوئے ہیں جو صرف ایک تواتر کی اشعاع پیدا کرتے ہیں کیونکہ ایک مطلق واحد تواتری منبع کا مطلب ہے کہ اشعاع لا انتہا وقت تک جاری رہتی ہے۔ پھر بھی ہم نتائج کو واحد تواتری ماخذ پر لاگو کر سکتے ہیں اگر ہم یہ ذہن نشین کر لیں کہ قاعدے میں ہمیں ان نتائج کو اول ایک متناہی وقفہ کے پلس کو لے کر ایک محدود عمل کے ذریعہ اخذ کرنا چاہیے۔ اشعاع کے ایک پلس کے لیے جو متناہی وقت کی ہو ہم مساوات (14-20) کے مطابق لکھ سکتے ہیں کہ:

$$\mathbf{A}_\omega(x_a) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikr}}{r}\, dv', \qquad (14\text{-}26)$$

$$\phi_\omega(x_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho_\omega \frac{e^{ikr}}{r}\, dv' \qquad (14\text{-}27)$$

اور

$$\mathbf{A}(x_a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_\omega(x_a) e^{-i\omega t}\, d\omega, \qquad (14\text{-}28)$$

$$\phi(x_a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\omega(x_a) e^{-i\omega t}\, d\omega, \qquad (14\text{-}29)$$

اور اسی کے مطابقت کے رشتے j_ω اور ρ_ω کے لیے بھی لکھ سکتے ہیں۔ میدان حقیقی ہیں ؛ اس لیے فوریراجزا ϕ_ω, A_ω اس شرط کی پابندی کرتے ہیں۔

$$A_\omega = A^*_{-\omega}, \qquad \phi_\omega = \phi^*_{-\omega}, \tag{14-30}$$

جہاں * مخلوط زوج بتاتا ہے۔

اگر مآخذ موثر طور پر واحد تواتری ہے تو مضمروں اور مآخذ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے ؛

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 e^{-i\omega t}, \\ \phi(t) &= \phi_0 e^{-i\omega t}, \\ j(t) &= j_0 e^{-i\omega t}, \\ \rho(t) &= \rho_0 e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{14-31}$$

جہاں ہر عبارت کے حقیقی حصّہ سے ہی مطلب ہے۔ جو کچھ اوپر کہا گیا ہے اس کے مطابق ہم مان لیں گے کہ مساوات (14-26) اور (14-27) کے منطبق مضمر حل واحد تواتری وسعتوں (14-31) کے لیے اور فوریر جزوں کے لیے بھی جائز ہیں۔ یہ ہم مترادف صرف مآخذ اور میدانوں کے درمیان خطی رشتوں کے لیے صحیح ہوگا ؛ دو قوتی فنکشن مثلاً ترسیلی اشعاع کی توانائی کے لیے دونوں حالتوں کو الگ الگ حل کرنا ہوگا۔

آیئے اب ہم میدانوں کا حساب لگائیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ لارنز شرط مساوات (14-3), کا ہمارا مفروضہ مضمروں کے درمیان یہ رشتہ دیتا ہے :

$$\nabla \cdot A_\omega - \frac{ik}{c}\phi_\omega = 0. \tag{14-32}$$

مقناطیسی میدان کا جز $B_\omega(x_\omega)$ اس سے ملتا ہے :

$$B_\omega(x_\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int j_\omega \frac{e^{ikr}}{r}\,dv'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{j}_\omega(x'_a) \times \nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int \frac{\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{r}}{r^3} e^{ikr}\, dv' - ik\int \frac{\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{r}}{r^2} e^{ikr}\, dv'\right\}. \quad (14\text{-}33)$$

مساوات (14-33) کی پہلی رقم محض مساوات (7-41)؛ سے دستیاب ہونے سکونی مقناطیسی حل کی مبطّی (retarded) شکل ہے ۔ اسے "ترغیبی میدان" کہتے ہیں دوسری رقم کو جو فاصلہ پر r^{-1} کے تناسب سے منحصر ہے "اشعاع میدان" کہتے ہیں، فوریر جزوں B_ω کی پھر سے ترکیب کرنے پر ملتا ہے:

$$\mathbf{B}(x_a, t) = \int \mathbf{B}_\omega(x_a)e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (14\text{-}34)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{[\mathbf{j}] \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{c}\,\frac{[\dot{\mathbf{j}}] \times \mathbf{r}}{r^2}\right) dv',$$

جہاں

$$[\dot{\mathbf{j}}(x'_a)] = \int (-i\omega)\mathbf{j}_\omega(x'_a)e^{i(kr-\omega t)}\, d\omega \qquad (14\text{-}35)$$

کرنٹ کی وقت کے ساتھ بدلنے کی شرح اُس وقت پر ہے جس وقت شکل 14-1 کا جانکاری فراہم کرنے والا کرّہ "مآخذ نقطہ x'_a سے گزرا ہے۔

اب ہم طبیعی لحاظ سے تشخیص کر سکتے ہیں کہ مبطّی مضمر کیوں ایسے میدانی حل دیتے ہیں جو $1/r$ کے حساب سے بدلتے ہیں۔ مضمروں پر کام کرنے والا آپریٹر ∇ ہمسایہ میدانی نقطوں کے مضمروں کا موازنہ بہ یک وقت کرتا ہے۔ لیکن دونوں جانکاری فراہم کرنے والے کرّے جو ایک ساتھ دونوں میدانی نقطوں پر جمع ہوتے ہیں، ایک ویسے مآخذ نقطہ پر ایک ساتھ نہیں پہنچے ہوں گے ۔ اس لیے میدانی نقطے پر کے تفرقی آپریٹر میں مآخذ پر کا وقتی تفرق شامل ہے جیسا کہ اوپر باقاعدہ دکھایا گیا ہے۔ برقی میدان کا حساب کسی قدر زیادہ پیچیدہ ہے۔ مساوات (14-1), سے $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, رکھ کر ہم پاتے ہیں کہ

$$4\pi\epsilon_0 E_\omega = -\int \rho_\omega \nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dv' - \frac{1}{c^2}\int\left(-i\omega \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikr}}{r}\right) dv'$$

$$= \int \frac{\rho_\omega \mathbf{r}}{r^3} e^{ikr}\, dv' - ik \int \left(\frac{\rho_\omega \mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{j}_\omega}{c} \right) \frac{e^{ikr}}{r}\, dv'. \qquad (14\text{–}36)$$

پہلی رقم محض مبطلی کولوم میدان ہے۔ دوسرے انیٹگرل میں جسے ہم $\mathbf{I}_\omega$ کہیں گے اشعاع کی رقم شامل ہے۔ اس انیٹگرل کو اور صاف کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $\mathbf{j}_\omega$ اور ρ_ω آزاد نہیں ہیں بلکہ تسلسل مساوات کے ذریعہ جڑے ہوئے ہیں جو چارج کی برقراریت کو ظاہر کرتا ہے۔

$$\nabla' \cdot \mathbf{j}_\omega - i\omega\rho_\omega = 0. \qquad (14\text{–}37)$$

اس لیے

$$\mathbf{I}_\omega = -\frac{1}{c} \left\{ \int \left[\frac{(\nabla' \cdot \mathbf{j}_\omega)\mathbf{r}}{r} - ik\mathbf{j}_\omega \right] \frac{e^{ikr}}{r}\, dv' \right\}, \qquad (14\text{–}38)$$

جس کا α جز

$$I_{\omega\alpha} = -\frac{1}{c} \left\{ \int \left[\frac{\partial j_{\omega\beta}}{\partial x'_\beta} \frac{r_\alpha}{r} - ikj_{\omega\alpha} \right] \frac{e^{ikr}}{r}\, dv' \right\},$$

ہے جہاں $r_\alpha = x_\alpha - x'_\alpha$ (دھیان رکھیے کہ β صرف ایک جوڑ کا اشاریہ ہے)۔ اس عبارت کو پھر سے یوں لکھا جا سکتا ہے:

$$I_{\omega\alpha} = \frac{1}{c} \int \left[j_{\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \left(\frac{r_\alpha e^{ikr}}{r^2} \right) + ikj_{\omega\alpha} \frac{e^{ikr}}{r} \right] dv'$$

$$- \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \left(j_{\omega\beta} \frac{r_\alpha e^{ikr}}{r^2} \right) dv'. \qquad (14\text{–}39)$$

مساوات (14–39) کی آخری رقم گاس کے مصدقہ کے مطابق ایک سطحی انیٹگرل کے مساوی ہے؛ اگر $\mathbf{j}_\omega$ فضا میں محدود ہے تو یہ انیٹگرل غائب ہو جائے گا۔ عام رشتوں

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial x'_\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} [f(r)] = -f'(r) \frac{r_\alpha}{r},$$

کا استعمال کرنے پر ہم باقی بچی عبارت سے یہ پلٹتے ہیں :

$$l_\omega = \frac{1}{c}\int\left[-\mathbf{j}_\omega\frac{e^{ikr}}{r^2} + \frac{2}{r^4}(\mathbf{j}_\omega\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}e^{ikr}\right]dv' + \frac{ik}{c}\int\left[-\frac{(\mathbf{j}_\omega\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3}e^{ikr} + \mathbf{j}_\omega\frac{e^{ikr}}{r}\right]dv', \quad (14\text{–}40)$$

$$\mathbf{L}_\omega = \frac{1}{c}\int[(\mathbf{j}_\omega\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{r}\times(\mathbf{j}_\omega\times\mathbf{r})]\frac{e^{ikr}}{r^4}dv' + \frac{ik}{c}\int[\mathbf{r}\times(\mathbf{j}_\omega\times\mathbf{r})]\frac{e^{ikr}}{r^3}dv'. \quad (14\text{–}41)$$

دھیان دیجیے کہ صرف آخری رقم فاصلہ کے ساتھ $1/r$. کے حساب سے بدلتی ہے۔ اگر ہم میدان کا ترکیب اس کے فوریر ٹکڑوں سے کریں تو ہم مساوات (14–35) اور (14–41) سے پلٹتے ہیں کہ

$$4\pi\epsilon_0\mathbf{E} = \int\frac{[\rho]\mathbf{r}}{r^3}dv' + \frac{1}{c}\int\frac{\{([\mathbf{j}]\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{r}\times([\mathbf{j}]\times\mathbf{r})\}}{r^4}dv' + \frac{1}{c^2}\int\frac{([\dot{\mathbf{j}}]\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}}{r^3}dv'. \quad (14\text{–}42)$$

صرف اشعاع میدان اس سے ملتے ہیں :

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0c^3}\int\frac{[\dot{\mathbf{j}}]\times\mathbf{r}}{r^2}dv',$$

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0c^2}\int\frac{([\dot{\mathbf{j}}]\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}}{r^3}dv'. \quad (14\text{–}43)$$

مآخذ سے بڑے فاصلوں پر یہ میدان ترسیلی سمت کے عمودی ہوتے ہیں اور برقی میدان $\mathbf{E}$ کی مقناطیسی میدان $\mathbf{H}$ سے نسبت $(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ ہے جیسا کہ مستوا لہروں کے لیے ہوتا ہے۔

14-4 مخروج توانائی

آئیے اب ہم مساوات (14–43) کے میدانوں کے مطابقت کی مخروج توانائی کا حساب کریں۔

یہاں یہ ضروری ہے کہ ہم اشعاع کے ایک پلس اور فوریر میدانی اجزا E_ω اور B_ω میں اور ایک واحد تواتری ماخذ کے میدانی اجزا کو ظاہر کرنے والے E_0 اور B_0 میں امتیاز کریں۔

ہم پہلے اشعاع کے پلس پر غور کریں گے۔ ترسیلی سمت کے عمودی ایک اکائی رقبہ سے ہو کر گزرنے والی کل اشعاع کی توانائی پوائنٹنگ ویکٹر N کا وقتی اینٹگرل ہوتی ہے جو یہ ہے:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{N}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{H}_{\omega'})e^{-i(\omega+\omega')t}\,d\omega\,d\omega'\,dt. \quad (14\text{–}44)$$

بالعموم یہ صحیح ہے کہ اگر $f(t)$ اور $g(t)$ دو حقیقی فنکشن ہیں جن کے فوریر استحالے f_ω اور g_ω ہیں تو ان کے حاصل ضرب کا وقت کے اوپر انٹیگرل یہ ہے:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt = 2\pi\int_0^{\infty} (f_\omega g_\omega^* + f_\omega^* g_\omega)\,d\omega. \qquad (14\text{–}45)$$

یہ دکھانے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ تعریف کے مطابق

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} f_\omega g_{\omega'}\,d\omega\,d\omega'\,dt. \qquad (14\text{–}46)$$

وقت پر لیے گئے انٹیگرل کی فنکشنی صفات $2\pi\,\delta(\omega+\omega')$ کی ہیں جہاں $\delta(\omega+\omega')$ ایک ابعادی ڈیلٹا فنکشن ہے۔ اسے نیچے کے شکل کے انٹیگرل کا معائنہ کرنے سے دیکھا جا سکتا ہے۔

$$J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}\,dt, \qquad (14\text{–}47)$$

جو واضح طور پر $a = 0$ کے لیے غیر مرکوز ہے اور اگر $a \neq 0$ تو یہ متناہی حدوں کے فنکشن کی شکل میں تیزی سے اہتزاز کرے گا۔ اگر ہم حدوں کی جگہ $\pm L$

رکھ دیں تو ہم پاتے ہیں :

$$J(a) = \int_{-L}^{L} e^{iat}\, dt = (2 \sin aL)/a,$$

اور L کی سب قیمتوں کے لیے

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(a)\, da = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin aL}{a}\, da = 2\pi \qquad (14\text{–}48)$$

اس لیے $J(a)$ کے اندر $2\pi\,\delta(a)$, کی صفات اس معنی میں ہیں کہ دونوں اینٹگر بینڈ کے اندر چیزوں کی شکل میں ایک سا رویہ رکھتے ہیں۔ اس اطلاق سے مساوات (14–46) یہ ہو جاتا ہے :

$$I = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega g_{-\omega}\, d\omega = 2\pi\left[\int_0^{\infty} f_\omega g_{-\omega}\, d\omega + \int_{-\infty}^{0} f_\omega g_{-\omega}\, d\omega\right]$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} (f_\omega g_\omega^* + f_\omega^* g_\omega)\, d\omega, \qquad (14\text{–}49)$$

کیونکہ $g_\omega^* = g_{-\omega}$ اور $f_{-\omega} = f_\omega^*$ اگر $g(t)$ اور $f(t)$, حقیقی ہوں۔ اس طرح رشتہ (14–45) مسلّم ہو جاتا ہے اور نتائج کا استعمال مساوات (14–44), کی قیمت نکالنے کے لیے کیا جا سکتا ہے۔ اگر $f(t) = g(t)$, تو مساوات (14–49) محض یہ ہو جاتا ہے :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\, dt = 4\pi\int_0^{\infty} |f_\omega|^2\, d\omega. \qquad (14\text{–}49')$$

اب اشعاعی میدانوں کے فوریر اجزا مساوات (14–34) اور (14–41) کے مطابق یہ ہیں :

$$\mathbf{B}_{\omega\text{rad}} = \frac{-ik\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{r}}{r^2}\, e^{ikr}\, dv' = \frac{-i\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}}{r}\, e^{ikr}\, dv', \qquad (14\text{–}43')$$

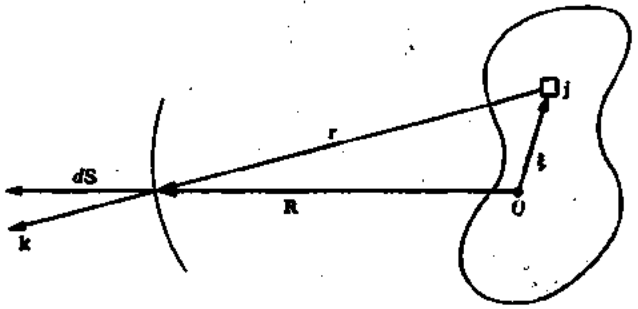
$$\mathbf{E}_{\omega\text{rad}} = \frac{ik}{4\pi\epsilon_0 c}\int \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{r})]}{r^3}\, e^{ikr}\, dv' = \frac{i}{4\pi\epsilon_0 c}\int \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k})]}{r^2}\, e^{ikr}\, dv',$$

جہاں $\mathbf{k} = k\mathbf{r}/r$ ترسیلی ویکٹر ہے۔ ان میدانوں کو مساوات (14-49) میں رکھنے پر اور مساوات (14-49) کا استعمال کرکے ہمیں کل خارج ہوئی توانائی مل جاتی ہے :

$$U = \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{N}(t) \cdot d\mathbf{S}\, dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \int_S \int_\omega \left| \int \frac{\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}}{r} e^{ikr}\, dv' \right|^2 \left(\frac{\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}}{k}\right) d\omega, \quad (14\text{-}50)$$

جہاں S مبدا کے گرد اور ماخذ کو گھیرے ہوئے ایک بڑا کرہ ہے جس کا نصف قطر R ہے۔ ظاہر ہے کہ خارج ہوئی اشعاع کی توانائی کسی خاص سطح S سے آزاد ہونا چاہیے گو کہ اس کی زاویائی تقسیم ماخذ کی سمتی قدروں $\boldsymbol{\xi}(x_0')$ پر منحصر ہوگی۔ شکل 14-2 کے حوالہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ماخذ کے ابعاد کے مقابلے



[شکل 14-2. ایک کرنٹ نظام j سے جو کسی من مانے مبدا O سے ξ فاصلہ پر ہے خارج ہوئی اشعاع کی توانائی کے انٹیگریشن کے لیے جیامیٹری.]

میں R بڑا ہو تو :

$$kr \simeq kR - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}(x_0'),$$

اور

$$\frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{k}}{r^2 k} = d\Omega,$$

جہاں $d\Omega$ وہ ٹھوس زاویہ ہے جو dS مبدا O پر گھیرتا ہے۔ اس لیے اگر U کو اس طرح لکھیں:

$$U = \int_0^\infty U_\omega \, d\omega, \qquad (14\text{-}51)$$

تو

$$\frac{dU_\omega}{d\Omega} d\omega = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \left| \int (\mathbf{j}_\omega \times \mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')} \, dv' \right|^2 d\omega \qquad (14\text{-}52)$$

وہ توانائی ہے جو اشعاع کی شکل میں ایک تواتر پٹی $d\omega$ کے اندر ہر اکائی ٹھوس زاویہ میں ہو کر خارج ہوتی ہے۔ دھیان دیجیے کہ وہ انٹیگرل جو اشعاع خارج کرنے والے نظام کی طاقت کی تعریف کرتا ہے صرف ماخذ کی سمتی قدروں پر مشتمل ہے۔

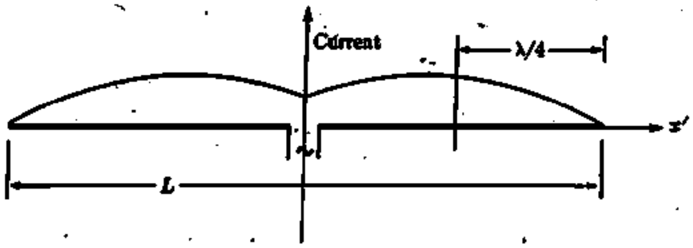
اگر ماخذ واحد تواتری ہے جس کا صرف ایک تواتر ω ہے تو ہم ایک سائیکل پر اوسط خارج ہوئی اشعاع کی توانائی P کی تعریف کر سکتے ہیں۔ مساوات (11-22) سے دو ویکٹروں کے جو $e^{-i\omega t}$ کے حساب سے بدل رہے ہیں حقیقی حصوں کے حاصل ضرب کا وقتی اوسط ایک ویکٹر کے حقیقی حصہ اور دوسرے کے مخلوط زوج کے حاصل ضرب کے آدھے کے برابر ہے۔ اس لیے سیکشن 14-3 کے اشعاعی میدان فی اکائی ٹھوس زاویہ خارج ہوئی طاقت کے لیے عبارت

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \left| \int (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')} \, dv' \right|^2 \qquad (14\text{-}53)$$

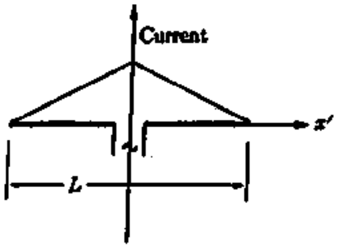
دیتے ہیں۔ آئیے ہم اس نارمولے کا اطلاق ایک خطی اینٹنا کے مسئلہ پر کریں جو ایک سیدھا تار ہے۔ عام طور سے اس طرح کے مسئلہ کا حل بالکل صحیح نہیں مل سکتا، کیونکہ کرنٹ تقسیم اشعاع کے میدان پر منحصر ہوتی ہے، جب کہ جیسا اوپر بتایا گیا ہے اشعاع کا میدان کرنٹوں سے ملتا ہے، اس طرح ایک صحیح حل کے لیے اشعاع کا اور میدان کے پورے حدودی قیمت کے مسئلہ کو دھیان میں رکھنا ہوگا۔ اس کا حل تجزیاتی طریقوں سے صرف چنے ہوئے مثالی جیامیٹریوں کے لیے

ہو سکتا ہے[1]

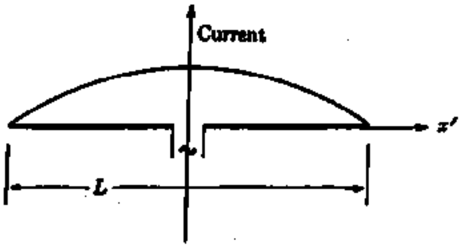
اگر ہم اس مثالی حالت پر غور کریں جس میں ایک لمبے سیدھے تار کے بیچ میں مقیم ایک ماخذ سے طاقت بہم پہنچائی جا رہی ہے تو جب تک مزاحمت اور اشعاع کے خساروں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے تار پر تقسیم کرنٹ وہی ہے جو ایک بغیر



(a) general case



(b) $kL \ll 1$



(c) $kL = \pi$; $L = \lambda/2$

[شکل L.14-3. لمبائی کے مرکز سے قوت لینے والی مثالی خطی اینٹناؤں کے اوپر تقسیم کرنٹ]

---

1 مثال کے لیے دیکھئے دو کونی اینٹنا جس پر S. A. Schelkunoff, کی *Electro-magnetic Waves,* میں بحث کی گئی ہے: D. Van Nostrand Co., New York, 1943, pp. 441 ff.

اخشارہ کی ترسیلی لائن پر ہے زا ایسی لائن ایک مقیم لہر کو جس کا لہر نمبر k ہو برقرار رکھ سکتی ہے جس کا مطابق چلاؤ کر (driving) زاویائی تواتر ω ایسا ہے کہ $c = \omega/k$. اگر تار جس کی پوری لمبائی L ہے انتہائی پتلا ہے تو اس کے سروں پر کرنٹ لازمی غائب ہو جائے گی (شکل 14-3) اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\mathbf{j}_0(x', y', z') = J_0\,\delta(y')\,\delta(x')\,\frac{\sin[k(L/2 - |z'|)]}{\sin(kL/2)}\,\mathbf{z}, \qquad (14\text{-}54)$$

جہاں J_0 فیڈ نقطہ $z = 0$ پر فوریر کرنٹ ہے۔
اس طرح مساوات (14-53) کا حجمی اینٹگرل یہ ہو جاتا ہے:

$$\left|\int (\mathbf{j}_0\times\mathbf{k})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\,d\mathbf{x}'\right| = \frac{2J_0k\sin\theta}{\sin(kL/2)}\int_0^{L/2}\sin\left[k\left(\frac{L}{2}-z'\right)\right]\cos(kz'\cos\theta)\,dz' \qquad (14\text{-}55)$$

$$= \frac{2J_0}{\sin\theta\,\sin(kL/2)}\left\{\cos\left[\frac{kL}{2}(\cos\theta)\right] - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)\right\}.$$

دھیان رکھیے جیسے جیسے $kL \to 0$, یعنی اینٹنا لہر لمبائی کے مقابلہ میں چھوٹا ہوتا جاتا ہے (شکل 14-3b). اوپر لکھی مقدار

$$\tfrac{1}{2}J_0(kL)\sin\theta \qquad (14\text{-}55')$$

کی طرف مائل ہوتی ہے۔

اگر ہم $R_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$, لیں اور $d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta$ رکھیں تو مساوات (14-53) کے مطابق پوری خارج ہوئی مخروج طاقت یہ ہوگی:

$$P = \frac{R_0}{4\pi}J_0^2\int_0^{\pi}\left\{\frac{\cos[(kL/2)\cos\theta] - \cos(kL/2)}{\sin(kL/2)\sin\theta}\right\}^2\sin\theta\,d\theta. \qquad (14\text{-}56)$$

عام حالت میں اس اینٹگرل کی قیمت عددی طریقہ سے یا پھیلا کر نکالنی ہوگی۔ حد $kL \to 0$ کی حالت میں [دیکھیے مساوات (14-56')] طاقت کی عبارت مندرجہ ذیل ہو جاتی ہے

$$P = \frac{\pi}{12}R_0J_0^2\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2. \qquad (14\text{-}56')$$

مقدار $P/J_{eff}^2 = P/(\frac{1}{2}J_0^2)$ کو عام طور سے اشعاعی مزاحمت R_{rad}؛ کہا جاتا ہے؛ یہ وہ مزاحمت ہے جو طاقت کا وہی خسارہ دے گی جو اشعاع سے ہوتا ہے، اگر چلاؤ نقطہ پر جوڑ دیا جائے، اس طرح $kL \to 0$، کی حالت میں

$$R_{rad} = \frac{\pi}{6} R_0 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 = 197(L/\lambda)^2 \text{ ohms.} \tag{14-57}$$

[1]

عملی طور پر اس اہم حالت میں جب $kL = \pi,\ L = \lambda/2$ [شکل (c)14-3] مساوات (14-56) یہ ہو جاتا ہے؛

$$P = \frac{R_0}{4\pi} J_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta} \sin\theta \, d\theta. \tag{14-58}$$

اس کی قیمت غیر بنیادی فنکشنوں کے لحاظ سے نکالی جا سکتی ہے؛ عددی شکل میں "نصف لہر" اینٹنا کے لیے:

$$R_{rad} = P/(J_0^2/2) = 73.1 \text{ ohms} \tag{14-59}$$

مساوات (14-53) کے ذریعہ ہم خارج ہوئی توانائی کی طاقت اور اشعاع کی زاویائی تقسیم کا حساب ایک اینٹنا میں کسی من مانے دیے ہوئے تقسیم کرنٹ کے لیے کر سکتے ہیں۔ مزید مثالوں کے لیے ناظرین انجینیری تصانیف کا مطالعہ کریں۔

14-5 ہرز مضمر

مساوات (14-3) کی لارنز شرط جو اسکیلر اور ویکٹر مفردل کے درمیان رشتہ قائم کرتی ہے تسلسل کے مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{7-1}$$

---

[1] یہ رشتہ

$$R_{rad} = (2\pi/3)R_0(L/\lambda)^2 = 789(L/\lambda)^2 \text{ ohms} \tag{14-57'}$$

کا جو بہت سے حوالوں میں ملتا ہے چوتھائی ہے۔ یہ فرق مساوات (14-55') میں جز $\frac{1}{4}$ کی وجہ سے ہے جو خود شکل 14-3b. کی مثلثی تقسیم کی وجہ سے وجود میں آتا ہے۔ مساوات (14-57') وہ طاقت بتاتا ہے جو ایک چھوٹے اینٹنا سے تابانی کی شکل میں خارج ہوتی ہے جب کہ اس میں ایک یکساں کرنٹ بہہ رہی ہو۔

سے ہم آہنگ ہے۔ دراصل یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مساوات (14-24) اور (14-25) کے پس مضمروں کو مان لیا جائے تو لارنز شرط تسلسل کے مساوات کا سیدھا نتیجہ ہے۔ چونکہ چارجوں اور کرنٹوں کا آزاد تعین نہیں کیا جا سکتا اس لیے اشعاعی میدانوں کا حساب لگانے کے لیے اس میں سہولت رہتی ہے کہ انھیں ایک مفرد مضمر کے ذریعہ ظاہر کیا جائے جو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تسلسل کے مساوات کی پوری پابندی ہو۔ اشعاع کے میدان کو اسی طرح ایک اکیلے مضمر سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو اس طرح چنا گیا ہو کہ لارنز شرط کی پوری پابندی ہو۔ پہلی ضرورت کو پورا کرنے کے لیے کرنٹ و چارج کثافت کو ماآخذ کی سمتی قدروں کے ایک اکیلے ویکٹر فنکشن $\mathbf{p}(x'_a, t)$ سے حسب ذیل رشتوں کے ذریعہ اخذ کیا جاتا ہے؛

$$\rho_{true} = -\nabla \cdot \mathbf{p},$$
$$\mathbf{j}_{true} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}. \qquad (14\text{-}60)$$

معائنہ سے دیکھا جا سکتا ہے کہ $\mathbf{p}$ کے اس انتخاب سے تسلسل کے مساوات کی پابندی ہوتی ہے لیکن اس کے علاوہ کسی من مانے تقسیم کرنٹ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ماآخذ فنکشن $\mathbf{p}$ کو تقطیبی ویکٹر کہا جاتا ہے اور اس کا حقیقی چارجوں اور حقیقی کرنٹوں سے وہی رشتہ ہے جو ڈائیلکٹرک کی تقطیب $\mathbf{P}$ کا تقطیبی چارجوں اور تقطیبی کرنٹوں سے ہے لیکن یہ صرف ایک ریاضیاتی مشابہت ہے اور اس بات پر زور دینا چاہیے کہ $\mathbf{j}$ اور ρ حقیقی چارجوں کو ظاہر کرتے ہیں جو میدان کے خارجی ماآخذ ہیں، اس لیے $\mathbf{P}$ عام تقطیب $\mathbf{P}$ سے بالکل مختلف ہے۔

ایک ویکٹر $\mathbf{Z}$ کی تعریف حسب ذیل مساواتوں کے، کی جا سکتی ہے جس میں اسی طرح سے مضمروں $\mathbf{A}$ اور ϕ کی شمولیت ہے اور جو ساتھ ہی لارنز شرط بھی مانتا ہے:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}, \qquad \phi = -\nabla \cdot \mathbf{Z}. \qquad (14\text{-}61)$$

اس طرح Z ایک "عظیم ویکٹر" ہے اور اسے عام طور سے تقطیبی مضمر یا ہرٹز ویکٹر کہا جاتا ہے۔ p اور Z کی تعریفوں کو ملا دینے پر ہم یہ پاتے ہیں کہ اگر ہرٹز ویکٹر غیر متجانس لہر مساوات کی پابندی کرتا ہے جب کہ p ماٰخذ ہے تو عام مضمر ϕ اور A اپنے مطابقہ لہر مساواتوں کی پابندی ρ اور j کو ماٰخذ لے کر کرتے ہیں۔ یعنی:

$$\Box Z = \nabla^2 Z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -\frac{p}{\epsilon_0}. \qquad (14\text{–}62)$$

یاد رکھیے کہ یہ ایک تین اجزائی مساوات ہے جب کہ A اور ϕ چار اجزائی مضمر کے برابر ہیں۔ مساوات (14–62) کا پس مضمری حل یہ ہے۔

$$Z(x_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{[p(x_a')]}{r(x_a, x_a')}\,dv'; \qquad (14\text{–}63)$$

فوریرا اجزا یہ ہیں:۔

$$Z_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{p_\omega(x_a')e^{ikr}}{r(x_a, x_a')}\,dv'. \qquad (14\text{–}63')$$

میدانوں کو ہرٹز ویکٹر سے تعریفی مساواتوں کے ذریعہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم

$$C = \nabla \times Z, \qquad (14\text{–}64)$$

رکھیں تو مقناطیسی میدان یہ ہوتا ہے

$$B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial C}{\partial t} \qquad (14\text{–}65)$$

اور برقی میدان اس سے ملتا ہے:

$$E = \nabla \times C. \qquad (14\text{–}66)$$

مساوات (14–65) بالکل عام ہے، لیکن مساوات (14–66) صرف ماٰخذ کے باہر صحیح ہے، جہاں $\nabla \cdot E = 0$.

14–6 ہرٹز کے طریقہ سے اشعاعی میدانوں کا حساب لگانا
ہم اس طریقہ کا

اطلاق اس حالت کے لیے کریں گے جب میدانوں کا مشاہدہ ایسی دوریوں پر کیا جاتا ہے جو ماخذ تقسیم کی وسعت کے مقابلہ میں بڑی ہیں اور جہاں علاوہ اس کے ماخذ کی وسعت خارج ہونے والی اشعاع کی لہرلمبائی کے مقابلے میں ایک جائز طور پر چھوٹا ہے، یہ پابندیاں یعنی $\xi(x_0') \ll r(x_0, x_0'), \xi(x_0') \ll \lambda,$ یہ مان لینے کے مترادف ہیں کہ خارج ہونے والی لہر کا کرنٹ اور چارج تقسیموں کے اوپر فیز انحراف کم ہے اور یہ کہ ماخذ کے ابعاد کے مقابلہ میں، شاہد کا فاصلہ بڑا ہے۔

ان حالات میں فنکشن e^{ikr}/r ایک دھیرے دھیرے بدلنے والا فنکشن ہوتا ہے اگر اس کا مقابلہ مساوات (14-63) کے اینٹگرل میں خود p کی تبدیلی سے کیا جائے۔ اس لیے قدرتی طور پر ہم اس فنکشن کا ماخذ نقطہ سے تقسیم چارج کے مبدا تک کے فاصلے $|\xi| = \xi$ کے لحاظ سے ایک پاور سلسلہ میں پھیلاؤ دیں گے اور اس پھیلاؤ کے استعمال کے ذریعہ کا مطالعہ مشاہدہ نقطہ کے بڑے فاصلوں R کے لیے کریں گے۔ ξ اور R کی لہرلمبائی $\lambda = 1/k$ سے نسبتوں کو پھیلاؤ کے پیرامیٹروں کے طور پر لیا جائے گا۔ e^{ikr}/r کے پھیلاؤ کو ایک ہٹے ہوئے مبدا کے لحاظ سے [illegible] اس طرح کا پھیلاؤ اخذ کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\Theta) j_n(k\xi) h_n(kR), \qquad (14\text{–}67)$$

جو کہ بازنتیجہ اگر $R > \xi$ یہاں Θ وہ زاویہ ہے جو ξ اور R کے درمیان ہوتا ہے اور $P_n(\cos\Theta)$ درجہ n کا لیجنڈر کثیر رقمہ ہے، $j_n(k\xi)$ اور $h_n(kR)$ کروی بیسل اور ہینکل فنکشن ہیں جن کی تعریف معمولی سلنڈرنی فنکشنوں کے لحاظ سے مساوات (13-64) کے ذریعہ کی گئی تھی۔

کروی ہارمونکس جوڑ کے مصدقہ کے ذریعہ $P_n(\cos\Theta)$ کو ماخذ کے زاویائی سمتی قدروں، θ', φ' کے لحاظ سے لکھا جا سکتا ہے:

$$P_n(\cos\Theta) = \sum_{m=-n}^{n} (-1)^m P_n^m(\cos\theta) P_n^{-m}(\cos\theta') e^{im(\varphi-\varphi')}. \qquad (14\text{–}68)$$

اس لیے ہرٹز سدسمتیہ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$Z = \frac{ike^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \sum_m (2n+1)(-1)^m h_n(kR) P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$
$$\times \int \mathbf{p}(\xi)\, j_n(k\xi)\, P_n^{-m}(\cos\theta') e^{-im\phi'}\, dv'. \quad (14\text{–}69)$$

یہ سلسلہ بالکل صحیح ہے۔ مآخذ کا معمولی متعدد پول بیان $j_n(k\xi)$ کی جگہ سلسلہ پھیلاؤ کی پہلی رقم جو $k\xi \ll 1$, کے لیے جائز ہے، رکھنے سے ملتا ہے:۔

$$j_n(k\xi) \simeq \frac{2^n n!}{(2n+1)!}(k\xi)^n. \quad (14\text{–}70)$$

کروی ہینکل فنکشن کو سادہ فنکشنوں کے لحاظ سے لکھا جا سکتا ہے گو کہ یہ طریقہ صرف n: کی پہلی کچھ قیمتوں کے لیے ہی قابلِ عمل ہے۔

$$h_0(kR) = j_0(kR) + in_0(kR) = \frac{\sin kR}{kR} - i\frac{\cos kR}{kR} = -\frac{ie^{ikR}}{kR},$$
$$h_1(kR) = -\frac{1}{kR}\left(1 + \frac{i}{kR}\right)e^{ikR}. \quad (14\text{–}71)$$

$kR \gg 1$ کے لیے $h_n(kR)$ کے اسمٹوٹی رویہ سے اشعاع کے میدان صحیح طور پر مل جاتے ہیں:

$$h_n(kR) \simeq (-i)^{n+1}\frac{e^{ikR}}{kR}. \quad (14\text{–}72)$$

معمولی طور سے n کی بعد میں آنے والی قیمتیں صرف اُس حالت میں اہمیت رکھتی ہیں اگر مآخذ تقسیم کے نیچے درجہ کے گردشہ غائب ہوں یا اگر دو یا زیادہ گردشے اشعاع میں بڑا حصہ رکھتے ہوں تو $j_n(k\xi)$ کے پھیلاؤ میں اور رقموں کو شمار میں لینا ہوگا۔ مآخذ کے سمتی قدروں کے اوپر لیے گئے انٹیگرل اس حالت میں عام معنوں میں گردشے نہیں ہیں گو کہ یہ نام برقرار رکھا جاتا ہے۔

اگر مآخذ کے ابعاد کے مقابلے میں لہر لمبائی بڑی ہو جس کی وجہ سے مساوات (14–70) کا استعمال جائز ہو تو پھیلاؤ میں n ویں کڑی کی مطابقت کے اشعاعی میدانوں کا حسب ذیل سے مساوات (14–64)-(14–66) کے ذریعہ حساب لگایا جا سکتا ہے:

$$Z_\omega^{(n)} = (-i)^n \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{2^n n!}{(2n)!} \int (k\xi)^n \mathbf{p}_\omega P_n (\cos\Theta)\, dv' \qquad (14\text{–}73)$$

اگر ماآخذ تقسیم فضا میں خطی ہو تو ماآخذ کے خط کو قطبی محور اور $\theta = \Theta$ لیا جا سکتا ہے۔ اس طرح لیجنڈر فنکشن متعلقہ میدانوں کی زاویائی تقسیم کا از خود تعین کر دیتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تو اشعاعی میدان کے اس کی زاویائی سمتی قدروں پر انحصار کو معلوم کرنے کے لیے مساوات (14–68) کا استعمال کرنا ہوگا چونکہ لیجنڈر فنکشن آرتھوگونل ہیں اس لیے جب میدانی مقداروں کا مربع لے کر ٹھوس زاویہ کے اوپر انٹیگرل نکالا جائے گا تو رقموں کے درمیان کوئی مداخلت نہیں ہوگی اور ہم فیز تبدیلی کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔

14-7 برقی دو قطبی اشعاع

$n = 0$ کے لیے $\mathbf{p}_\omega$ کا ماآخذ سمتی قدروں کے اوپر انٹیگریشن $\int \mathbf{p}_\omega\, dv' = \mathbf{p}_1$ دیتا ہے جو تقسیم کا برقی دو قطبیہ گردشہ ہے۔ اس کے مطابقت کا ہرٹز ویکٹر $\mathbf{Z}_\omega$ محض یہ ہے:

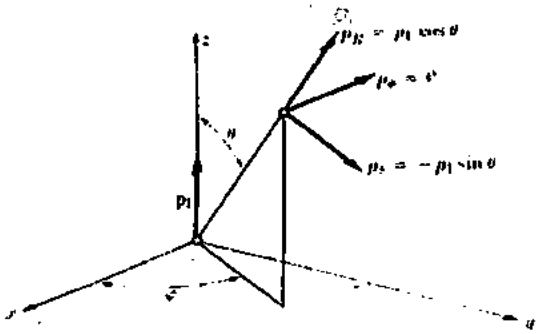
$$\mathbf{Z}_\omega (x_\alpha) = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} \int \mathbf{p}_\omega(x'_\alpha)\, dv' = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R} \mathbf{p}_1 \qquad (14\text{–}74)$$

اور ہم $\mathbf{p}_1$ کی سمت کو قطبی محور کے متوازی لے سکتے ہیں۔ مساوات (14-74) کے تقطیبی مضمر سے اشعاعی میدان حاصل کرنے کے لیے ہم پہلے مساوات (14–64) کے ذریعے تعریف کیے گئے $\mathbf{C}$ کو معلوم کریں گے، تقطیبی ویکٹر کے اجزا سے جیسا شکل 14-4 میں دکھایا ہے یہ صاف ظاہر ہے کہ $Z_{0\omega}$ کے کروی قطبی اجزا یہ ہیں:

$$Z_R = Z_{0\omega} \cos\theta = \frac{p_1 \cos\theta\, e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R},$$

$$Z_\theta = -Z_{0\omega} \sin\theta = -\frac{p_1 \sin\theta\, e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}, \qquad (14\text{–}75)$$

$$Z_\varphi = 0.$$



[شکل 14-4. ایک تقطیبی ویکٹر کے اجزا جن کی تشریح قطبی محور کی سمت میں ہے]

تب کرل کے لیے قطبی سمتی قدروں میں اظہار (ضمیمہ III) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ c کا اکیلا جز C_ϕ ہے:

$$C_\phi = \frac{p_1 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{1}{R} - ik\right)e^{ikR} \qquad (14\text{–}76)$$

اس لیے مقناطیسی میدان صرف یہ ہے:

$$H_\phi = -\frac{i\omega}{4\pi}p_1 \sin\theta\left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R}\right)e^{ikR}, \qquad (14\text{–}77)$$

اور مساوات (13-46) کے مطابق برقی میدان کے اجزا ہیں:-

$$E_R = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, C_\phi) = \frac{p_1\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{R} - ik\right)e^{ikR}, \qquad (14\text{–}78)$$

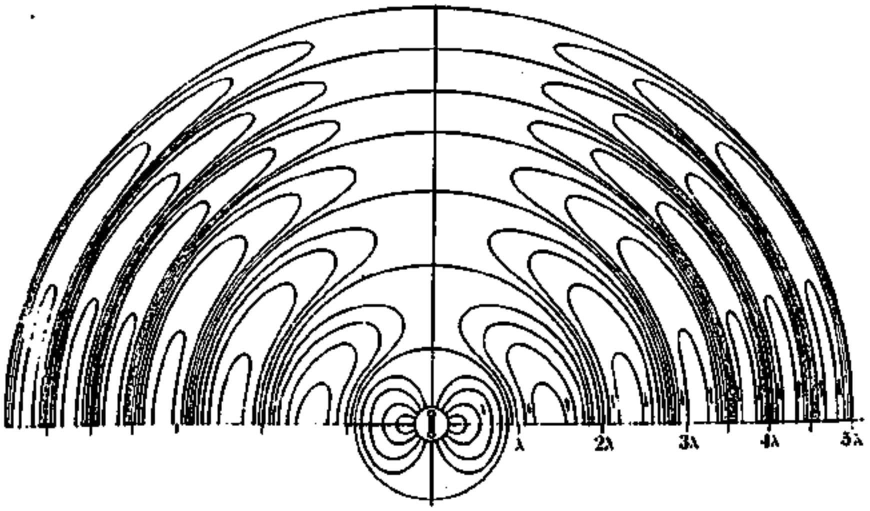
$$E_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RC_\phi) = \frac{p_1\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} - k^2\right)e^{ikR} \qquad (14\text{–}79)$$

مساوات (14-77) کی دو رقمیں ترغیبی میدان اور اشعاعی میدان کو ظاہر کرتی ہیں۔ برقی میدان کے θ جز میں تین رقمیں ہیں؛ پہلی سکونی دو قطبی میدان ہے جو دو قطبیہ کے فاصلہ کے ساتھ مقلوب مکعب کے حساب سے بدلتا ہے؛ دوسری رقم فاصلہ کے مقلوب مربع کے حساب سے بدلتی ہے اور اسے عبوری میدان کہتے ہیں۔ عبوری میدان کا خارج ہوئی اشعاع

میں کوئی حصہ نہیں ہوگا لیکن یہ اہتزاز کے دوران توانائی کو جمع کرنے میں حصہ لے گا
صرف اشعاعی میدان محض یہ ہیں :

$$H_\phi = -\frac{\omega k p_1 \sin\theta\, e^{ikR}}{4\pi R}, \qquad (14\text{-}80)$$

$$E_\theta = -\frac{k^2 p_1 \sin\theta\, e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}. \qquad (14\text{-}81)$$



[شکل 14-6. ایک اہتزازی دو قطبہ سے پیدا ہوئی برقی میدانی لکیریں]

ویکٹر شکل میں اشعاعی میدان یہ ہو جاتے ہیں :-

$$\mathbf{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}[(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}) \times \mathbf{k}], \qquad \mathbf{H} = -\frac{\omega e^{ikR}}{4\pi R}(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{k}), \quad (14\text{-}82)$$

جہاں $\mathbf{k}$ ظاہر ہے کہ $\mathbf{R}$ کے سمت میں ہوگا۔ زیریں نوشت ω سارے حساب میں مخفی ہوئی سمجھی جانی چاہیے۔

برقی میدانی خطوں کی مساواتوں کو c. کے لحاظ سے بہت آسان طریقہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے چونکہ ایک قوت خط کی تعریف اس شرط کے ذریعہ کی جاتی ہے کہ اس کے خطی قطعہ ds کی سمت $\mathbf{E}$. کی سمت میں

ہو، اس لیے میدانی خطوں کا مساوات محض $ds \times \mathbf{E} = ds \times (\nabla \times \mathbf{C}) = 0.$ ہے۔ اس حالت میں یہ مساوات

$$\frac{\partial}{\partial R}(RC_\varphi \sin\theta)\, dR + \frac{\partial}{\partial\theta}(RC_\varphi \sin\theta)\, d\theta = 0, \qquad (14\text{-}83)$$

ہے جس کا ایک حل

$$RC_\varphi \sin\theta = \text{مستقل}$$

ہے۔ مساوات (14-76) کے C_φ کی عبارت کو اس میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں،

$$(\sqrt{R^{-2} + k^2}) \sin^2\theta \cos[kR - \omega t - \tan^{-1}(kR)] = \text{constant} \qquad (14\text{-}84)$$

جب کہ وقت پر منحصر رقم کو شامل کر لیا جائے۔ یہ ایک صحیح مساوات ہے جو اشعاعی خطہ اور ترغیبی خطہ دونوں میں لاگو ہوگا۔ اگر ہم صرف اشعاعی میدان کو لیں تو قوت خطوط کا مساوات ہم یہ پاتے ہیں۔

$$\sin^2\theta \cos(kR - \omega t) = \text{مستقل}$$

یہ میدان قطری طور پر دوری ہے جس میں قطری فاصلے لہر لمبائی λ کے برابر ہیں kR کی اس سے کم قیمتوں کے لیے مساوات (14-84) سے مطابقت رکھنے والی لہر محاذ کی ظاہری تیز رفتار c سے زیادہ ہے اس عبور کو شکل 14-5, میں دکھایا ہے جس میں نابانی میدان کے برابر فاصلہ والے قوت خطوط کنارے کے نزدیک ہیں۔ پیمانہ کی صحت کو اس لیے قربان کر دیا گیا ہے کہ دونوں میدانوں کو ایک ہی شکل میں دکھایا جا سکے؛ H. Hertz. کے *Gesammelte Werke*, Band II یا اس کے *Electric Waves* نام کے ترجمہ میں ایک مشہور سلسلہ شکلوں کا ملے گا جن میں دکھایا گیا ہے کہ برقی قوت خطوط شروع میں وقت کے ساتھ کس طرح بڑھتے ہیں۔

14-8 کثیر قطبی اشعاع

آیئے اب ہم زیادہ اونچے گردشوں کی اہمیت پر غور کریں جو ویکٹر $\mathbf{z}$ میں حصہ دار ہیں۔ مساوات (14-73) کے عام پھیلاؤ میں رقم $n = 1$

$$Z_{1\omega} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}\int k\xi p\cos\Theta\, dv', \qquad (14\text{-}85)$$

کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$Z_{1\omega} = \frac{ke^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{R})\, dv', \qquad (14\text{-}86)$$

جہاں $\mathbf{p}$ کو p_α سمجھنا چاہیے۔ $\boldsymbol{\xi}$ کے اجزا x'_α ہیں اور $\mathbf{R}$ کے x_α۔ تب ٹینسر ترمیم میں مساوات (14-86) کا انٹیگرینڈ $x_\alpha p_\beta x'_\alpha$ ہے جو تقسیم کے پیرامیٹروں کے دو سیٹوں p_β اور x'_α کا فنکشن ہے۔ اس ٹینسر کو دو حصوں میں توڑ لینے میں سہولت رہتی ہے ایک وہ جو دونوں پیرامیٹروں میں متشاکل اور دوسرا غیر متشاکل یعنی ہم

$$x_\alpha p_\beta x'_\alpha = \frac{x_\alpha(p_\beta x'_\alpha + p_\alpha x'_\beta) + x_\alpha(p_\beta x'_\alpha - p_\alpha x'_\beta)}{2}. \qquad (14\text{-}87)$$

رکھ دیتے ہیں۔ یہ عمل جو تقریباً وہی ہے جس کا استعمال سیکشن 7-11، میں کیا گیا، اس طریقے کے ہم پلہ ہے جس کا مسلسل وسیلوں کی میکانیات میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ یعنی یہ ایک الاسٹک ٹھوس کے عام بگاڑ (strain) کو دو الگ حصوں کا جوڑ مانا جائے ایک خالص بگاڑ جو ایک متشاکل ٹینسر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور دوسرا جسم کا گھماؤ جسے ایک غیر متشاکل ٹینسر سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مساوات (14-87) کے غیر متشاکل حصہ کو پھر سے ویکٹر ترمیم رکھ کر ہم مساوات (14-86) کے انٹیگرل کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\tfrac{1}{2}\int \{[\mathbf{R}\times(\mathbf{p}\times\boldsymbol{\xi})]_\beta + x_\alpha(p_\beta x'_\alpha + p_\alpha x'_\beta)\}\, dv'. \qquad (14\text{-}88)$$

آیئے ہم پہلے غیر متشاکل رقم کو لیں چونکہ $\mathbf{R}$ انٹیگریشن کے اندر نشان لگے متغیروں کا فنکشن نہیں ہے اسے انٹیگریشن کے نشان سے باہر نکالا جا سکتا ہے، اور عبارت (14-88) کی پہلی رقم محض یہ رہ جاتی ہے،

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{R}\times\int(\mathbf{p}\times\boldsymbol{\xi})\, dv'. \qquad (14\text{-}89)$$

اس اینٹگرل کا اہمیت آسانی سے پہچانی جاسکتی ہے اگر ہم تقطیبی ویکٹر کو کرنٹ کے لحاظ سے ظاہر کریں۔ چونکہ سائن خم نما وقتی تغیر کے لیے $\mathbf{p} = -\mathbf{j}/i\omega$ اس لیے (14-89) یہ ہو جاتا ہے:

$$\frac{-\mathbf{R}}{2i\omega} \times \int \mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}\, dv'. \qquad (14\text{-}90)$$

لیکن ایک کرنٹ تقسیم کا مقناطیسی گردشہ یہ ہے:

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}\int \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}\, dv',$$

لہٰذا (14-90) کی شکل مندرجہ ذیل ہو جاتی ہے:

$$\frac{1}{i\omega}\mathbf{R} \times \mathbf{m}.$$

اس لیے اپنے پہلے اینٹگرل کے غیر متشاکل حصّہ سے مطابقت رکھنے والا تقطیبی مضمر z یہ ہے:

$$\mathbf{Z}_{\text{antisym.}} = \frac{ke^{ikR}(\mathbf{R} \times \mathbf{m})}{4\pi\epsilon_0 R^2 i\omega}. \qquad (14\text{-}91)$$

میدان کا حساب آسانی سے مساوات (14-91) سے ملے ہوئے z سے لگایا جا سکتا ہے۔ اگر ہم ترغیبی رقموں کو چھوڑ دیں تو

$$\mathbf{B}_{\text{antisym.}} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \frac{i\mu_0 k^2[\mathbf{R} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{R})]e^{ikR}}{4\pi R^3}, \qquad (14\text{-}92)$$

ملتا ہے جو اگر فیز کا جُزو چھوڑ دیا جائے تو

$$\mathbf{H}_{\text{antisym.}} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}[\mathbf{k} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{k})]. \qquad (14\text{-}93)$$

کے مرادف ہے۔ مساوات (14-93) کا مقناطیسی میدان بالکل وہی ریاضیاتی شکل رکھتا ہے جو مساوات (14-82) میں برقی دوقطبہ کی تھی۔ اس کو مقناطیسی دوقطبی اشعاع ایسے کرنٹ تقسیم سے ہوتی ہے جس میں ایک سائن خم نما انداز

سے بدلنے والا چارجوں کا بہاؤ تو ہوتا ہے لیکن اس میں کوئی خالص net (کسی) اہتزازی برقی دو قطبہ نہیں ہوتا۔

اب ہم مساوات (14-87) کی متشاکل رقم کی طبیعی اہمیت پر غور کریں گے۔ مطابقہ ہرٹز ویکٹر یہ ہے:

$$Z_{\beta\,\mathrm{sym}} = \frac{ke^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R^2} x_\alpha \int \frac{1}{2} (p_\beta x'_\alpha + p_\alpha x'_\beta)\, dv'. \tag{14-94}$$

اگر ہم مساوات (14-94) کو چارج کثافت $\rho(x'_\alpha)$ اور تقسیم چارج کثافت کی سمتی قدروں کے لحاظ سے لکھیں تو اس کا تشاکل اور ظاہر ہو جائے گا۔ ایک مقدار پر غور کیجیے جس کی تعریف یہ ہے [دیکھیے مساوات (1-48)]

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho x'_\alpha x'_\beta\, dv' = -\int \frac{\partial p_\gamma}{\partial x'_\gamma} x'_\alpha x'_\beta\, dv', \tag{14-95}$$

اور جس کو چارج تقسیم کا برقی چہار قطبی گردشہ کہا جاتا ہے۔ اگر ہم مساوات (14-95) کا اینٹگرل ٹکڑے ٹکڑے کر کے نکالیں اور اینٹگریشن کے حجم کو تقسیم چارج کے باہر بڑھا دیں جس میں کہ اینٹگرل کیے ہوئے حصے غائب ہو جائیں تو ہم دیکھیں گے کہ چہار قطبی گردشہ کے لحاظ سے مساوات (14-94) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$Z_\beta = \frac{ke^{ikR}}{8\pi\epsilon_0 R^2} x_\alpha Q_{\alpha\beta} \tag{14-96}$$

چونکہ چہار قطبی گردشہ کو مساوات (14-95) کے متشاکل میٹرکس سے ظاہر کیا جاتا۔ اس لیے نیچے کے درجے کی تشکیل سے اخذ کیے ہوئے رقوں کے ایک خاندان سے بھی اسے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$x_\alpha x_\beta Q_{\alpha\beta} = C_2 = \text{مستقلہ} \tag{14-97}$$

اس لیے اس مساوات کے پیرامیٹر C_2 کے لحاظ سے $\mathbf{Z}$ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے،

$$\mathbf{Z} = \frac{ke^{ikR}}{8\pi\epsilon_0 R^2} \nabla C_2, \tag{14-98}$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ Z کی سمت سب جگہ مساوات (14-97) کی دو درجی سطحوں کے عمودی ہے۔ آیئے اب ہم ایک عام چہار قطبہ کے مطابقہ میدانوں کے اجزا کا حساب لگائیں۔ ہم x, y, z محوروں کا ایسا نظام چن سکتے ہیں جو چہار قطبی دو درجی رقموں خصوصی محوروں کے سمت میں ہوں، تب Z کے اجزا مساوات :

$$\begin{Bmatrix} Z_x \\ Z_y \\ Z_z \end{Bmatrix} = \frac{ke^{ikR}}{8\pi\epsilon_0 R} \begin{Bmatrix} \sin\theta\cos\varphi\, Q_{xx} \\ \sin\theta\sin\varphi\, Q_{yy} \\ \cos\theta\, Q_{zz} \end{Bmatrix}. \qquad (14\text{-}99)$$

سے ملتے ہیں۔ Z کا کرل لینے پر C کے اجزا یہ ملتے ہیں :

$$C_\theta = \frac{ik^2 e^{ikR}}{16\pi\epsilon_0 R}\sin\theta\sin 2\varphi(Q_{xx} - Q_{yy}),$$

$$C_\varphi = \frac{ik^2 e^{ikR}}{32\pi\epsilon_0 R}\sin 2\theta\,[Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{zz} - (Q_{yy} - Q_{xx})\cos 2\varphi]. \qquad (14\text{-}100)$$

اور سے برقی میدان کے اجزا یہ ملتے ہیں :

$$E_\theta = \frac{k^3 e^{ikR}}{32\pi\epsilon_0 R}\sin 2\theta\,[Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{zz} - (Q_{yy} - Q_{xx})\cos 2\varphi],$$

$$E_\varphi = \frac{k^3 e^{ikR}}{16\pi\epsilon_0 R}\sin\theta\sin 2\varphi(Q_{yy} - Q_{xx}), \qquad (14\text{-}101)$$

جب کہ مقناطیسی اجزا یہ ہیں :

$$B_\theta = -\frac{\omega\mu_0 k^2 e^{ikR}}{16\pi R}\sin\theta\sin 2\varphi(Q_{yy} - Q_{xx}),$$

$$B_\varphi = \frac{\omega\mu_0 k^2 e^{ikR}}{32\pi R}\sin 2\theta\,[Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{zz} - (Q_{yy} - Q_{xx})\cos 2\varphi]. \qquad (14\text{-}102)$$

مساوات (14-101) اور (14-102) صرف اشعاعی میدان دیتے ہیں اور کوئی بھی قطری اجزا نہیں ہیں۔ معائنہ سے چہار قطبی اشعاعی میدانوں کے تین

پہلو نظر آسکتے ہیں : (a) عام طور سے تقسیموں میں دو عقدی مخروط ہوں گے جہاں اشعاعی میدان صفر ہوتا ہے۔ جب کہ اس کے مقابلے میں دو قطبی تقسیم میں صرف ایک عقدی خط ہوتا ہے (b) میدان صرف چہار قطبی گردشوں $Q_{\alpha\beta}$ کے فرق پر منحصر ہوتے ہیں ؛ اس لیے اشعاعی میدان کا تعین کرنے کے لیے تقسیم کے پانچ نہ کہ چھ گردشوں کی ضرورت ہوتی ہے ، اگر گردشوں کی خصوصی محوروں کے لحاظ سے تحویل کرلی جائے تو صرف دو مومینٹوں کی ضرورت ہوتی ہے (ان تین زاویوں کے علاوہ محوروں کی تشریق کی تعریف کے لیے ضروری ہیں) اسے ہم مساوات (14-102) کو پھر سے مساوات (1-51) کے ذریعہ تعریف کی گئی $D_{\alpha\beta}$ میٹرکس کے دو اجزا کے لحاظ سے ظاہر کرکے دکھا سکتے ہیں۔ ہم پاتے ہیں :

$$B_\theta = \frac{\omega\mu_0 k^3 e^{ikR}}{16\pi R}\sin\theta\sin 2\varphi\left(\frac{D_{xx} - D_{yy}}{3}\right); \tag{14-103}$$

$$B_\varphi = \frac{\omega\mu_0 k^3 e^{ikR}}{32\pi R}\sin 2\theta\left[(D_{zz} + D_{yy}) + \left(\frac{D_{xx} - D_{yy}}{3}\right)\cos 2\varphi\right].$$

(c) اس حالت میں جب کہ چہار قطبہ ایک کرہ نمائی شکلی تقسیم والا ہو تو اشعاعی میدان کے تعین کے لیے تناسبی محور کی تشریق کے علاوہ جسے ہم محور z لیتے ہیں، صرف ایک گردش کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس حالت میں C کا واحد جز اور اس لیے مقناطیسی میدان یہ ہوتا ہے :

$$C_\varphi = \frac{ik^2 e^{ikR}}{16\pi\epsilon_0 R}\sin(2\theta)(Q_{zz} - Q_{zz}); \tag{14-104}$$

اور اس لیے

$$B_\varphi = \left(\frac{\omega k^2\mu_0}{16\pi}\right) D\,\frac{e^{ikR}}{R}\sin(2\theta), \tag{14-105}$$

جہاں مقدار

$$D = 3Q_{zz} - (Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}) = Q_{zz} - Q_{xx}$$

جس کی تعریف مساوات (1-52) میں کی گئی ہے اور جسے "چہار قطبی گردشہ" کہتے ہیں۔ طبیعی نقطۂ نگاہ سے چہار قطبی گردشہ ایک ملبی تقسیم چارج کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے جس کا تشاکل اس طرح کا ہوتا ہے کہ گھٹنے بڑھنے کے دوران دو قطبی گردشہ صفر رہتا ہے۔ چہار قطبہ کی سب سے آسان شال دو قطبوں پر مشتمل ہوتی ہے جو ایک دوسرے سے ذرا ہٹے ہوئے ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کے مخالف سمت میں اہتزاز کرتے ہیں

14-9 اسکیلر عظیم مضمروں سے کثیر قطبی اشعاع کا اخذ

مساوات (14-60) کے ذریعہ تعریف کیے گئے ہرٹز کے تقطیبی مضمر سے اخذ کیا ہوا ایک دیے ہوئے درجہ کا مقناطیسی کثیر قطبہ اسی درجہ کے برقی کثیر قطبہ کے مقابلہ میں مساوات (14-69) یا (14-73) کے پھیلاؤ کی ایک زیادہ اونچی رقم سے پیدا ہوتا ہے۔ دوسری طرف ہم ایک مقناؤ مضمر Z_m, کو داخل کر سکتے ہیں جو اس مساوات کا پابند ہے۔

$$\nabla^2 Z_m - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z_m}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{m}}{\mu_0}, \qquad (14\text{-}106)$$

جہاں m وہ مقناطیسیت ہے جو حقیقی ماخذ کرنٹوں کو ظاہر کرتی ہے اور $\mathbf{j}_{true} = \nabla \times \mathbf{m}$. اگر مساوات (14-106) کے پس مضمری حل کو اسی طرح پھیلایا جائے جیسا سیکشن 14-6, میں برقی ہرٹز مضمر کے لیے کیا تھا تو مقناطیسی دو قطبی میدان رقم $n = 0$, سے ملتا ہے جو سیکشن 14-7. کے برقی دو قطبی میدان سے پوری تشکیلی مشابہت رکھتا ہے۔ میدان وہی ہوں گے جو سیکشن 14-8. میں مقناطیسی دو قطبی اشعاع کے لیے اخذ کیے گئے تھے۔ تقطیبی اور مقناؤ "عظیم مضمروں" کو الگ الگ لینے کی بجائے ان کو ایک ساتھ لینا بھی ممکن ہے۔[1]

---

[1] A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.* 231 A, pp. 250–263 (1955) میں دکثیر عظیم مضمروں کی پوری تقسیم اور ان کا خصوصی اسکیلر مضمروں سے رشتہ دیا گیا ہے۔

کبھی کبھی یہ اچھا رہتا ہے کہ ایسے مضمروں کو کام میں لایا جائے جو صاف طور پر ایک ہی درجہ کے برقی اور مقناطیسی کثیر قطبوں میں جیامٹریائی تشاکل کو واضح کریں اور جن میں اصولاً چہار قطبی اور اونچے درجہ کی رقموں کا حساب لگانا، دو قطبی اشعاع سے زیادہ مشکل نہ ہو۔ اس طرح کے مضمروں کا سٹ اسکیلر فنکشنوں Π_E, Π_M کے ہم پلہ ہے جنہیں ہم نے پہلے ہی سیکشن 13-8 اور 13-9. میں استعمال کیا ہے۔ ان مضمروں کا ماخذ تقسیم سے رشتہ رکھنے والا ایک آسان اخذ بوکام اور کاسیمر نے دیا ہے[1]۔ ہم نے سیکشن 13-8 میں کہا ہے کہ ماخذ کی غیر موجودگی میں سب میدانوں کو ان کے قطری اجزا کے لحاظ سے ظاہر کرنا ممکن ہے، مسئلہ میدانوں کے قطری اجزا کو ان ماخذ کے لحاظ سے جو انھیں پیدا کرتے ہیں، معلوم کرنا ہے۔ آئیے ہم حقیقی ماخذ j اور ρ، کے خلائی میدانوں پر غور کریں اور یہ مان لیں کہ سب میدانوں اور ماخذ کا وقت پر انحصار $e^{-i\omega t}$ سے ملتا ہے جیسے صریحاً لکھا نہیں لکھا گیا ہے۔

کروی سمتی قدری میدانوں کا جن کا ذکر باب 13. میں کیا گیا ہے زیادہ سہولت سے استعمال کرنے کے لیے ہم مقناطیسی میدان کو B. سے ظاہر نہ کرکے H سے ظاہر کریں گے۔ تب وقت پر منحصر میکسویل کے مساوات یہ ہیں :-

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mu_0\omega\mathbf{H} \qquad (14\text{–}107)$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} - i\omega\epsilon_0\mathbf{E},$$

اور مساوات تسلسل یہ ہو جاتا ہے،

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - i\omega\rho = 0. \qquad (14\text{–}108)$$

اب مساوات (13-57) کے مطابق ایسے نقطہ پر جس کا مبدا سے نیم قطری ویکٹر r ہے۔ دو دبائی مضمروں میں سے ایک محض $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$ کے متناسب ہے۔ اسی طرح دوسرا دبائی مضمر $\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}$. کے تناسب میں ہے $\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}$, کے لیے ایک مساوات دریافت کرنے کے لیے اس ویکٹر مماثلہ identity پر غور کیجیے :

$$\nabla^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}) = 2\nabla\cdot\mathbf{V} - \mathbf{r}\cdot(\nabla^2\mathbf{V}), \qquad (14\text{–}109)$$

[1] C. J. Bouwkamp and H. B. G. Casimir, *Physica* XX, pp. 539–554 (1954)

جہاں $\mathbf{V}$ کوئی ویکٹر میدان ہے۔ اگر مساوات کے دونوں طرف $k^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{V})$ جوڑ دیا جائے اور $\mathbf{V}$ کو $\mathbf{H}$ لے لیا جائے تو

$$(\nabla^2 + k^2)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}) = -\mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{j}), \qquad (14\text{–}110)$$

چونکہ (14–107) کے مساواتوں کو ملانے پر $\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = -\nabla\times\mathbf{j}$ آجاتا ہے اور کیونکہ $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0.$ لیکن اسکیلر فنکشن $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})$ میں ایک مساوات کے طور پر مساوات (14–110) ٹھیک اسی شکل کا ہے جیسا کہ مساوات (14–16)؛ ہے اور اس کا حل معمولی پس اسکیلر عنصر کے حل کے مشابہ ہوگا۔ اگر ہم میدانی نقطہ کے نیم قطری ویکٹر کو $\mathbf{R},$ مانیں اور ماخذ تقسیم کے نیم قطری ویکٹر کو $\xi,$ اور $r = |\mathbf{R} - \xi|$ ماخذ نقطہ سے میدانی نقطہ کا اسکیلر فاصلہ ہے تو

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi\cdot(\nabla'\times\mathbf{j})e^{ikr}}{r}\,dv' \qquad (14\text{–}111)$$

اور اس طرح ہمیں مقناطیسی میدان کے قطری جزو کا ماخذ کرنٹ کے لحاظ سے اظہار مل جاتا ہے، مساوات (14–109) کو ویکٹر $\mathbf{E},$ کے لیے بھی لاگو کیا جا سکتا ہے لیکن نتیجہ میں اس بات سے پیچیدگی پیدا ہو جاتی ہے کہ $\mathbf{E}$ کا ڈائیورجنس ضروری نہیں ہے کہ غائب ہو۔ اگر $\mathbf{V}$ کو $\mathbf{E} - \mathbf{j}/i\omega\epsilon_0;$ لیا جائے تو برقی میدان کے نیم قطری جزو کے لیے ایک زیادہ آسان عبارت ملتی ہے۔ میکسویل کے رشتوں کو بدلے میں رکھنے پر یہ ملتا ہے؛

$$(\nabla^2 + k^2)[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{E} - \mathbf{j}/i\omega\epsilon_0)] = \frac{-i}{\omega\epsilon_0}\mathbf{r}\cdot[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{j})]. \qquad (14\text{–}112)$$

پھر ہم نے ایسا مساوات معلوم کر لیا ہے جو مساوات (14–110) سے تشکیلی مشابہت رکھتا ہے اور اس وجہ سے اسکیلر عنصر کے مساوات سے بھی مشابہت رکھتا ہے، جس کی وجہ سے ہم مساوات (14–111), کی ترقیم میں لکھ سکتے ہیں کہ:

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{j}}{i\omega\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi i\omega\epsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{\xi}\cdot[\nabla'\times(\nabla'\times\mathbf{j})]e^{ikr}}{r}\,dv'. \quad (14\text{–}113)$$

مساوات (14-113) کے داہنی طرف کی پہلی رقم ماخذ کے باہر غائب ہو جاتی ہے :
اگر مساوات (14-111) کو میدان اور ماخذ کی سمتی قدروں کے لحاظ سے
بذریعہ مساوات (14-67) اور (14-68) کے یہ مان کر کہ $|\mathbf{R}| > |\boldsymbol{\xi}|$, پھیلایا
جائے تو ہم لکھ سکتے ہیں کہ :

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{H}) = \frac{ik}{4\pi}\sum_l\sum_m (2l+1)(-1)^m h_l(kR)P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$
$$\times\int j_l(k\xi)P_l^{-m}(\cos\theta')e^{-im\varphi'}[\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla'\times\mathbf{j})]\,dv', \quad (14\text{–}114)$$

یا مساوات (13-52') کے فنکشنوں Π_l^m کے لحاظ سے :

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{H}) = \frac{ik}{4\pi}\sum_l\sum_m (-1)^m\,\Pi_l^m(\mathbf{R})\int[\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla'\times\mathbf{j})]\,\Pi_l^{-m}(\boldsymbol{\xi})\,dv'. \quad (14\text{–}115)$$

لیکن

$$[\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla'\times\mathbf{j})]\,\Pi_l^{-m}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{j}\cdot\nabla'\times[\boldsymbol{\xi}\,\Pi_l^{-m}(\boldsymbol{\xi})] + \nabla'\cdot[\mathbf{j}\times\boldsymbol{\xi}\,\Pi_l^{-m}(\boldsymbol{\xi})]\cdot \quad (14\text{–}116)$$

اگر مساوات (14-115) کے اینٹگرینڈ میں مساوات (14-116) کو رکھا جائے تو آخری
رقم کو ماخذ کے بالکل پاس کی چاروں طرف کی سطح پر ایک اینٹگرل کی شکل میں بدلا
جا سکتا ہے، اس لیے اس کا باہر کے میدانوں میں کوئی حصہ نہیں ہے۔ اس لیے
ماخذ کے باہر

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{H}) = \frac{ik}{4\pi}\sum_l\sum_m (-1)^m\,\Pi_l^m(\mathbf{R})\int\mathbf{j}\cdot\nabla'\times[\boldsymbol{\xi}\,\Pi_l^{-m}(\boldsymbol{\xi})]\,dv'. \quad (14\text{–}117)$$

اسی کی طرح سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ (ماخذ سے باہر)

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\sum_l\sum_m(-1)^m\,\Pi_l^m(\mathbf{R})\int\mathbf{j}\cdot\nabla'\times\{\nabla'\times[\boldsymbol{\xi}\,\Pi_l^{-m}(\boldsymbol{\xi})]\}\,dv'. \quad (14\text{–}118)$$

ان میدانوں کی سیکشن 13-8 کے میدانوں سے پہچان سیدھی ہے۔ وہاں ہم نے دیکھا کہ ہر l کے لیے زیریں نوشت m سے ظاہر کیے جانے والے M میدانوں کو H_r سے دریافت کیا جا سکتا ہے اور یہ کہ اس طرح سے دریافت کیے گئے برقی میدان میں کوئی قطری جز نہیں ہوتا۔ اسی طرح اس قسم کے میدان جو زیریں نوشت E سے ظاہر کیے جاتے ہیں E_r سے اخذ کیے جا سکتے ہیں اور ان میدانوں کے لیے $H_r = 0.$ ہوتا ہے۔ مساوات (14-117) اور (14-118) کا مساوات (13-60) اور (13-61) میں دیے ہوئے "اکائی" میدانوں کے قطری اجزا سے موازنہ کرنے سے ہم کرنٹ کے کسی ماخذ تقسیم کے لیے پورے میدان کے پھیلاؤ سلسلہ میں "اکائی" میدانوں کے ضربیوں کو دریافت کر سکتے ہیں اس طرح :

$$\mathbf{E} = \sum_l \sum_m [a_l^m \mathbf{E}_E(l, m; \mathbf{R}) + b_l^m \mathbf{E}_M(l, m; \mathbf{R})], \qquad (14\text{–}119)$$

جہاں ضربیوں کا تعین برقی کثیر قطبوں کے لیے اس سے ہوتا ہے:

$$a_l^m = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int \mathbf{j} \cdot \nabla' \times \{\nabla' \times [\xi\, \Pi_l^{-m}(\xi)]\}\, dv' \qquad (14\text{–}120)$$

اور مقناطیسی کثیر قطبوں کے لیے اس سے

$$b_l^m = \frac{ik}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int \mathbf{j} \cdot \nabla' \times [\xi\, \Pi_l^{-m}(\xi)]\, dv' \qquad (14\text{–}121)$$

اس طرح ہر کثیر قطبیہ میدان کے ماخذ کی شدت کو ایک معیاری فنکشن اور کرنٹ کثافت کے اسکیلر ضرب کے ماخذ کے اوپر انٹیگرل کے ذریعہ ظاہر کیا گیا ہے۔ مساوات (14-114) سے دیکھیے کہ وہ قطری فنکشن جو $\Pi_l^{-m}(\xi)$ میں چھپا ہوا ہے $j_l(k\xi)$ ہے جو بنیادی کثیر قطبیہ گردشہ دیتا ہے اگر اس کے چھوٹے $k\xi$ کے لیے پھیلاؤ میں پہلی رقم کا استعمال جائز ہے۔ اس تشکیل میں برقی اور مقناطیسی دونوں کثیر قطبیوں کا درجہ 2^l ہے چونکہ $l = 0,$ کے لیے مساوات (14-120) اور (14-121) غائب ہو جاتے ہیں، اس لیے جیسا دوسری تشکیلوں میں اشعاع

خارج کرنے والے یک قطبے monopoles. نہیں ہوتے ۔

14-10 کثیر قطبوں سے اشعاع کے ذریعہ توانائی اور زاویائی تحرک کا اخراج

تابانی کے ذریعہ خارج ہوئی توانائی کا حساب کرتے کے لیے یہ کافی ہے کہ $h_l(kR)$ کے اسمٹوٹی شکل کا جو فنکشن $H_l^m(R)$ میں نہفتہ ہے استعمال کیا جائے اور ان رقموں کو نظر انداز کر دیا جائے جو $1/R$. سے بھی زیادہ تیزی سے گھٹتی ہیں، اس کا نتیجہ سیکشن 13-9. میں منتشر اشعاع کی شدت کے لیے کیے گئے حساب کی ایک تعمیم ہے۔ برقی کثیر قطبوں کے لیے مساوات (13-58) یہ ہو جاتے ہیں

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_E &\simeq i^{-l}\frac{e^{ikR}}{R}\left[\frac{\partial Y_l^m(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{im}{\sin\theta}Y_l^m(\theta,\varphi)\hat{\varphi}\right]\\
&= i^{-l}e^{ikR}\nabla Y_l^m(\theta,\varphi),\\
\mathbf{H}_E &\simeq i^{-l}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{e^{ikR}}{R}\left[\frac{\partial Y_l^m(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\hat{\varphi}-\frac{im}{\sin\theta}Y_l^m(\theta,\varphi)\hat{\theta}\right]\\
&= i^{-l}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,e^{ikR}[\hat{\mathbf{R}}\times\nabla Y_l^m(\theta,\varphi)],
\end{aligned}\qquad(14\text{–}122)$$

جب کہ مقناطیسی کثیر قطبوں کے لیے مساوات (13-59) یہ ہو جاتا ہے:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_M &\simeq -i^{-l}e^{ikR}[\hat{\mathbf{R}}\times\nabla Y_l^m(\theta,\varphi)],\\
\mathbf{H}_M &\simeq i^{-l}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,e^{ikR}\nabla Y_l^m(\theta,\varphi).
\end{aligned}\qquad(14\text{–}123)$$

دونوں میں سے کسی قسم کے کثیر قطبوں کے لیے "اکائی" میدان کی مطابقت کے پوائنٹنگ ویکٹر کا وقتی اوسط اس سے ملتا ہے:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) &\simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,|\mathbf{E}^2|\hat{\mathbf{R}} \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,|\mathbf{H}^2|\hat{\mathbf{R}}\\
&\simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,|\nabla Y_l^m(\theta,\varphi)|^2\hat{\mathbf{R}},
\end{aligned}\qquad(14\text{–}124)$$

جس کا اینٹگرل R. نصف قطر کے ایک کرے کے اوپر لینا ہے۔ لیکن بڑے

R, کی غائت حالت میں :

$$R^2\int|\nabla Y_l^m(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega = l(l+1)\int|Y_l^m(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega = 4\pi l(l+1) \quad (14\text{–}125)$$

اس لیے وہ توانائی جو 2^l درجہ کے "اکائی" کثیر قطبہ سے اکائی وقت میں اشعاع کے ذریعہ خارج ہوتی ہے یہ ہے :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,l(l+1). \quad (14\text{–}126)$$

زیریں نوشت E اور M سے ظاہر کیے گئے تمثیلی میدانوں کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ ایک دیے ہوئے l کے لیے دونوں ایک ہی قوت دیں پھر بھی یہ بات دھیان میں رکھنی چاہیے کہ ایک مخصوص مآخذ تقسیم کے لیے مقناطیسی کثیر قطبہ b_l^m کی شدت a_l^m سے ایک جز ka, سے کم ہو گی جہاں مآخذ کے ابعاد کی قدر کے درجہ کا ہے۔ اس پھیلاؤ میں جہاں وقتی انحصار کو ہارمونک مان لیا گیا ہے $ka = \omega a/c$ جز v/c, کے مرادف ہے جہاں v اُس چارج کی رفتار ہے جس کی وجہ کرنٹ پیدا ہوتی ہے۔

یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ کثیر قطبی میدان زاویائی تحرک کی ترسیل کرتے ہیں R نصف قطر کی ایک کروی سطح سے ہو کر وقت dt میں ترسیل ہوا زاویائی تحرک یہ ہے :

$$d\mathbf{L} = \left\{\int \frac{[\mathbf{R}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{H})]}{c^2}\,R^2\,d\Omega\right\}c\,dt, \quad (14\text{–}127)$$

جس کو آسانی سے اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$d\mathbf{L} = \frac{R^2}{c}\int[\mathbf{E}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{E})]\,d\Omega\,dt. \quad (14\text{–}128)$$

انٹگرل کی قیمت سب سے آسان طریقے سے "اکائی" میدانوں، مساوات (13-60) اور (13-61)، کے اجزا کا معائنہ کر کے نکالی جا سکتی ہے۔ پہلے ہم برقی کثیر قطبوں کو لیتے ہیں جن کے لیے :

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}) = l(l+1)i^{-(l+1)}\frac{e^{ikR}}{kR}Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (14\text{–}129)$$

جب کہ کروی ہینکل فنکشن کی اسمپٹوٹی شکل کو $z_l(kR)$ کی جگہ رکھ دیا گیا ہے متعلقہ مقناطیسی میدان کے φ جزکی L_z میں کوئی شرکت نہیں ہے کیونکہ

$$\frac{d}{d\theta}P_l^m(\cos\theta) = -P_l^{m+1}(\cos\theta),$$

اور متلازم کروی ہارمونک سطح کے اوپر عمودی ہوتے ہیں۔ لیکن قطری جز کی غیر موجودگی میں؛

$$H_r = -\sin\theta H_\theta = -m\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,i^{-(l+1)}\frac{e^{ikR}}{R}Y_l^m(\theta,\varphi), \quad (14\text{–}130)$$

اور اس لیے برقی کثیر قطبوں کے لیے dL_z کا وقتی اوسط یہ ہے؛

$$\overline{dL_z} = \frac{1}{2}\frac{m}{kc}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,l(l+1)\int|Y_l^m(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega\,dt$$

$$= 2\pi\frac{m}{kc}l(l+1)\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,dt. \qquad (14\text{–}131)$$

بالکل یہی اظہار مقناطیسی کثیر قطبوں کے لیے ملتا ہے۔ مساوات (14–131) کا مساوات (14–126) سے موازنہ دلچسپ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اشعاع کے ذریعہ خارج تحرک کے وقتی اوسط کی اشعاع کے ذریعہ خارج طاقت سے نسبت یہ ہے؛

$$\frac{\overline{dL_z/dt}}{P} = \frac{m}{kc} = \frac{m}{\omega}. \qquad (14\text{–}132)$$

اس لیے ایک دیئے ہوئے m، کے کثیر قطبوں کے لیے زاویائی تحرک کے z جز کی اشعاع کے ذریعہ خارج توانائی سے ایک مستقل نسبت ہے، اور $m \neq 0$ کے لیے روشنی دائری تقطیب شدہ ہوتی ہے۔ یہ ایک خالص کلاسکی نتیجہ ہے لیکن اگر یہ مان لیا جائے کہ اشعاع کے ذریعہ خارج توانائی فوٹانوں پر مشتمل ہوتی ہے جن میں ہر ایک کی توانائی $\hbar\omega$ ہے تو زاویائی تحرک کا ہر فوٹان کے لیے

جز mh ہوگا - لیکن مساوات (14-132) اسپن اور مداری زاویائی تحرک میں فرق نہیں کرتا اور اس کا اطلاق فوٹانوں پر فرداً فرداً کرنا پورے طور سے واجب نہیں ہے -

حوالے

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory.*

باب VIII میں جو اشعاع پر ہے پس منظری حل اور ہر طرح حل کا کثیر قطبی پھیلاؤ شامل ہیں -

P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*

اس میں غیر متجانس لہر مساوات کے حل پر بہت سا بے حد مفید مواد شامل ہے -

G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation*

اس میں بہت سی مثالیں ہیں

J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics,*

اور

W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd ed.

میں کسی قدر مختلف لیکن مساوی بیان متشاکل کثیر قطبی پھیلاؤ کا ضمیموں میں دیا ہوا ہے -

مشق

1. - دکھلایئے کہ ایک کرہ جس میں کروی تشاکل سے چارج ہے اور جو خالص قطری طور پیا ہتزاز کررہا ہے، اشعاع خارج نہیں کرے گا -

2. - دکھایئے کہ اگر ہم لہر مساوات کا حل یہ لیں :

$$\phi = (\phi_{\text{retarded}} + \phi_{\text{advanced}})/2,$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{\text{retarded}} + \mathbf{A}_{\text{advanced}})/2,$$

تو ہم ایک اہتزازی نظام سے خارج ہوئی اشعاع کی پوری توانائی صفر پائیں گے

3. ۔ نصف قطر a کے ایک دائری حلقہ میں کرنٹ مندرجہ ذیل عبارت سے ملتی ہے۔

$$I = I_0 \sin(n\varphi)e^{-i\omega t}$$

دکھائیے کہ ایک فیز جز کو چھوڑ کر اشعاع کے خطہ میں ویکٹر مضمر یہ ہے؛

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{a}{r} J_n'(ka \sin\theta) \sin n\varphi e^{i(kr-\omega t)}$$

4. ۔ ایک برقی دو قطبہ مبدا پر xy- مستوا میں واقع ہے اور z- محور کے گرد مستقل زاویائی رفتار سے گردش کرتا ہے۔ دو قطبہ سے بڑے فاصلوں پر مقناطیسی میدان کی شدّت کے سلنڈری سمتی قدری اجزا معلوم کیجیے۔

5. ۔ دو قطبی ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ایک ہی تواتر سے لیکن $90°$ فیز کے فرق کے ساتھ اہتزاز کر رہے ہیں۔ (a) وقت dt. میں خارج ہوئی توانائی U کا حساب لگائیے (b) ایک بڑے فاصلے R. پر ایک کرّوی جاذب لیجیے۔ اس پردہ کو وقت dt میں دیا گیا زاویائی تحرک یہ ہے؛

$$\mathbf{L} = \left[\int \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})}{c^2} dS\right] c\, dt,$$

جہاں انٹگرل کرّہ کی سطح پر لیا جاتا ہے۔ $\mathbf{L}$ کا حساب لگائیے اور (a). کے نتیجہ سے موازنہ کیجیے پورے دو قطبی میدانوں کا استعمال کیجیے۔

6. ۔ ایک خطی چہار قطبی اہتزاز کار چارجوں $-e, +2e, -e,$ پر مشتمل ہے جب کہ مثبت چارج مبدا پر غیر متحرک ہے اور z_1 اور z_2 پر منفی چارج مندرجہ ذیل عبارت سے ملتے ہیں؛

$$z_1 = -z_2 = a \cos \tfrac{1}{2}\omega t.$$

بڑے فاصلوں پر میدانوں کا حساب لگائیے اور وہ اوسط شرح جس سے توانائی بذریعہ اشعاع خارج ہو رہی ہے معلوم کیجیے۔

7. ۔ مسئلہ 6 کے دونوں منفی چارج اہتزاز کرنے کی بجائے مستقل

زاویائی رفتار سے مبدا پر مقیم مثبت چارج کے گرد گھوم رہے ہیں اور تینوں چارجوں کے خط پر $2a+$ سے ایک مستقل فاصلہ a قائم رکھتے ہیں؛ چہار قطبی گردشہ کے اضلال اور اشعاع کے اخراج کی اوسط شرح معلوم کیجیے۔

8۔ ایک مرکز سے قوت لینے والا اینٹنا ہے جس کی پوری لمبائی — $L = \lambda/4$ اور جس کا تقسیم کرنٹ حسب ذیل ہے؛

$$J = J_0 \cos \frac{2\pi\xi}{\lambda}, \quad -\lambda/8 < \xi < \lambda/8.$$

خطی برقی دو قطبی اور ہشت قطبی گردشوں کے لیے مطابقہ اشعاع کے ذریعے خارج طاقت کا حساب لگا کر انھیں جمع کیجیے۔ درست نتیجہ سے موازنہ کیجیے۔

9۔ دو برابر مثبت چارج q ایک $2a$، لمبائی کے قطر کے مخالف سروں پر زاویائی رفتار ω سے دائرے میں گھوم رہے ہیں۔ اس طرح ثقل چارج یہ ہے:

$$\rho(\rho, z, \varphi) = q\,\delta(z)\,\delta(\rho - a)[\delta(\varphi - \omega t) + \delta(\varphi + \pi - \omega t)].$$

حساب لگا کر نکالیے (a) کرنٹ کے فوریر اجزا J_m (b) چہار قطبی گردشہ کا فوریر جز؛ (c) اشعاع کا نمونہ اگر $\omega a \ll c$۔

10۔ وسیکٹر مماثلہ، مساوات (14-109) کو ثابت کیجیے۔

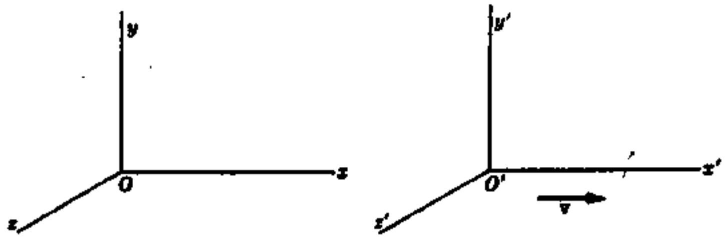
باب (15)

مخصوص اضافیت کے نظریہ کی تجرباتی بنیاد

15-1 گیلیلیائی اضافیت اور برقی حرکیات

ہم نے دیکھا ہے کہ خلا میں برقی مقناطیسی میدان رفتار $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ سے ترسیل ہوتے ہیں جو خود نظریہ کا ایک امتیازی مستقلہ ہے۔ یہ میکسویل کی مساواتوں کا ایسا پہلو ہے جو کلاسیکی میکانیات کے قوانین سے میل نہیں کھاتا۔ کلاسیکی میکانیات میں کوئی امتیازی مستقلے نہیں ہیں اور سبھی طبیعی مقداروں کے لحاظ سے پیمانہ بند کیے جا سکتے ہیں، میکسویل کے مساواتوں کو فرداً فرداً لمبائی اور وقت کے لحاظ سے پیمانہ بند کیا جا سکتا ہے لیکن رفتار کے لیے نہیں، اس کا مطلب یہ ہے کہ میکسویل کے نظریہ میں نیوٹنی میکانیات کی ایک قابلِ توجہ صفت شامل نہیں ہے، یعنی یہ کہ مستقل حرکت نہ ہونے میں قطعاً امتیاز نہیں کیا جا سکتا۔ حرکت کے توانین سب سخت سمتی قدری فریموں میں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مستقل رفتار سے حرکت کر رہے ہوں یکساں طور پر لاگو ہیں۔ اسی کو ریاضیاتی طور سے اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ اگر نشان لگے سمتی قدروں کا ایک سٹ شکل 15-1، کے بغیر نشان والے سمتی قدروں کے x محور کی سمت میں رفتار v سے حرکت کر رہا ہو تو سمتی قدروں کے مندرجہ ذیل رشتوں کو رکھنے پر حرکت کے مساواتوں میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t, \qquad (15\text{-}1)$$



[شکل 16-1. نشان لگا فریم بے نشان لگے فریم کے لحاظ سے حرکت کرتا ہوا]

اس بات کو n نقطہ کمیتوں کی جن کا باہمی تفاعل اُن کی آپسی دوری پر منحصر مضمر فنکشنوں کے ذریعہ بیان کیا جاسکتا ہے، بنیادی مساواتِ حرکت میں براہِ راست رکھ کر دیکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات i ویں ذرّے کے لیے یہ ہے:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{j \neq i}^{n} \nabla_i [V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)], \qquad (15\text{–}2)$$

یہ صاف ظاہر ہے کہ مساوات (15-2) نشان لگے سمتی قدروں میں بالکل وہی رہے گا۔ یہ نتیجہ ایک "کائناتی پیمانۂ وقت" کے وجود پر منحصر ہے، یعنی مساوات (15-1) کا آخری رکن بدیہی مانا گیا ہے۔ مساوات (15-1) "گیلیلی استحالہ کہلاتے ہیں" اس لیے یہ کہا جاسکتا ہے کہ کلاسکی میکانیات کے قوانین گیلیلی استحالہ کے تحت غیر متغیر رہتے ہیں۔ ایک سمتی قدری فریم جس میں ایک جسم پر کوئی قوت کارفرما نہیں ہے غیر سرعتی رہتا ہے۔ "استمراری فریم کہلاتا ہے"، اس لیے ہم میکانیات کے قوانین کے عدم تغیر کی تشکیل مساوات (15-1) کے استحالہ کے تحت اس بیان سے کرسکتے ہیں کہ کلاسکی میکانیات میں سب استمراری فریم مترادف ہیں۔ اس بیان کو اکثر گیلیلی اضافیت کا اصول کہتے ہیں۔

چوں کہ قوتوں کی عدم موجودگی کی پہچان صرف اسراع کی عدم موجودگی سے ہی ہوسکتی ہے، اس لیے جب تک کہ قوتوں کے تمام ماخذ کا علم نہ ہو ایک استمراری فریم کا تعین وثوق کے ساتھ نہیں ہوسکتا۔ لیکن میکسویل کے مساواتوں کے ساتھ ایک زیادہ فوری دشواری ہے؛ مساوات (15-1) کے بدل سے لہر مساوات کی شکل قائم نہیں رہتی، اس لیے یہ خیال کیا جاسکتا

ہے کہ برقی مقناطیسی اثرات وہی نہیں رہیں گے۔ اگر ان کا مشاہدہ مختلف فریموں سے کیا جائے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مستقل رفتار سے حرکت میں ہیں۔ بالخصوص خلا میں ایک ہموار لہر کے ترسیل کی رفتار $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ پر قائم نہیں رہے گی۔ اگر ہم میکسویل کے مساواتوں اور کلاسیکی حرکیاتی قانونوں کی بنیادی صحت کو قبول کرتے ہیں تو یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ایک ایسا یگانہ خصوصی حیثیت کا حوالی فریم، کلاسیکی "ایتھر فریم" وجود میں ہے جس میں میکسویل کے مساوات جائز ہیں اور جس میں روشنی رفتار c سے ترسیل ہوتی ہے۔

چونکہ گیلیلی اضافیت کا اصول میکانکی کے قانونوں پر تو لاگو ہوتا ہے لیکن برقی حرکیات پر لاگو نہیں ہوتا، اس لیے ہم مجبور ہیں کہ مندرجہ ذیل میں سے کسی ایک کو چنیں :-

(a) میکانیات کے لیے اضافیت کے ایک اصول کا وجود ہے لیکن برقی حرکیات کے لیے نہیں۔ برقی حرکیات میں ایک ترجیحی استمراری فریم (ایتھر فریم) کا وجود ہوتا ہے۔

(b) ایک اضافیاتی اصول میکانیات اور برقی حرکیات دونوں کے لیے اضافیت کا ایک اصول ہے، لیکن برقی حرکیات میکسویل کی تشکیل میں صحیح نہیں ہے۔

(c) ایک اضافیاتی اصول میکانیات اور برقی حرکیات دونوں کے لیے اضافیت کا ایک اصول ہے لیکن نیوٹنی شکل میں میکانیات کے قوانین کی ترمیم کی ضرورت ہے۔

اِن امکانات میں سے انتخاب صرف تجرباتی نتائج کی بنا پر کیا جا سکتا ہے مناسب تجربات کے تجزیہ سے ہم دیکھیں گے کہ امکان (c) مخصوص نظریۂ اضافیت کی شکل میں بنیادی طور سے صحیح ہے۔ اس باب کے آخر میں بنیادی تجربات کے حوالوں کی ایک فہرست دی گئی ہے۔ مزید حوالے اضافیت پر ان زیادہ تشریحی تصانیف میں ملیں گے جن کی فہرست بھی دی گئی ہے۔ بنیادی تجربات تین بڑی قسموں میں بانٹے جا سکتے ہیں: (a) برقی حرکیات کے قوانین کے لیے ایک ترجیحی استمراری فریم کو معلوم کرنے کی کوششیں (b) کلاسیکی برقی حرکیات کے قوانین سے انحراف سے دریافت کرنے کی کوششیں (c) کلاسیکی میکانیات سے انحراف کے مشاہدے کی کوششیں۔

15-2 مطلق ایتھر فریم کی تلاش

ایک آسان طور سے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ دو چارج q اور $-q$، جو ایک سخت چھڑ کے سروں پر چپاں ہیں رفتار $\mathbf{v}$ سے حرکت میں لائے جائیں تو ان میں اسی طرح باہمی مقناطیسی تفاعل ہوگا جیسے $J\,dl = q\mathbf{v}$ قدر کے دو کرنٹ قطعوں میں ہوتا ہے۔ دونوں قطعوں پر قوتوں کی سمت مخالف ہوگی لیکن عام طور سے وہ ہم خطی نہیں ہوں گے۔ ان حالات میں چھڑ اگر گھومنے کے لیے آزاد ہے تو رفتار کی سمت سے زاویہ قائمہ بناتے ہوئے ٹھہرنے کی کوشش کرے گی اس اثر کی جسامت کا حساب لگانا دلچسپ ہوگا۔ ایمپیر کے قانون کے مطابق شکل (15-2) کے حوالہ سے)

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} q^2 \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{L})}{L^3}, \qquad (15\text{-}3)$$

جہاں $\mathbf{L}$ چھڑ کی لمبائی اور سمت دونوں ظاہر کرتا ہے۔ مساوات (15-3) سے ملی قوت کی قدر اس طرح لکھی جاسکتی ہے:

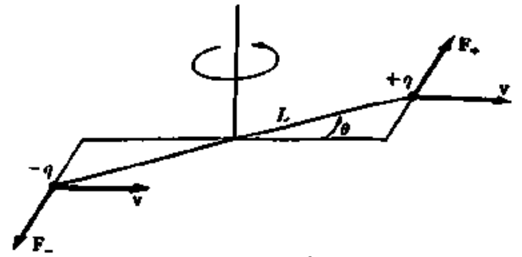
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \frac{v^2}{c^2} \sin\theta, \qquad (15\text{-}4)$$

اور اس کی سمت $\mathbf{v}$ کے عمودی اور $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{v}$ کے مستوی میں ہے مساوات (15-4) سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہ اثر دونوں چارجوں کے درمیان سکونی برقی تفاعل کے مقابلہ میں $(v/c)^2$ کے درجہ کا ہے۔ مروڑ (torque,) کی مطابقہ قیمت یعنی شکل 15-2، میں دکھلائے گئے جفت کی خالص قیمت مندرجہ ذیل ہوگی۔

$$FL\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 v^2 \sin\theta\cos\theta}{c^2 L}$$

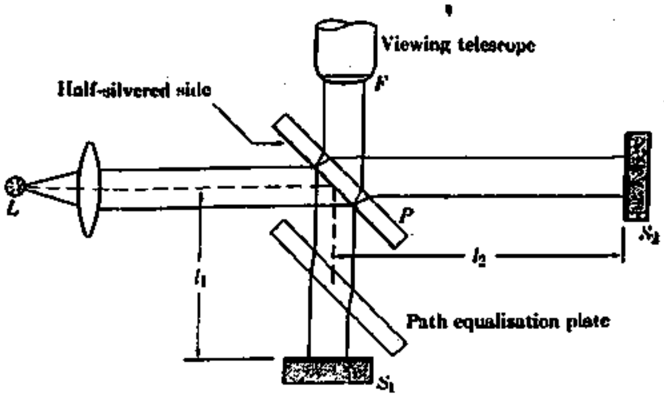
$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L} \frac{v^2}{c^2} \sin 2\theta. \qquad (15\text{-}5)$$

اب اگر کوئی ترجیحی سمتی قدری فریم ہے تو یہ امکان بہت کم معلوم ہوتا ہے کہ یہ وہ فریم ہے جس کے لحاظ سے زمین ساکن ہے اور زمین کی انتقالی



[شکل 15-2. رفتار v سے حرکت کرتے ہوئے برابر اور مخالف چارج F_+
F_- اور F ہم خطی نہیں ہیں]

حرکت سے مذکورہ بالا مروڑ پیدا ہونا چاہیے۔ ٹراوٹن اور نوبل نے ایک تجربہ
کیا جس میں ایک متوازی پلیٹ کا کپیسٹر ایک نہایت نازک ریشہ سے لٹکایا
گیا تھا اور پھر اسے بعد میں اور زیادہ صحت کے ساتھ دوہرایا گیا لیکن یہ
کوئی مروڑ دکھانے میں کامیاب نہیں رہا، حالانکہ اس کی قدر زمین کی اپنے
مدار میں معلوم رفتار v رکھنے پر آسانی سے قابلِ پیمائش ہونا چاہیے۔
ایتھر فریم کو معلوم کرنے کی سب سے مشہور کوشش مائکلسن اور مارلے کا
تجربہ تھا۔ شکل 15-3 میں ایک ماخذ L سے نکلنے والی روشنی کو P. پر
ایک نصف چاندی چڑھے شیشے کے ذریعہ دو شعاعوں میں تقسیم کردیا گیا ہے



[شکل 15-3. مائکلسن۔ مارلے تجربہ]

یہ شعاعیں بالترتیب شیشوں S_1 اور S_2 سے منعکس ہوتی ہیں اور نصف چاندی کے شیشہ سے ہوکر F پر رکھے دوربین پر لوٹتی ہیں جہاں مداخلتی دھاریاں دکھائی پڑتی ہیں۔ آیئے ہم یہ مان لیں کہ ایک سکونی ایتھر کے لحاظ سے یہ آلہ رفتار v سے S_1P کے متوازی حرکت کر رہا ہے۔ کلاسکی طبیعیات کی دلیلوں کے مطابق راستہ PS_1P طے کرنے کے لیے درکار وقت۔

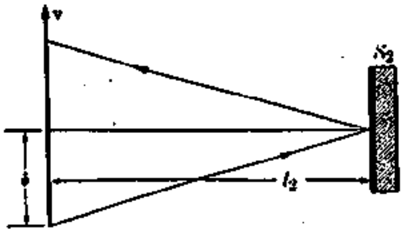
$$t_1 = l_1\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right) = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}, \qquad (15\text{–}6)$$

ہے۔ جہاں $\beta = v/c$. راستہ PS_2P طے کرنے کے لیے درکار وقت کا حساب لگانے میں ہمیں اس بات کو بھی شمار میں لینا ہوگا کہ جب روشنی P سے S_2 کو جا رہی ہوگی اس وقت میں P ایک فاصلہ δ سے ہٹ گیا ہوگا (دیکھیے شکل 15-4) اس سے ملتا ہے:

$$\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+l_2^2}} = \frac{v}{c}; \quad \delta = \frac{\beta l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (15\text{–}7)$$

اس لیے راستہ PS_2P کے لیے:

$$t_2 = \frac{2}{c}\sqrt{l_2^2+\delta^2} = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (15\text{–}8)$$



[شکل 15-4. کا حساب کرنے کے لیے مائکلسن مارلے تجربہ کی تفصیل]

روشنی کے راستے کا فرق Δ یہ ہے

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2\right). \qquad (15\text{–}9)$$

اگر آلہ کو $90°$ گھما دیا جائے تو l_1 اور l_2 آپس میں رول بدل لیتے ہیں اور

$$t'_1 = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{2l_2/c}{1-\beta^2}.$$

روشنی کے راستہ کا نیا فرق یہ ہو جاتا ہے:

$$\Delta' = c(t'_1 - t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

اس لیے آلے کو $90°$ گھمانے پر ہمیں توقع کرنی چاہیے کہ تداخلی نمونہ میں n دھاریوں کا شفٹ ہو جائے گا جہاں n اس سے ملتا ہے:

$$n = \frac{\Delta' - \Delta}{\lambda} = \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$\simeq -\frac{(l_1 + l_2)}{\lambda}\beta^2, \tag{15-10}$$

چونکہ v مقابلتاً c سے چھوٹا ہے۔

مائکلسن اور مارلے نے ایسا کوئی شفٹ نہیں دیکھا۔ ان کے نتیجہ کی صحت کا اندازہ 10 کلومیٹر فی سکنڈ تھا، یعنی زمین کی کسی "ایتھر فریم" کے لحاظ سے رفتار 10 km/sec, سے کم ہونا چاہیے گو کہ اپنے مدار میں زمین کی رفتار موٹے طور پہ 30 km/sec. ہے۔ بہت سی بحث ملر کے تجربات پہ ہوئی جن سے ایک مثبت نشان دہی 10 km/sec رفتار کی ملی جو فضا میں ایک مخصوص نقطہ کی سمت میں معلوم ہوتی تھی لیکن زیادہ بہتر تکنیک سے دھاریوں میں ہٹاؤ نہ ہونے کی تائید ہو گئی ہے اور ملر کے پیمائشوں کے ایک نئے تجزیہ نے یہ دکھایا ہے کہ وہ دوسرے مشاہدین کی پیمائشوں سے غیر ہم آہنگ نہیں ہیں مائکلسن۔ مارلے تجربے کے مختلف مشاہدات کا اختصار نقشہ 15-1 میں دیا گیا ہے اسی کے ساتھ میں مطابقہ حوالی جرنلوں کی فہرست بھی ملحق ہے* ان تجربات میں انٹرفیرومیٹر کے بازو برابر تھے اور ایتھر نظریہ کے مطابق وہ شفٹ $(2l/\lambda)(v/c)^2$, ہے جو زمین کی حرکت کی وجہ سے متوقع ہے۔

نقشہ 15-1

مائکلسن - مارلے تجربے کے مشاہدات

مشاہدہ کرنے والا	سال	جگہ	l	$(2l/\lambda)(v/c)^2$	A	Ratio
Michelson[a]	1881	Potsdam	120 cm	0.04 fringe	0.01 fringe	2
Michelson & Morley[b]	1887	Cleveland	1100	0.40	0.005	40
Morley & Miller[c]	1902–04	Cleveland	3220	1.13	0.0073	80
Miller[d]	1921	Mt. Wilson	3200	1.12	0.04	15
Miller[e]	1923–24	Cleveland	3200	1.12	0.015	40
Miller[f] (sunlight)	1924	Cleveland	3200	1.12	0.007	80
Tomaschek[g] (starlight)	1924	Heidelberg	860	0.3	0.01	15
Miller[h]	1925–26	Mt. Wilson	3200	1.12	0.044	13
Kennedy[i]	1926	Pasadena & Mt. Wilson	200	0.07	0.001	35
Illingworth[j]	1927	Pasadena	200	0.07	0.0002	175
Piccard & Stahel[k]	1927	Mt. Rigi	280	0.13	0.003	20
Michelson *et al.*[l]	1929	Mt. Wilson	2590	0.9	0.005	90
Joos[m]	1930	Jena	2100	0.75	0.001	375

[a] A. A. Michelson, *Am. J. Sci.* **22**, 120 (1881); *Phil. Mag.* **13**, 236 (1882).
[b] A. A. Michelson and E. W. Morley, *Am. J. Sci.* **34**, 333 (1887); *Phil. Mag.* **24**, 449 (1887).
[c] E. W. Morley and D. C. Miller, *Phil. Mag.* **9**, 680 (1905); *Proc. Am. Acad. Arts Sci.* **41**, 321 (1905).
[d] D. C. Miller, *Data sheets of observations*, Dec. 9–11, 1921 (unpublished).
[e] D. C. Miller, *Observations*, Aug. 23–Sept. 4, 1923; June 27–July 26, 1924 (unpublished).
[f] D. C. Miller, Observations with Sunlight on July 8–9, 1924, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **11**, 311 (1925).
[g] R. Tomaschek, *Ann. Physik* **73**, 105 (1924).
[h] D. C. Miller, *Rev. Mod. Phys.* **5**, 203 (1933).
[i] R. J. Kennedy, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **12**, 621 (1926); *Astrophys. J.* **68**, 367 (1928).
[j] K. K. Illingworth, *Phys. Rev.* **30**, 692 (1927).
[k] A. Piccard and E. Stahel, *Compt. rend.* **183**, 420 (1926); **184**, 152, 451 (1927).
[l] A. A. Michelson, F. G. Pease, and F. Pearson, *Nature* **123**, 88 (1929); *J. Opt. Soc. Am.* **18**, 181 (1929).
[m] G. Joos, *Ann. Physik* **7**, 385 (1930); *Naturwiss.* **38**, 784 (1931).

trials of the Michelson-Morley experiment is given in Table 15–1, to which is appended a list of the appropriate journal references.* In these experi-

---

* "New Analysis of the Interferometer Observations of Dayton C. Miller," by R. S. Shankland, S. W. McCuskey, F. C. Leone, and G. Kuerti, *Rev. Modern Phys.* **27**, 167 (1955). Table 15–1 is reproduced here through the courtesy of these authors.

دھاریوں کے شفٹ کے دوسرے ہارمونک کی وسعت جو ہر مشاہدے فی الواقع پائی اُس کالم میں دی گئی ہے جس کے سر پر .A لکھا ہے۔ مختلف تجربات کی صحت کا ایک موازنہ مہیا کرنے کی غرض سے اضافیت سے پہلے کے متوقع شفٹ کی .2A سے نسبت آخری کالم میں دی ہوئی ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ بہت بھروسے کے ساتھ نتیجے کو صفر مانا جا سکتا ہے۔

15-3 لارنز۔فیٹز جیرالڈ کا تخفیف مفروضہ

ہم نے دیکھا ہے کہ برقی حرکیات میں یا میکانیات میں کسی مزید ترمیم کے بغیر برقی حرکیات کے لیے ایک ترجیحی فریم کی تلاش ناکامیاب رہی ہے۔ مائکلسن مارلے تجربہ کے منفی نتیجہ کے ہوتے ہوئے بھی ایک ترجیحی ایتھر فریم کے تصور کو برقرار رکھنے کی کوشش میں تخفیف کا مفروضہ سامنے آیا۔ لارنز اور فیٹز جیرالڈ نے یہ فرض کیا کہ ایک ساکن ایتھر کی نسبت سے حرکت کرنے کے نتیجے کے طور پر سب اجسام ایک جزو $\sqrt{1-\beta^2}$ سے حرکت کی سمت میں سکڑ جاتے ہیں۔ اس مفروضہ کی بنا پر شکل 15-3 کا l_1 درحقیقت $l_1^0\sqrt{1-\beta^2}$, کے برابر ہے جہاں l_1^0 وہ لمبائی ہے جو l_1 کی ایتھر کی نسبت سے ساکن رہنے پر ہوتی ہے۔ جبکہ $l_2 = l_2^0$. اس لیے مساوات (15-9) یہ ہو جاتا ہے۔

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}(l_1^0 - l_2^0) \qquad (15\text{-}11)$$

اور 90° ڈگری گھمانے پر دھاریوں میں کوئی شفٹ نہیں ملے گا۔ علاوہ بریں اگر $l_1^0 \simeq l_2^0$, جیسا کہ پہلے تجربات میں رہا تھا تو رفتار بدلنے سے دھاریوں میں کوئی شفٹ نہیں ہوگا۔ لیکن اگر $l_1^0 \neq l_2^0$, تو لارنز تخفیف کے ہونے ہوئے بھی رفتار میں تبدیلی سے دھاریوں کا متوقع شفٹ تقریباً عبارت

$$n = \frac{l_1^0 - l_2^0}{\lambda}(\beta'^2 - \beta^2) \qquad (15\text{-}12)$$

سے ملتا ہے۔ جیسا کہ جزو $(\beta'^2 - \beta^2)$ سے ظاہر ہوتا ہے۔

کینیڈی نے ایک ایسا تداخل پیما بنایا جس میں راستے کے فرق کی تخفیف

وہ زیادہ سے زیادہ لمبائی استعمال کی گئی جس کی اجازت مآخذ کا ربط دیتی تھی۔ آلہ کی رفتار کا مربع مانا جاسکتا ہے کہ حسب ذیل سے ملے گا۔

$$v^2 = c^2\beta^2 = (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_S)^2,$$

جہاں $\mathbf{v}_E$ زمین کی رفتار سورج کی نسبت سے ہے $\mathbf{v}_R$ گردش کی وجہ سے زمین کے سطح کی رفتار ہے اور $\mathbf{v}_S$ سورج کی رفتار ہے۔ ہر بارہ گھنٹے بعد یہ مقدار اتنی بدل جائے گی۔

$$\Delta v^2 = 4(\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{v}_R,$$

اور ہر چھ ماہ میں اس کی تبدیلی یہ ہوگی۔

$$\Delta v^2 = 4(\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_R) \cdot \mathbf{v}_E.$$

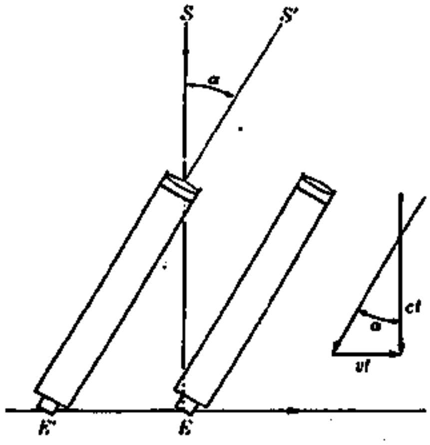
ان میں سے کوئی اثر مشاہدے میں نہیں آیا جو لارنز کے تخفیف کے مفروضہ کے خلاف ہو۔

15-4 ایتھر کا ڈریگ

ایک مزید امکان جس کے ذریعہ ایتھر کے تصور کو مائکلسن مارلے کے نتیجہ سے ہم آہنگ کیا جاسکتا ہے یہ خیال ہے کہ ایتھر فریم مادّی اجسام کے ساتھ گھرا ہوا ہے۔ اس سے زمینی تداخل پیما تجربات یا ٹراؤٹن۔ نوبل تجربہ از خود صفر نتیجہ دیں گے۔ لیکن ایک مقامی ایتھر کا مفروضہ دو بخوبی مستند مظاہر کے سیدھے تضاد میں ہے۔

پہلا قائم ،، ستاروں کا فتور ہے۔ زمین کی آفتاب کے گرد حرکت کی وجہ سے دور کے ستارے مداروں میں گھومتے ہوئے معلوم ہوتے ہیں، جن کا زاویائی قطر "41 ہے۔ ایک ایسے ستارہ پر غور کیجیے جو دائرہ فلکی کی بلند ترین اونچائی پر ہے۔ اگر اس ستارے کا مشاہدہ ایک دوربین سے کرنا ہو تو دوربین کی نلی کو زمین کی حرکت کی سمت کی طرف ایک زاویہ α، پر جھکانا ہوگا جیسا شکل 15-5. میں دکھایا ہے۔ شکل سے دیکھا جاسکتا ہے کہ کلاسیکی لحاظ سے

اور زمین کی اپنے مدار میں رفتار کو 30 km/sec مان کر $\alpha = 10^{-4} = 20.5''$ آتا ہے جو مشاہدے سے اتفاق کرتا ہے۔ اگر زمین ایتھر کو ساتھ میں گھسیٹتی ہوئی حرکت کرتی تو ہم کسی فتور کی توقع نہیں کر سکتے تھے۔



[شکل 15-5. ستارہ کی روشنی کا فتور SE ستارہ سے آنے والی روشنی کا اصل راستہ ہے اور $S'E'$ وہ راستہ ہے جو ہمیں بظاہر معلوم ہوتا ہے]

دوسرا تضاد ایک متحرک وسیلے میں برق مقناطیسی لہروں کی ترسیل کے سلسلے میں سامنے آتا ہے۔ ہم نے سیکشن 11-4 میں دیکھا ہے کہ روشنی کی رفتار کا صرف وہ حصہ جس کا انحصار تقطیبی کرنٹ $\partial P/\partial t$ پر ہے وسیلہ کی حرکت سے اثر پذیر ہوتا ہے جبکہ $\epsilon_0(\partial E/\partial t)$ والی رقم نہیں بدلتی۔ اگر ایتھر وسیلے کے ساتھ حرکت کرتا ہوتا تو ترسیلی رفتار۔ فرنیل فیز و ضریبہ سے حاصل ہونے کی بجائے محض $c \pm v$, ہوتی۔ یہ نتیجہ مشاہدے کے خلاف ہے۔ اس لیے "ایتھر کا گھسٹنے" کا مفروضہ v/c. میں پہلے درجہ کی سہولت دیتا ہے۔

ان دلیلوں کے پیش نظر ایک ترجیحی فریم کا خیال اُس حالت میں بھی جب کہ یہ مقامی طور پر ساکن ہو، نا قابل قبول معلوم ہوتا ہے، اس لیے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ برقی حرکیات کے لیے بھی ایک اضافیتی اصول جانا

ہونا چاہیے۔ یہ اس مانگ کے مرادف ہے کہ یا تو برقی حرکیات میں یا کلاسیکی میکانیات میں ترمیم کی جائے۔ ہم پہلے ان کوششوں پر غور کریں گے جو برقی حرکیات کو اس طرح ترمیم کرنے کے لیے کی گئیں کہ ایک ایتھر فریم کے خیال سے منسلک تضادوں سے بچا جا سکے۔

15-5 اخراجی نظریے
نام نہاد اخراجی نظریوں میں برقی حرکیات میں تبدیلی یہ فرض کر کے کی جاتی ہے کہ روشنی کی لہر کی رفتار ماخذ سے منسلک رہتی ہے نہ کہ ایک مقامی یا عالمی فریم سے۔ سب اخراجی نظریوں میں یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ روشنی کی رفتار اصل ماخذ کی نسبت سے c/n ہے اور انعطافی انڈیکس n والے ترسیلی وسیلے کی حالت کا اس پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ نظریوں میں باہمی فرق صرف اس بات میں ہے کہ ایک متحرک آئینہ سے انعکاس ہونے پر روشنی کی رفتار کا کیا ہوتا ہے۔ انعکاس ہونے پر تین ممکنات ہو سکتے ہیں۔

(1) رفتار اصلی ماخذ کی نسبت سے c/n بنی رہے۔

(2) رفتار آئینہ کی نسبت سے c/n ہو جائے (اسے حرکی نظریہ بھی کہا جاتا ہے)

(3) رفتار آئینہ شبیہہ کی نسبت سے c/n ہو جائے۔

پہلا امکان رٹز نے پیش کیا تھا اور تینوں نظریوں میں سے صرف ایک اسی میں منعکس روشنی کے ساتھ ہم ربطی کی مشکلات در پیش نہیں ہوتیں۔ رٹز نے میکسویل کے دو مساوات:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

کو برقرار رکھا جن میں $\mathbf{E}$ اور $\mathbf{B}$ پہلے کی طرح مندرجہ ذیل اخذ ہوتے ہیں

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

لیکن اس نے اُن دونوں مساوات کو جن میں مآخذ شامل ہیں ان سے بدل دیا۔

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho[x'_0, t - r/(c + v_r)]}{r}\, dv', \qquad (15\text{–}14)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}[x'_0, t - r/(c + v_r)]}{r}\, dv', \qquad (15\text{–}15)$$

جہاں v_r منبع کی رفتار کا جزاُس ویکٹر کی سمت میں ہے جو مآخذ کو مشاہدہ کے نقطہ سے ملاتا ہے۔ مساوات (15–14) اور (15–15) معمولی پس معضری حلوں کی جگہ لے لیتی ہیں جو مساوات (14–24) اور (14–25) سے ملتے ہیں۔ اس طرح سے ایک متحرک مآخذ کی وجہ سے بنے میدانوں کا تعین ہو سکتا ہے۔

متحرک آئینوں سے منعکس ہوئی کرنوں کے درمیان مداخلت کے تجربات کے لیے تینوں اخراجی نظریے معمولی برقی مقناطیسی نظریے کے مقابلہ میں v/c میں پہلے درجہ کے فرق کی پیشین گوئی کرتے ہیں۔ تھامسن، ماجورانا اور اسٹیورٹ نے ایسے تجربات کیے اور جو نتائج ملے وہ دوسرے اور تیسرے اخراجی نظریے کے خلاف لیکن رٹز کے نظریے کی پیشین گوئیوں کی تجرباتی سہو کے اندر مطابقت میں پائے گئے۔ یہ ظاہری مطابقت اس حقیقت کی وجہ سے کہ دو مداخلتی کرنوں کے کسی بند نظام کے رٹز کا نظریہ جو نتائج دیتا ہے وہ اُن نتائج سے جو روشنی کی رفتار کے مستقل رہنے کی حالت میں متوقع ہیں صرف v/c میں دوسرے درجہ کی رقموں کا اختلاف رکھتے ہیں۔ رٹز کے مطابق اگر مآخذ آئینہ کی طرف رفتار v سے حرکت کر رہا ہے تو جاتے وقت ایک فاصلہ l طے کرنے کا وقت $l/(c + v)$, ہے جب کہ آئینہ سے منعکس ہو کر لوٹتے وقت یہ $l/(c - v)$. ہو جاتا ہے۔ پورے گزرے ہوئے وقت کے لیے یہ ملتا ہے:

$$\Delta t = \frac{2l}{c(1 - \beta^2)},$$

اس کا $t = 2l/c.$ سے فرق صرف دوسرے درجہ کی رقموں کا ہے $t = 2l/c$ وہ وقفہ ہے جو اس حالت میں ہوتا جب کہ روشنی کی رفتار مستقل ہوتی۔ اسں

وجہ سے زمین پر کے متحرک ماخذ اور آئینوں کے تجربے رٹز کے اخراجی نظریے کے خلاف پہلے درجہ کا فرق دینے میں ناکامیاب رہتے ہیں۔

لیکن زمین سے باہر کے دو مظاہر ایسے ہیں جو کسی بھی قسم کے اخراجی نظریے کے مخالف ہیں۔ گرہن والے دوہرے ستاروں کی حرکیات کا ڈی سٹر نے بہت ہی پُر احتیاط تجزیہ کیا ہے۔ اگر روشنی کی رفتار میں ماخذ کی رفتار جمع ہو جاتی ہے تو یہ ظاہر ہے کہ زمین کی طرف کو حرکت کرنے والے ستارے سے زمین تک روشنی پہنچنے کا وقت اس وقت سے کم ہوگا جو اس جوڑے کے زمین سے دور جانے والے دوسرے ستارے سے آنے میں لگے گا۔ ڈی سٹر نے دکھایا کہ اس کا اثر میکانیات کے

نقشہ 15-2

نظریہ		تنویر	فیزو کا [illegible]	مائیکلسن مارلے	کینیڈی تھارن ڈائیک	متحرک ماخذ اور آئینے	ڈی سٹر کے طیفی دوہرے ستارے	مائیکلسن مارلے تجربہ سورج کی روشنی کا استعمال	کمیت کی رفتار کے ساتھ تبدیلی	مادہ توانائی کی تبادلیت	متحرک بار کی اشعاع	زیادہ رفتار پر میسان کا زوال	ٹراؤٹن نوبل	مستقل مقناطیس کے استعمال سے اکہری قطبی امالہ
		روشنی کی ترسیل کے تجربے							دوسرے میدانوں کے تجربے					
ایتھر نظریے	ساکن ایتھر بلا تخفیف	A	A	D	D	A	A	D	D	N	A	N	D	D
	ساکن ایتھر لارنز تخفیف	A	A	A	D	A	A	A	A	N	A	N	A	D
	مادی اجسام سے چمٹا ایتھر	D	D	A	A	A	A	A	D	N	N	N	A	N
اخراجی نظریے	اصلی منبع	A	A	A	A	A	D	D	N	N	D	N	N	N
	حرکتی	A	N	A	A	D	D	D	N	N	D	N	N	N
	نیا منبع	A	N	A	A	D	D	A	N	N	D	N	N	N
مخصوص نظریہ اضافیت		A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

کنجی : A, تجرباتی نتائج نظریہ سے مطابقت رکھتے ہیں
D, تجرباتی نتائج نظریہ سے مطابقت نہیں رکھتے۔
N, نظریہ تجربہ پر لاگو نہیں ہے

قوانین کے مطابق شمار کیے گئے مدار میں ایک مصنوعی کج مرکزیت داخل کرنا ہوگا۔ فی الواقع ایسا کوئی اثر مشاہدے میں نہیں آیا ہے۔ درحقیقت ڈی سٹر نے یہ نتیجہ نکالا کہ اگر $v_{light} = c + kv_{star}$ تو $k < 0.002$ دوسرا خارج الارض ثبوت ملر کا یہ تجربہ ہے کہ مائکلسن مارلے تجربے میں کوئی اثر نہیں پڑتا اگر سورج سے آنے والی روشنی کا استعمال کیا جائے۔ رٹز کا نظریہ تداخلی نمونے میں پیچیدگیوں کی پیشین گوئی کرتا ہے جس کی ایک وجہ آفتاب کی گردش ہے۔

نقشہ 15-3

	مخصوص نظریہ اضافیت	کلاسکی ایتھر نظریہ	اخراجی نظریہ
حوالہ کا نظام	مخصوص نظریہ اضافیت	سکونی ایتھر مخصوص حوالہ کا نظام ہے	کوئی مخصوص حوالہ کا نظام نہیں
حرکت پر انحصار	روشنی کی رفتار کا انحصار حرکت پر نہیں ہے	روشنی کی رفتار منبع کی حرکت سے آزاد ہے	روشنی کی رفتار منبع کی حرکت پر منحصر ہے
فضا وقت کا رشتہ	فضا اور وقت ایک دوسرے سے آزاد نہیں ہیں	فضا اور وقت ایک دوسرے سے آزاد ہیں	فضا اور وقت ایک دوسرے سے آزاد ہیں
تبادل کے مساوات	استمراری فریم جو اضافتی حرکت میں ہیں لارنز تبادل کے ذریعہ مربوط ہیں	استمراری فریم جو اضافتی حرکت میں ہیں گیلیلی تبادل کے ذریعہ مربوط ہیں	استمراری فریم جو اضافتی حرکت میں ہیں گیلیلی تبادل کے ذریعہ مربوط ہیں

15-6 خلاصہ

اس باب میں ہم نے برقی حرکیات اور نیوٹنی میکانیات کے آپسی تضاد کے مختلف قسم کے ثبوتوں پر غور کیا۔ نقشہ 15-2 میں موزوں تجربات کا ایک خلاصہ دیا گیا ہے جس میں ایسے تجربات بھی شامل ہیں جن کا اس موضوع سے رابطہ تب تک صاف ظاہر نہیں ہوگا جب تک ہم نظریہ اضافیت پر بحث نہ کر لیں۔ نظریہ سے مطابقت بٹھانے کے لیے کی گئی کوششوں کے ساتھ ان کا رشتہ دکھایا گیا ہے اور نقشہ 15-3 میں سیکشن

15-1. میں دیے گئے تین عام امکانات کے بنیادی مفروضات کی فہرست دی گئی ہے۔ نقشہ 15-2 سے صاف ظاہر ہے کہ نظریہ اضافیت کا تجرباتی بنیاد جو نیوٹن کی میکانیات کو ترمیم کرتا ہے ایسے مشاہدات پر مشتمل ہے جو دوسرے سب واجب امکانات کے خلاف ہیں۔ ایسا کوئی بھی تجربہ نہیں ہے جو نظریہ اضافیت کو ثابت کرتا ہو۔ تجربات بیشک اس بات کا ثبوت پیش کرتے ہیں کہ:

(1) کسی ایتھر کا وجود خواہ مقیم ہو یا عملی طور پر لے جایا جاتا ہو، دکھایا نہیں جاسکتا

(2) برقی حرکیات میں ترمیمیں جیسے کہ اخراجی نظریات، ممکن نہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکالنا صحیح معلوم ہوتا ہے کہ میکانیات کے بنیادی قوانین میں ترمیم کی ضرورت ہے۔ 1905, میں اس زمانے کی معلوم تجرباتی حقیقتوں کی ہم آہنگی میں آئنسٹائن نے مندرجہ ذیل مفروضات کو حل کے طور پر پیش کیا:

1. برقی حرکیات کے قانون (جس میں قدرتاً روشنی کی آزاد فضا میں رفتار c سے ترسیل شامل ہے) اور میکانیات کے قانون سبھی استمراری فریموں میں ایک سے رہتے ہیں۔

2. ایسا تجربہ اختراع کرنا جو مطلق حرکت کی حالت کا تعین کرسکے یا کسی طبیعی مظہر کے لیے مخصوص صفات والا ایک ترجیحی استمراری فریم دریافت کرسکے غیر ممکن ہے اگر طبیعیات کے قوانین ان دو مفروضات سے مطابقت رکھتے ہیں تو وہ سب تجربات جن کی فہرست 15-2 میں دی گئی ہے سمجھ میں آسکتے ہیں۔ اگلے باب میں ہم ان مفروضات سے جنھیں مخصوص اضافیت کے مفروضات کہتے ہیں وابستہ نتائج کا جائزہ لینا شروع کریں گے۔

مخصوص اضافیت کے مفروضات ایک "استمراری فریم" کے معنی کے سوال کو اُسی غیر اطمینان بخش حالت میں چھوڑ دیتے ہیں جیسی کہ گیلیلی اضافیت کے اصول میں تھی۔ بالخصوص ایک استمراری فریم کی شناخت قوتوں کی غیر موجودگی میں اسراع کی غیر موجودگی کے لحاظ سے کرنا درحقیقت ایک "دائری" دلیل بنا رہتا ہے کیونکہ یہ قوت کی تعریف کو کھلا چھوڑ دیتا ہے۔ اس پس منظر میں ایک استمراری فریم وہ فریم ہے جس میں اجسام ایک مستقل حرکت میں قائم رہتے ہیں اگر معلوم (ا) قوتوں

کا اثر نا قابلِ لحاظ ہو۔ اس واضح غیر اطمینان بخش تعریف سے بچنا ممکن نہیں ہے جب تک کہ عام اضافیت کے زیادہ وسیع ڈھانچے کو بحث میں داخل نہ کیا جائے۔

مخصوص اضافیت کی تجرباتی بنیاد پر مزید مقالے

1. **Trouton and Noble**, *Phil. Trans.* **A202**, 165 (1903); *Proc. Roy. Soc.* (London) **72**, 132 (1903)

ایک چارج کیے ہوئے کپیسٹر پر مروڑ معلوم کرنے کی کوششوں پر رپورٹ

2. **Lorentz**, "Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern," Leiden, 1895.

تخفیف کے مفروضہ پر سیکشنوں The Principle of Relativity میں جو نیچے کی فہرست میں دی گئی ہے پھر سے چھاپا گیا ہے

3. **Kennedy and Thorndike**, *Phys. Rev.* **42**, 400 (1932).

نا برابر بازوؤں کا تداخل پیما۔ صفر نتیجہ ± 10 km/sec. تک
اصلی ماخذ کا اخراجی نظریہ

4. **Rits**, *Ann. Chim. et Phys.* **13**, 145 (1908).

5. **Tolman**, *Phys. Rev.* **31**, 26 (1910); *Phys. Rev*, **35**, 136 (1912). **Thomson, J. J.**, *Phil. Mag.* **19**, 301 (1910). **Stewart**, *Phys. Rev.* **32**, 418 (1911).

مختلف اخراجی نظریوں پر بحث

6. **Comstock**, *Phys. Rev.* **30**, 267 (1910); **de Sitter**, *Proc. Amsterdam Acad.* **15**, 1297 (1913), and **16**, 395 (1913).

دوہرے ستاروں پر اسپکٹرا سکوپی کام

7. **Majorana**, *Phil. Mag.* **35**, 163 (1918), and **37**, 145 (1919).

متحرک ماخذ اور آئینہ کے تجربات

مائکلسن۔مارلے تجربہ میں اونچے درجہ کے جیامٹریائی اثرات

8. **Kennedy**, *Phys. Rev.* **47**, 965 (1935).

پر تحقیقی بحث

اضافیاتی ڈاپلر شفٹ

9. **Ives**, *J. Opt. Soc. Am.* **28**, 215 (1938).

اور حوالہ جات اضافیتی نظریہ پر کتابوں میں ملیں گے جن کی فہرست نیچے دی گئی ہے

مجوّزہ حوالے

R. BECKER, *Theorie der Elektrizität*, Band II.

مخصوص اضافیت کے نظریہ کی تجرباتی بنیادوں کا بہت صاف و واضح بیان۔ خاص طور سے صفحات 255-269

P. G. BERGMANN, *An Introduction to the Theory of Relativity*.

اس عمدہ کتاب کے پہلے تین بابوں میں مخصوص اضافیت کی ضرورت کا پڑھنے کے قابل عمدہ بیان ہے۔

A. EINSTEIN, H. A. LORENTZ, H. MINKOWSKI, AND H. WEYL, *The Principle of Relativity*, "A Collection of Original Memoirs of the Special and General Theory of Relativity, together with Notes by A. Sommerfeld."

خاص طور سے مطلب کا وہ سیکشن ہے جو "Michelson's Interference Experiment" پر لارنز نے لکھا ہے اور اس کی "Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Less than that of Light." پر لکھے پیپر کے کچھ حصے۔

R. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*.

گو کہ تجربات کو تشریح سے بیان نہیں کیا گیا ہے لیکن ایک خلاصہ باب II, میں شامل ہے ساتھ میں اصلی نوشتوں کے حوالے بھی۔

C. MØLLER, *The Theory of Relativity*.

مشق

1. ۔ معلوم کیجیے کہ لہر مساوات گیلیلی استحالہ کے تحت کیا ہو جاتا ہے۔

2. ۔ مساوات (15-5) سے ملنے مروڑ کو $\frac{1}{2}U_{el}(v/c)^2 \sin 2\theta$. لکھا جا سکتا ہے جہاں U_{el} مخالف چارجوں کے نظام کی برق سکونی توانائی

ہے۔ دکھایئے کہ اس متوازی پلیٹ کپیسٹر کے لیے جو ٹراوٹن اور نوبل نے استعمال کیا مروڑ $U_{01}(v/c)^2 \sin 2\theta$. ہے جو مساوات (15-5) کے مروڑ کا دوگنا ہے۔

3. ایک متوازی پلیٹ کپیسٹر پر متوقع مروڑ کو معلوم کیجیے جو زمین کی مداری رفتار 30 km/sec. کی سمت سے 45° کا زاویہ بناتا ہوا لٹکایا گیا ہے۔ پلیٹ کا رقبہ 100 cm², فاصلہ 1 cm. اور چارج کرنے کا مضمر 10 kilovolts. لیجیے۔

باب (16)

اضافیتی حرکیات اور لازنز استحالہ

آئنسٹائن کے رسمی مفروضات کے علاوہ دو اعانتی اصول اضافیت کے نظریے میں غیر صریحی طور پر موجود ہیں جن کا سمجھنا طبیعی تصورات کی ضروری ترمیم کے لیے اہم ہے۔ پہلا "وقت کے تصور کا غیر تغیری ہونا ہے۔ وقت میں تجربے کا غیر تشاکل کافی بحث کا موضوع رہی ہے۔ رواجی طبیعیات کے نقطۂ نگاہ سے صرف ایک ہی تصور ایسا ہے جو وقت میں غیر تشاکل ہے، یہ انٹراپی ہے۔ لیکن اس سے یہ مفروضہ واجب معلوم ہوتا ہے کہ حرکیات کے دوسرے قانون کو وقت کی مثبت سمت وہ مانیں گے جس میں شماریاتی طور پر بے ترتیبی بڑھ رہی ہو یا انٹراپی بڑھ رہی ہو اور حرارت کا تنزل ہو رہا ہو۔ دوسرے مفروضہ کو صحیح مقداروں کی غیر تغیری ہونا" یا "صحیح مقداروں کے قابلِ تکرار ہونے کا قانون کہا جا سکتا ہے اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ جب کبھی ایک پیمائشی تجربہ کیا جاتا ہے تو ایک معیار کی لمبائی (جیسے کہ ایک دیے ہوئے اسپکٹرمی خط کی لہر لمبائی یا ایک رولے کی جالی کا فصل) اور ایک بنیادی گھڑی کی شرح (جیسے کسی تابکار کا زوالی دور) وہی رہے گی جو معیار کے لحاظ سے ایک ساکن مشاہد دیکھتا ہے۔ ان زائد مفروضات سے یہ ممکن ہو جاتا ہے کہ مخصوص اضافیت کے مفروضات کے نتائج تجزیہ کے دوران ہم لمبائی اور وقت کے لیے ایک درست اور قابلِ تکرار معنی قائم رکھ سکیں۔

16-1 **روشنی کی رفتار اور ہم وقتی** ہم نے باب 15 میں دیکھا ہے کہ اس نتیجہ پر پہنچنے کے لیے وافر

تجرباتی ثبوت ہیں کہ طبیعیات کے ہر شعبہ کے لیے جس میں برقی حرکیات بھی شامل ہے ایک اضافیتی اصول لاگو ہوتا ہے۔ دوسری باتوں کے علاوہ اس کا مفہوم یہ ہے کہ آزاد فضا میں ہموار برق مقناطیسی لہروں کی ترسیل کی رفتار c کو مشاہد کے استمراری فریم سے بے تعلق ہونا چاہیے۔ یہ بیان اگرچہ بظاہر صحیح معلوم ہوتا ہے لیکن ہمارے وجدان کے بالکل خلاف ہے۔ روشنی کے ایک پلس پر غور کیجیے جو نقطہ O سے شروع ہوتا ہے اور خیال کیجیے کہ اس واقعہ کو دو فریموں میں مقیم مشاہد دیکھتے ہیں، O ایک فریم کے مبدا پر ہے جب کہ دوسرا O کے لحاظ سے رفتار v سے حرکت میں ہے۔ پلس کے اخراج کے وقت مان لیجیے کہ دونوں فریموں کے مبدا منطبق ہیں۔ اضافیت کے اصول کے مطابق دونوں مشاہدین کو روشنی کی لہروں کو ایک کرّوی شکل میں ترسیل ہوتے ہوئے دیکھنا چاہیے جس کا مرکز ان کا اپنا اپنا مبدا ہونا چاہیے۔ اگر ہم یہ مانتے ہیں کہ لہری محاذ کا مقام ایک واقعہ ہے جس کا آزادانہ بیان فضا اور وقت کے لحاظ سے کیا جا سکتا ہے تو ہم اس بیان کو صحیح نہیں مان سکتے۔ اس لیے روشنی کی رفتار کا کسی مخصوص فریم سے بے تعلق ہونا اس عام رواج کی ترمیم کو ضروری بنا دیتا ہے کہ ایک واقعہ کے مقامی سمتی قدروں کا تعین، تو ایک خاص فریم کے لحاظ سے کیا جاتا ہے جب کہ اس واقعہ کے وقت کا تعین ایک "عالمی" وقت کے پیمانے سے کیا جاتا ہے دو لہر محاذوں کا تضاد اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ مشاہد کے فریم پر ہم وقتی منحصر نہیں ہوتی ہے۔ اگر نقطوں کے ایک سٹ میں سے ہو کر بہ یک وقت جانے کے بابت اتفاق نہ ہونے کی اجازت ہو تو خیال یہ ہے کہ ایک ایسے حرکیات کی تشکیل کی جا سکے گی جس میں دونوں حوالی فریموں میں روشنی کی کرّوی لہر دکھائی پڑے۔

نتیجہ کے طور پر ہمیں ہم وقتی کے تصور پر پھر سے غور کرنا ہے۔ اگر ہمیں ایک عالمی وقت کے وجود کو اس لیے چھوڑنا ہے کہ وہ حقیقت سے مطابقت نہیں رکھتا تو ہمیں ایک ایسے نظام کی تعمیر کرنی ہوگی جس کے ذریعے کسی دیے ہوئے فریم میں ہم وقتی کا تعین کیا جا سکے۔ یہ نظام ایسا ہونا چاہیے کہ اس مخصوص فریم

میں اپنے ہی وقت اور فضا کے پیمانوں کا استعمال کرنے پر روشنی کی رفتار c ملے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وہ واحد طریقہ جس سے ہم وقتی کی تعریف کی جا سکتی ہے روشنی کی رفتار کے ذریعہ ہی ہو سکتا ہے۔ یہ نتیجہ c کو محض برق مقناطیسی لہروں کی ترسیلی رفتار سے کہیں زیادہ بنیادی اہمیت دے دیتا ہے اس سے c طبیعیات کے سب رشتوں میں داخل ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر ہم وقتی کے تعریفی عنصر میں c کے استعمال سے میکانیات کے "مثالی استوار جسم" کا وجود قائم نہیں رہ سکتا، کیوں کہ اگر کوئی ایسا جسم ہو تو اس کے سرے کسی فریم سے مشاہدہ کرنے پر بہ یک وقت حرکت کریں گے اور اس لیے اسے ایک "عالمگیر وقت" کا تعین کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے جو ہمارے پہلے کے نتیجے کے خلاف ہوگا۔

اس لیے ہم دو لمحوں t_1 اور t_2 کو جن کا ایک مخصوص فریم میں دو نقطوں x_1 اور x_2 پر مشاہدہ کیا گیا ہے ہم وقت خیال کرتے ہیں اگر x_1 اور x_2 کے درمیان کے جیامٹریائی طور سے ناپے گئے وسطی نقطہ سے خارج ہونے والی ایک روشنی کی لہر x_1 پر وقت t_1 پر اور x_2 پر وقت t_2 پر پہنچی ہو۔

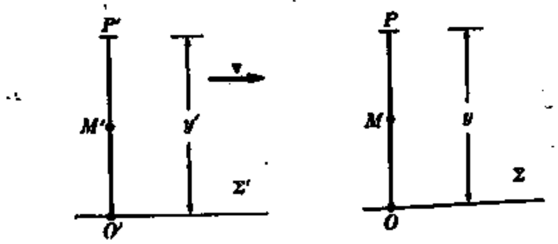
اس تعریف سے از خود یہ لازم ہو جاتا ہے کہ روشنی کی ایک پلس جو مبدا سے خارج ہوئی ہے، برابر فاصلے والے سب نقطوں پر بہ یک وقت پہنچے گی اور اس لیے لہر سطح کسی مخصوص حوالی فریم میں ایک کرّہ ہوگی اس طرح مکانی لحاظ سے دو الگ نقطوں پر دو الگ واقعوں کی ہم وقتی فریم سے الگ ہٹ کر کوئی مطلب نہیں ہے۔ دو مختلف فریموں سے مشاہدہ کیے گئے وقت وقفوں کا رشتہ واقعوں کی فضائی دوری پر منحصر ہوگا اور گیلیلی استحالے کے مساوات (1-16) جو دو فریموں سے مشاہدہ کیے گئے وقت وقفوں کا استحالہ فضائی سمتی قدروں سے آزادانہ کر کرتے ہیں c کے لحاظ سے تعریف کی گئی ہم وقتی کے ساتھ مطابقت میں نہیں ہو سکتے۔ اس لیے ہمیں ایک $(x, y, z; t)$ فریم سے ایک $(x', y', z'; t')$ فریم کے لیے مطابقۃ استحالہ اخذ کرنے کی کوشش کرنی

ہوگی جو گیلیلی استحالے کی جگہ لیں۔ یہ استحالہ ہے جس سے مکان اور زمان میں ہر نقطہ کی ریاضیاتی ہم مساوریت ہی رہے۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہوگا کہ مکانی اور زمانی سمتی قدروں کا استحالہ ایک دوسرے سے آزاد ہو۔

16-2 مخصوص اضافیت میں حرکی رشتے

جو استحالہ ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں وہ کسی بھی واقعہ کے مکانی و زمانی سمتی قدروں $(x, y, z; t)$ کے جسے Σ, سے ظاہر کیے گئے ایک سمتی قدری فریم سے مشاہدہ کیا گیا ہے اور ایک دوسرے فریم Σ' سے جو Σ. کے لحاظ سے ایک مستقل رفتار v. سے حرکت کر رہا ہے، مشاہدہ کیے گئے مکانی اور زمانی سمتی قدروں $(x', y', z'; t')$ کے درمیان رشتے دیگا یہ استحالہ کسی بھی واقعہ کے لیے سیکشن 15-6, میں دیے ہوئے مخصوص اضافیت کے مفروضات کا پابند ہوگا۔ یہ دیکھنے کے لیے کہ اضافیت کے بنیادی مفروضات کس طرح پر تبادل کی فطرت کو ضروری بنا دیتے ہیں ہم "خیالی تجربات" (Gedanken Experimente) کا ایک ایسا سٹ بنا سکتے ہیں جس میں استحالہ کا ایک وقت میں ایک پہلو داخل کیا جائے۔

تجربہ I. متوازی پیمائشی چھڑیوں کا موازنہ جن کی تشریق اپنی اضافی حرکت کی سمت کے عمودی ہے (دیکھیے شکل (16-1))



[شکل 16-1. متوازی پیمائشی چھڑیوں کا موازنہ جن کی تشریق ان کی اضافی حرکت کی سمت کے عمودی ہے v فریم Σ' کی رفتار ہے جسے فریم Σ. میں ناپا گیا ہے]

یہ صاف طور سے مان لیا گیا ہے کہ ایک مخصوص ترکیب والے دیے ہوئے

جسم کی صفات جو ایسے فریم میں ناپی گئی ہیں جس میں جسم سکون میں ہو اس کی پچھلی تاریخ سے بے تعلق ہیں۔ (یہ جسم کا صحیح فریم کہلاتا ہے اور ایک چھڑ کی ایسے فریم میں ناپی گئی لمبائی کو جس میں چھڑ سکون میں ہو اس کی صحیح لمبائی کہتے ہیں) اس لیے یہ مانگ کرنا ممکن ہے کہ شکل 16-1 کی دونوں پیمائشی چھڑیں OP اور $O'P'$ برابر صحیح لمبائی کی ہوں چاہے وہ ایک دوسرے کے لحاظ سے سکون میں لائی جا سکتی ہوں یا نہیں۔ مثال کے طور پر یہ مخصوص کر دیا جا سکتا ہے کہ ہر چھڑ میں ایک دیے ہوئے اسپکٹرمی خط کی لہر لمبائیوں کی ایک خاص تعداد ہو جنھیں ان کے اپنے فریم میں ناپا گیا ہو۔ دونوں چھڑیں v کے (جسے محور کی سمت میں مان لیا گیا ہے) عمودی ہیں جو نظام Σ' کی رفتار ہے جسے فریم Σ میں ناپا گیا ہے (Σ' میں ایک مشاہد کے لیے Σ کی رفتار $-v$ ہوگی)۔

مان لیجیے کہ دونوں نظام قریب آ رہے ہیں جس سے چھڑوں کے وسطی نقطے M اور M' گزرتے وقت منطبق ہوں گے Σ' کو متحرک اور Σ کو سکونی تصور کرتے ہوئے مان لیجیے کہ جب O' اور P' محور سے منطبق ہوتے ہیں اس وقت O' اور P' سے روشنی کے سگنل بھیجے جاتے ہیں۔ چوں کہ حرکت کے دوران $O'M$ اور $P'M$ برابر رہتے ہیں اس لیے دونوں نظاموں میں بیک وقت پار کریں گے۔ چوں کہ دونوں سروں کے مشاہدے کے وقت کی تعریف دونوں فریموں میں واحد ہے دونوں مشاہد گزرنے کے وقت سرے کے نشانوں کے مقام کا موازنہ کر سکتے ہیں اور اسی نتیجہ پر پہنچیں گے اس لیے دونوں مشاہد یا تو اس نتیجے پر پہنچیں گے کہ $OP \leq O'P'$ یا $OP \geq O'P'$۔ دونوں نظام ہر طرح سے مرادف ہیں اس لیے ایک غیر متشاکل نتیجہ مطلق حرکت دریافت کرنے کا ایک وسیلہ مہیا کرے گا۔

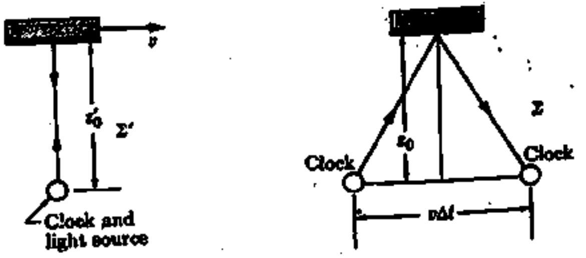
اس امکان کو اضافیت کا مفروضہ خارج کرتا ہے اس لیے ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ وہ لمبائیاں جو حرکت کے عمودی ہیں، دونوں فریموں میں وہی رہتی ہیں اور ایسی لمبائیوں کے لیے استحالہ یہ ہے:

$$y' = y, \quad z' = z \qquad (16\text{-}1)$$

جو بالکل گیلیلی استحالہ کی طرح ہے۔

تجربہ II. گھڑیوں کی رفتار کا موازنہ اضافتی حرکت رکھنے والے سمتی قدری فریموں میں چسپاں گھڑیوں کی شرح کا موازنہ کرتے وقت ہمیں یہ دھیان میں رکھنا ہوگا کہ Σ فریم میں ایک گھڑی کا Σ' فریم میں ایک گھڑی سے موازنہ غیر ممکن ہے، کیونکہ گھڑیاں انطباق کی حالت میں ٹھہری نہیں رہیں گی۔ ہمیں Σ میں دو گھڑیوں کا Σ' میں ایک گھڑی سے موازنہ کرنا ہوگا اور Σ میں رکھی دونوں گھڑیوں کو روشنی کے سگنلوں کے ذریعہ یک وقتی کرنا ہوگا۔ مان لیجیے کہ ایک روشنی کا ماخذ اسی مقام پر واقع ہے جہاں Σ' میں گھڑی ہے جیسا شکل 16-2 میں دکھایا گیا ہے۔ ایک روشنی کا سگنل جو v کے عمودی ہے ایک شیشہ سے جو v محور کے عمودی اور ماخذ سے فاصلہ z_0 پر واقع ہے منعکس ہوتا ہے اور واپس گھڑی پر لوٹ آتا ہے۔ ایک مشاہد کے لیے جو Σ' میں ساکن ہے پلس کے بھیجنے اور واپس آنے کے بیچ کا وقتی وقفہ ہے۔

$$\Delta t' = \frac{2z_0}{c}. \qquad (16\text{-}2)$$



[شکل 16-2. گھڑیوں کی شرح کا موازنہ]

وہ مشاہد جو Σ میں ساکن ہیں انھیں دو واقعوں کے درمیان کا وقتی وقفہ Δt دو گھڑیوں کی مدد سے ناپ سکتے ہیں جو x کی سمت میں فاصلہ $v\Delta t$ سے ایک دوسرے سے الگ ہیں جو کہ حرکت کی سمت ہے۔ چونکہ c فریم پر منحصر نہیں ہے یہ وقفہ اس عبارت سے ملے گا:

$$c\,\Delta t = 2\sqrt{(z_0)^2 + \left(\frac{v\,\Delta t}{2}\right)^2}, \qquad \Delta t = \frac{2z_0}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (16\text{-}3)$$

چونکہ $z_0 = z_0'$ اس لیے

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (16\text{-}4)$$

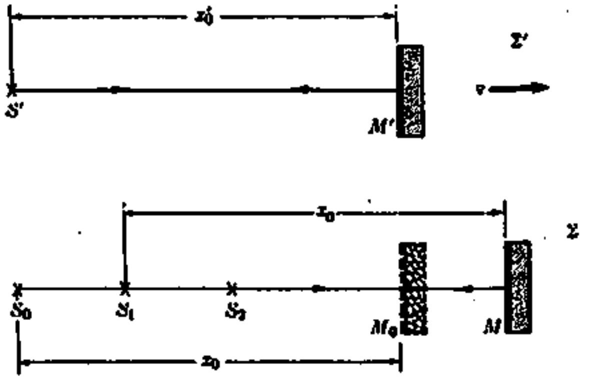
جہاں $\Delta t'$ صحیح وقت وقفہ ہے یعنی واقعوں کے درمیان وقت وقفہ جو Σ' فریم میں ایک ہی جگہ واقع ہوتے ہیں Δt ایک صحیح وقت وقفہ نہیں ہے کیونکہ یہ Σ میں دو مختلف گھڑیوں سے مختلف جگہوں پر ناپا گیا ہے۔ جیسا کہ صحیح لمبائی کی حالت میں جس پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔ ایک صحیح وقت وقفہ گھڑی کی طبیعی فطرت کا ایک مخصوص فنکشن ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک مخصوص تابکاری زوال مستقلہ یا ایک دیے ہوئے صحیح ابعاد کے ایک رولے کا قدرتی تواتر اس فریم میں جہاں یہ وقتی وقفے ایک ہی نقطے پر مشاہدہ کیے گئے ہوں یعنی ایک ایک ایسے فریم میں جس میں یہ "گھڑی" ساکن ہو ایک مستقلہ ہوتا ہے۔ دھیان رکھیے کہ Σ کا مشاہد یہ پائے گا کہ اُس کا وقت وقفہ Δt صحیح وقت وقفہ سے لمبا ہے۔ اس مظہر کو "وقت کشادگی" کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک تیز رفتار میسان کی عمر جو حرکت کے دوران لوٹتا ہو ایک زمینی مشاہد کو زیادہ لمبی معلوم ہوتی ہے، عمر میں یہ اضافہ جو میسان کی رفتار پر منحصر ہوتا ہے، دوسری طرف صحیح فریم میں یعنی اُس فریم میں جس کے لحاظ سے میسان ساکن ہے یہ عمر غیر متغیرہ ہوتی ہے۔

تجربہ III. ایسی لمبائیوں کا موازنہ جو حرکت کی سمت کے متوازی ہوں؛ آیئے ہم ایک ایسی چھڑ پر غور کریں جس کی لمبائی x_0' اس فریم میں ہے جس میں وہ ساکن ہے، یعنی ایک چھڑ جس کی صحیح لمبائی x_0' ہے۔ فریم Σ میں اس کی لمبائی x_0 چھڑ کے سروں کے درمیان کا وہ فاصلہ ہوگا جن کا مشاہدہ "بہ یک وقت" $c.$ کے لحاظ سے ہم وقتی کی تعریف کے معنی میں کیا گیا ہو۔ لمبائی کے موازنہ کو ہم وقتی کی حسابی پیچیدگیوں سے بچانے کے لیے ہم مندرجہ ذیل واقعہ پر غور کریں گے Σ' فریم کی چھڑ کے ایک سرے پر واقع روشنی کا ماخذ S' ایک شیشہ M' کو جو دوسرے سرے پر ہے ایک روشنی کا پلس بھیجتا ہے جہاں

سے منعکس ہو کر وہ واپس مآخذ پر پہنچتا ہے۔ سگنل کے اخراج اور واپسی کے درمیان کا وقت وقفہ $\Delta t'$ ہے۔ دھیان رکھیے کہ $\Delta t'$ ایک صحیح وقت وقفہ ہے کیونکہ اس کا مشاہدہ ایک ہی گھڑی سے ایک ہی نقطہ پر کیا گیا ہے ظاہر ہے کہ

$$\Delta t' = \frac{2x'_0}{c}. \qquad (16\text{–}5)$$

Σ, سے دیکھنے پر یہی واقعات زیادہ پیچیدہ معلوم ہوتے ہیں۔ شکل 16-3, کے حوالے سے مآخذ S' اخراج کے وقت S_0 پر تھا اور شیشہ M_0M پر تھا، منعکس ہونے کے وقت شیشہ M' ہٹ کر M, پر پہنچ گیا ہے اور پلٹ واپس مآخذ S' پر اُس وقت پہنچتا ہے جب وہ S_2, پر ہے اس لیے وقتی وقفہ



[شکل 16-3. حرکت کی سمت کی متوازی لمبائیوں کا موازنہ]

Δt کو نقطوں S_0 اور S_2 کے درمیان دو گھڑیوں کی مدد سے ناپا جاتا ہے جیسا تجربہ II. میں کیا گیا تھا Δt ایک صحیح وقت نہیں ہے اور مساوات (16–4) کا اطلاق ہوگا۔ اب تعریف کے مطابق x_0 سے ہماری مراد فاصلہ $S_0M_0 = S_1M.$ ہے۔ چونکہ M_0 رفتار v سے M پر پہنچا ہے جب کہ روشنی S_0 سے M کو رفتار c, سے گئی ہے اس لیے

$$S_0M = x_0 + \frac{v}{c}S_0M, \qquad S_0M = \frac{x_0}{1-\beta}.$$

اسی طرح چونکہ ماخذ S_1 سے S_2 کو رفتار v سے جاتا ہے جب کہ روشنی M سے S_2 کو رفتار c, سے جاتی ہے،

$$MS_2 = x_0 - \frac{v}{c}MS_2, \qquad MS_2 = \frac{x_0}{1+\beta}.$$

اس لیے

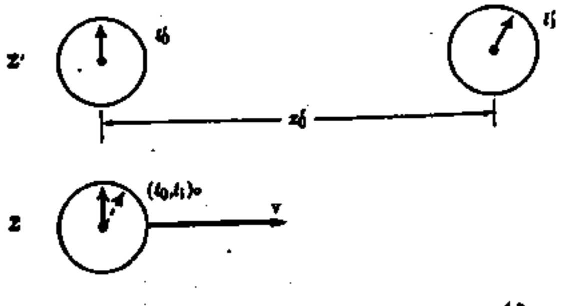
$$\Delta t = \frac{S_0M + MS_2}{c}$$

$$= \frac{2x_0}{c(1-\beta^2)}, \qquad (16\text{-}6)$$

اور مساوات (16-5) اور (16-4) کا استعمال کرکے ہم پاتے ہیں:

$$x_0 = x'_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (16\text{-}7)$$

یہ رشتہ جسے لارنز تخفیف کہتے ہیں x_0 اور x'_0, ہیں غیر متشاکل ہے کیوں کہ یہ Σ' میں ایک صحیح لمبائی x'_0 کی (سکون میں) ناپ میں اور Σ. میں ایک غیر صحیح لمبائی x_0 (سکون میں نہیں) کے درمیان رشتہ رہتا ہے۔ Σ میں لمبائی x_0 کی تعریف روشنی کی رفتار کی مستقلی کو مان کر ہی کی جا سکتی ہے۔ مساوات (16-7) بعینہ سکشن 15-3, کا مفروضہ ہے لیکن یہاں اس کے ساتھ ساتھ وقت کشادگی بھی ہے جو لارنز اور فیٹز جرالڈ کے مفروضہ کے لیے بالکل اجنبی ہے۔



[شکل نمبر 16-4.

تجربہ IV. گھڑیوں کی ہم وقتی

تصوری تجربات II اور III, کی مناسب ترتیب کے ذریعہ ہم اضافیت

کے مفروضات سے مکانی اور زمانی وقفوں کا صحیح سے غیر صحیح فریموں میں تبادل اخذ کر سکتے ہیں۔ یہ سوال کہ دو گھڑیاں جو فریم Σ' میں ہم وقت ہیں لیکن ایک دوسرے سے فاصلہ x'_0 سے الگ ہیں Σ میں مقیم ایک مشاہد کو کیا معلوم پڑیں گی مزید غور طلب ہے۔

جیسا شکل 16-4. میں دکھایا ہے Σ' میں ہم وقت کی ہوئی اور ایک دوسرے سے فاصلہ x'_0 پر مقیم دو گھڑیوں پر غور کیجیے۔ مان لیجیے کہ Σ میں ایک واحد گھڑی ہے جو وہ وقت t_0 اور t_1 بتاتی ہے جب وہ x'_0 کے سروں سے گزرتی ہے۔ اس کی مطابقت کے وقت جو Σ' کی دو گھڑیاں بتاتی ہیں t'_0 اور t'_1 سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ چونکہ $t_1 - t_0$ فریم Σ_1 میں ایک صحیح وقت وقفہ ہے ہم مساوات (16-4) کو الٹ کر لاگو کر سکتے ہیں یعنی:

$$t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \qquad (16\text{-}8)$$

Σ_1 میں مقیم مشاہدین کو Σ' کی دونوں گھڑیوں کے وقت وقفے فرداً فرداً ایک ہی تناسب میں زیادہ بڑے معلوم ہوں گے لیکن ایک ہی مشاہد کے لیے وہ ہم وقت نہیں ہوں گی۔ وہ ہم وقتی میں مقدار δ کی سہو سمجھے گا یعنی

$$t_1 - t_0 = \frac{t'_1 - t'_0 + \delta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \qquad (16\text{-}9)$$

δ دریافت کرنے کے لیے ہمیں صرف یہ دھیان رکھنا ہے کہ دونوں فریموں میں اضافی رفتار وہی ہوگی چونکہ فریم مرادف ہیں اس لیے:

$$t'_1 - t'_0 = x'_0/v,$$
$$t_1 - t_0 = x_0/v. \qquad (16\text{-}10)$$

لیکن x'_0 فریم Σ' میں ایک صحیح لمبائی ہے اس لیے:

$$x_0 = x'_0\sqrt{1 - \beta^2}. \qquad (16\text{-}7)$$

مساوات (16-9)، (16-10) اور (16-7) کو ملانے پر ہم پاتے ہیں:-

$$\delta = -\frac{x_0\beta^2}{v}. \qquad (16\text{–}11)$$

منفی نشان کا مطلب یہ ہے کہ Σ میں ایک مشاہد کے لیے Σ' میں کی دوسری گھڑی پہلی کے مقابلہ میں بعد کا وقت بتاتی ہے۔ گھڑیوں کا برابر فاصلے پر رکھا ہوا ایک پورا سلسلہ جو Σ' میں ہم وقتی ہے Σ میں مقیم ایک مشاہد کو متواتر ایک مقدار سے آگے معلوم ہوگا جب وہ رفتار v سے اُن کے پاس سے گزرے گا۔

ان چار تصوّری تجربات کے ذریعہ ہم نے دکھایا ہے کہ مخصوص اضافیت کے مفروضات چار حرکیاتی رشتے دیتے ہیں:

I. اضافی حرکت کے عمودی مکانی وقفے غیر متغیّر رہتے ہیں۔

II. دو واقعوں کے درمیان کا وقت وقفہ Δt ایک ایسے فریم میں جو ایک فریم کی نسبت سے جس میں مطابقہ وقت وقفہ $\Delta\tau$ صحیح ہے (یعنی دونوں واقعات ایک جگہ ہوتے ہیں)، رفتار $\pm v$ سے حرکت کر رہا ہے اس سے ملتا ہے

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (16\text{–}12)$$

III. ایک چھڑ کی لمبائی Δx جو ایک فریم میں ناپی گئی ہے جو رفتار $v_x = \pm v$ سے ایک فریم کی نسبت سے جس میں چھڑ ساکن ہے حرکت کر رہا ہے اور جس کی صحیح لمبائی ΔL ہے اس سے ملتی ہے:

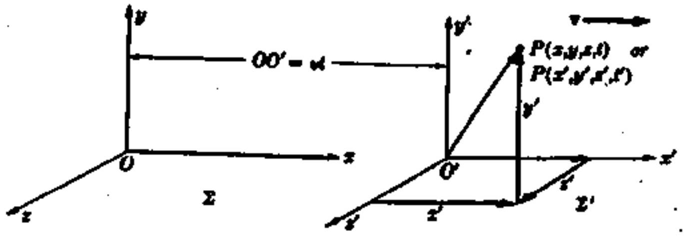
$$\Delta x = \Delta L\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (16\text{–}13)$$

IV. ایک دیے ہوئے فریم میں دو ہم وقتی اور ایک دوسرے سے فاصلہ ΔL پر مقیم گھڑیاں اگر ایسے فریم سے مشاہدہ کی جائیں جو گھڑیوں کے فریم کی نسبت سے رفتار v سے حرکت کر رہا ہے تو وہ ہم وقتی حالت سے بمقدار δ، منحرف معلوم ہوتی ہیں جہاں

$$\delta = -\frac{\Delta L v}{c^2}. \qquad (16\text{–}14)$$

16-3 لارنز استحالہ اس سے پہلے کے سیکشن میں اضافیت کے مفروضات سے اخذ کیے گئے الگ الگ حرکیاتی اثرات کو ملایا جا سکتا ہے جس سے اضافی حرکت والے استمراری فریموں سے مشاہدہ کیے گئے کسی مخصوص واقعہ کے مکانی اور زمانی سمتی قدروں کے درمیان عام رشتے حاصل ہوں گے۔

جیسا کہ شکل 16-5, میں دکھایا گیا ہے P پر جس کی سمتی قدریں Σ' میں x', y', z' ہیں اور جو Σ' فریم کے ساتھ حرکت کر رہا ہے ایک نقطہ واقعہ



[شکل 16-5. Σ اور Σ' کے لیے لارنز تبادلی مساوات کا اخذ]

وقت t پر ہوتا ہے۔ آیئے ہم اسی واقعہ کے فریم Σ سے کیے گئے مشاہدہ پر غور کریں جو Σ' کی نسبت سے حرکت کر رہا ہے، سہولت کے لیے ہم x- محور اور x'- محور کو اضافی حرکت کی سمت میں لے سکتے ہیں اور مبدا 0 اور وقت t' یا t سے مطلب وہ وقت ہے جو بنیادی نقطوں کے انطباق سے گزر چکا ہے جیسا کہ ترتیب سے Σ یا Σ' پر مقیم گھڑیوں سے ناپا گیا ہے ہم v کو مثبت کہیں گے اگر Σ' کا مبدا Σ. میں x- کی مثبت سمت میں حرکت کر رہا ہے۔

کے مشاہدین کے لیے $OO' = vt$، لیکن x' جو Σ' میں ایک صحیح لمبائی ہے لارنز تخفیف کی وجہ سے چھوٹا ہو جاتا ہے۔ اس لیے:

$$x = vt + x'\sqrt{1 - \beta^2} \tag{16-15}$$

یا

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{16-16}$$

پھر Σ کے نقطۂ نظر سے P' اور O' پر مقیم گھڑیاں (جو Σ' میں ہم وقتی ہیں)
بقدر

$$\Delta t' = \frac{x'v}{c^2}. \qquad (16\text{–}17)$$

ہم وقتی سے انحراف کرتی ہیں O اور O' پر کی گھڑیاں وقت $t = t' = 0$ پر ہم وقت تھیں Σ کے مطابق اُس وقت سے Σ' کی گھڑیاں سب چل رہی ہیں یعنی ایسی رفتار سے جسے $1/\sqrt{1-\beta^2}$ سے پھیلانا ہوگا جس سے وہ Σ کی گھڑی کی رفتار کے برابر ہو سکیں۔ اس اثر کو مساوات (16-17) کے اثر کے ساتھ ملانے پر ہمیں

$$t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (16\text{–}18)$$

ملتا ہے۔ مساوات (16-16) کو استعمال کر کے مساوات (16-18) کو یوں لکھا جا سکتا ہے:

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (16\text{–}19)$$

مساوات (16-18) اور (16-19) یہ دکھاتے ہیں کہ v نشان کو چھوڑ کر Σ اور Σ' ہم مساوی ہیں جو اضافیت کے دوسرے مفروضہ کے مطابق ہے، مساوات (16-18) اور (16-16) سے یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (16\text{–}20)$$

جو v کے نشان کو چھوڑ کر مساوات (16-16) سے اتفاق کرتا ہے۔
مساوات (16-16)، (16-20)، (16-18) اور (16-19) سیکشن 16-2 کے اس نتیجہ کے ساتھ مل کر کہ حرکت کے عمودی لمبائیاں غیر متغیر رہتی ہیں وہ عام استحالہ بناتے ہیں جنہیں ہم دریافت کرنا چاہتے تھے شرط یہ ہے کہ نقطۂ مبدا کا چناؤ اور محوروں کی تشریق وہی ہو جو اوپر دیا گیا ہے سہولت کے لیے ان کو جنہیں لارنز استحالہ کہتے ہیں اختصار میں دیا جا رہا ہے:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \qquad (16\text{-}21)$$

الجبرا سے یہ آسانی سے دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر لارنز استحالہ جائز ہیں تو:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \qquad (16\text{-}22)$$

اس کا مطلب ہے کہ اگر O سے $t = 0$، پر ایک روشنی کا سگنل سب سمتوں میں رفتار c سے ترسیل ہو رہا ہے جیسے فریم Σ، میں مشاہدہ کیا جاتا ہے تو O سے $t' = 0$، پر ایک روشنی کا سگنل سب سمتوں میں رفتار c سے ترسیل ہوگا جیسے فریم Σ' میں مشاہدہ کیا جائے گا۔ اس لیے یہ استحالے پہلے مفروضہ کے مطابق ہیں اور اس ظاہری تضاد کو جس کا ذکر اس باب کے شروع میں کیا گیا ہے دور کر دیتے ہیں؛

گیلیلی استحالہ مساوات (15-1)، مساوات (16-22) کو مطمئن نہیں کرتے دو واقعات $(x_1, y_1, z_1; t_1)$ اور $(x_2, y_2, z_2; t_2)$ کے لیے مساوات (15-1) سے ہمیں؛

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$
$$(t_1' - t_2') = (t_1 - t_2),$$

ملتا ہے، جو یہ دکھاتا ہے کہ اضافیت سے پہلے کی طبیعیات میں دو واقعوں کے درمیان مکانی وقفہ اور زمانی وقفہ ایک دوسرے سے آزادانہ غیر متغیر ہیں مخصوص اضافیت میں مشترکہ مکانی و زمانی وقفہ

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

غیر متغیر رہتا ہے۔ دو واقعوں کے درمیان تفرقی وقفہ کے لحاظ سے مقدار

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (16\text{–}23)$$

لارنز استحالہ کے تحت غیر متغیر ہے۔

تفرقی وقفہ ds جس کی تعریف بذریعہ مساوات (16-23) کی گئی ہے مکان و زمان دونوں پر مشتمل ہے لیکن متناسب طور پر نہیں۔ اگر کسی فریم میں؛

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 < c^2\,dt^2, \qquad (16\text{–}24)$$

تو ایک ایسا استمراری فریم مل سکتا ہے جس میں ds کا مکانی حصہ صفر ہے یعنی جس میں دونوں واقعے ایک ہی جگہ ہوتے ہیں۔ اس فریم میں $ds = c\,dt$ محض ایک صحیح وقت وقفہ کا c گنا ہے، جس کی پہلے تعریف کی جا چکی ہے، اگر مکانی و زمانی وقفہ نابرابری (16-24) کو مطمئن کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ وقفہ "مانند وقت" ہے اور ds/c دونوں واقعوں کے درمیان صحیح وقت وقفہ ظاہر کرتا ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی فریم میں

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 > c^2\,dt^2, \qquad (16\text{–}25)$$

تو ایک ایسا فریم مل سکتا ہے جس میں $dt = 0$؛ اس فریم میں دونوں واقعے بہ یک وقت ہوتے ہیں اور ds؛ ان کا باہمی فاصلہ ہے۔ اس لیے اگر ds نابرابری (16-25) کو مطمئن کرتا ہے تو وقفہ "مانند مکان" ہے اور $i\,ds$ بڑھاو کی صحیح لمبائی ظاہر کرتا ہے۔ حقیقی β والا کوئی لارنز استحالہ (16-24) یا (16-25) میں سے کسی نابرابری کو ناجائز نہیں کر سکتا۔ اور کسی وقفہ ds کی مانند وقت یا مانند مکان فطرت ایک غیر متغیرہ ہے۔

الجبرا کے ذریعہ دکھایا جا سکتا ہے کہ دو یکے بعد دیگرے لارنز استحالہ جن کے رفتاری پیرامیٹر β_1 اور β_2 ہیں ایک واحد لارنز استحالہ کے مرادف ہیں جس کا پیرامیٹر

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}. \qquad (16\text{–}26)$$

ہے۔ اس طرح لارنز استحالے ایک ایسا ریاضیاتی "گروہ" بناتے ہیں جن میں "ادل بدل" کی صفات ہیں۔ لارنز استحالہ مساواتوں کو کسی طرح سے حاصل کرنا ممکن ہے محض یہ مانگ استعمال کرنا ہوگی کہ مساوات (16-23) کا وقفہ ds غیر متغیر ہو اور استحالہ خطی ہوں، دوسری شرط اس حقیقت سے نکلتی ہے کہ مکان و زمان میں سب نقطوں کے لیے تبادل کی نوعیت بالکل وہی ہونی چاہیے اگر صرف استمراری فریم زیر غور ہوں۔ ہمیں اضافیت کے اصولوں کی مطابقت میں یہ مانگ بھی رکھنی ہوگی کہ اگر $x = f(x', t', v)$، تو $x' = f(x, t, -v)$۔ اس طرح کے اخذ کی ایک مثال کے طور پر ہم پہلے یہ مان لیتے ہیں کہ:

$$kx = x' - vt', \qquad kx' = x + vt, \tag{16-27}$$

جہاں k کو رفتار کا ایک جفت فنکشن لینا ہوگا۔ معمولی الجبرا سے

$$x'^2 - x^2 = v^2(t'^2 - t^2)/(1 - k^2). \tag{16-28}$$

مساوات (16-28) کو غیر متغیر وقفہ کے مساوات (16-22) کے مطابقت میں لانے کے لیے ہمیں:

$$c^2(1 - k^2) = v^2$$

یا

$$k = \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{16-29}$$

رکھنا ہوگا جس سے لارنز استحالہ مل جاتا ہے۔ ایک زیادہ درست رواجی اخذ جس کی بنیاد ds^2 کے غیر متغیر ہونے پر ہے اگلے سیکشن میں دیا گیا ہے۔

16-4 لارنز استحالہ کی جیامٹریائی تفسیر

لارنز استحالہ x اور t کو مرادف متغیرہ تصور کرتا ہے۔ منکاوسکی نے یہ تجویز پیش کی کہ ct کو محض ایک چوتھی سمتی قدر کی شکل میں داخل کیا جائے۔ آیئے ہم چار ابعادی فضا میں ایک متغیروں کا حسب ذیل سٹ لیں:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct, \tag{16-30}$$

د بجائے زیریں نوشت کے یہاں بالا نوشت کے استعمال کی وجہ بعد کو آنے والے بابوں میں واضح ہو جائے گی) اس لیے مکان و زمان وقفہ اس سے ملتا ہے:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \tag{16-31}$$

اس طرح لارنٹز استحالہ عام معنی میں چار ابعادی مکان میں خطی استحالوں کا وہ سٹ ہے جو ds^2 کو غیر متغیر چھوڑ دیتا ہے۔ وقفہ ds کو زیادہ متناسب طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے۔ گو کہ نتیجہ طبیعیاتی نقطہ سے کم صاف ہوگا اگر ہم

$$X^4 = ix^4, \quad dS = i\,ds. \tag{16-32}$$

رکھیں تو مساوات (16-23) یہ ہو جاتا ہے:

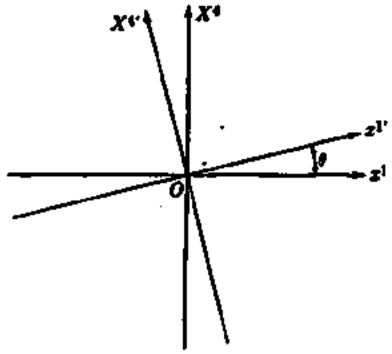
$$dS^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dX^4)^2. \tag{16-33}$$

چونکہ لارنٹز استحالہ میں ہمارا سمتی قدر کا چناؤ dx^2 اور dx^3 کو بلا اثر چھوڑ دیتا ہے اس لیے یہ کافی ہوگا اگر ہم اس دو ابعادی وقفہ

$$dS^2 = (dx^1)^2 + (dX^4)^2. \tag{16-34}$$

کے غیر متغیری پر غور کریں۔ مبدا کی منتقلی کے لیے اور x^1-X^4 مستوا میں سمتی قدر کے محوروں کے پیچ گھماؤ کے لیے بھی غیر متغیر ہے۔ مان لیجیے کہ سمتی قدر کے محوروں کو ایک زاویہ θ, سے گھما دیا جائے جیسا شکل 16-6. میں دکھایا ہے یہ صاف ہے کہ:

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \cos\theta + X^4 \sin\theta, \\ X'^4 &= -x^1 \sin\theta + X^4 \cos\theta. \end{aligned} \tag{16-35}$$



[شکل 16-6. مخلوط سمتی قدری محوروں کا زاویہ θ سے گھماؤ]

$\theta = i\varphi$, رکھ کر اور مساوات (16-30) اور (16-32) کے ذریعہ واپس عام مکان وزمان کے متغیروں میں استحالہ کرنے پر ہم پاتے ہیں:

$$x' = x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi,$$
$$ct' = -x\sinh\varphi + ct\cosh\varphi \qquad (16\text{–}36)$$

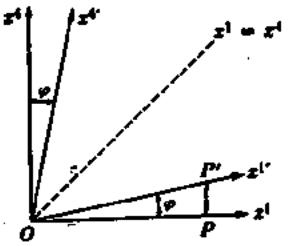
اگر ہم

$$\sinh\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \tanh\varphi = \beta. \quad (16\text{–}37)$$

رکھ دیں تو مساوات (16-36) بعینہٖ وہی ہو جاتے ہیں جو لارنز استحالہ کے مساوات ہیں۔ اس لیے لارنز استحالہ محض چار ابعادی فضا x^1, x^2, x^3, X^4. میں الگ گھماؤ ہے۔ اس لیے کسی "واقعہ" کا ایسے مکان وزمان نظام میں جہاں مکانی اور زمانی سمتی قدر بالکل مرادف ہیں چار سمتی قدروں کے ذریعے آسانی سے تعین کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (16-26) جو دو یکے بعد دیگرے لارنز استحالوں کا β مرادف دیتا ہے محض $\tanh\varphi$: کے لیے جوڑ کے فارمولے کے مطابق ہے۔

$$\tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh\varphi_1 + \tanh\varphi_2}{1 + \tanh\varphi_1 \tanh\varphi_2}. \qquad (16\text{–}38)$$

لارنز استحالہ کا چار ابعادی مکان x, y, z, ict میں ایک گھماؤ کے طور پر اظہار ایک کار آمد تصور ہے لیکن طبیعیاتی نقطۂ نگاہ سے یہ مصنوعی ہے آیئے ہم $x, y, z,$ ct کی حقیقی چہار ابعادی مکان میں لارنز استحالہ کے جیامٹریائی اظہار کی تفتیش کریں۔ ہم صرف $x = x^1$ اور $ct = x^4$ کو 8 پلاٹ کریں گے جس سے ایک مستوا میں اظہار ہو سکے۔ کسی واقعہ کے راستے کو جسے اس طرح مکان و زمان کے فنکشن کی شکل میں پلاٹ کیا گیا ہو ایک عالمی لکیر کہتے ہیں اور خود شکل کو منکاوسکی شکل کہتے ہیں۔ خلا میں ایک روشنی کی شعاع کی عالمی لکیر خط $x^1 = x^4$ ہے جو شکل 16-7 میں پہلے کے محوروں میں سے ہر ایک سے $45°$ پر ہے، یہ محور ایک لارنز استحالہ کے تحت مساواتوں (16-36) کے ذریعہ x'^1 اور x'^4 میں تبدیل ہو جائیں گی لیکن روشنی کی عالمی لکیر نہیں بدلتی۔ شکل 16-7 سے ظاہر ہوتا ہے کہ ہم وقتی ایک اضافتی تصور ہے۔ سب واقعے جن کا مقام x'^1 محور پر ہے Σ' میں ہم وقت ہیں لیکن Σ میں نہیں۔ اس طرح واقعہ P' ایک Σ' میں سکونی مشاہد کے لیے واقعہ O کے ساتھ ہم وقت ہے لیکن ایک مشاہد کے لیے جو Σ میں ساکن ہے بعد کو وقت $t = x^4/c = PP'/c,$ پر واقع ہوتا ہے؛



[شکل 16-7۔ منکاوسکی شکل میں لارنز تحویل شدہ محور جس میں PP' ہم وقتی کی اضافیت دکھاتا ہے]

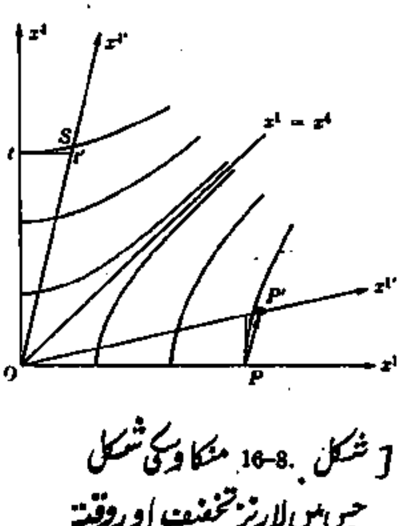
منکاوسکی شکل سے عام نتائج نکالنے میں بہت احتیاط کی ضرورت ہے۔ وقفوں کو سمتی قدری وقفوں کے مربع کے جوڑے نہیں ناپا جا سکتا۔ یہ 16-6، میں دی گئی شکل کے خلاف ہے جہاں ہم نے مصنوعی طور پر خیالی استحالہ مساوات

(16-32) کے ذریعہ ایک "اقلیدسی" جیامیٹری پیدا کر دی تھی اس حقیقی مکان میں فاصلہ ناپنے کے لیے اس کی جگہ پہ دوسرا طریقہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم دھیان رکھیں کہ حسبِ ذیل ہائپر بولوں کا خاندان

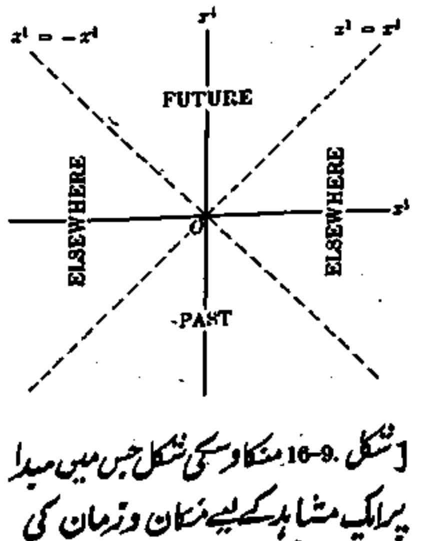
$$(x^1)^2 - (x^4)^2 = (x'^1)^2 - (x'^4)^2 = \text{constant} \qquad (16\text{–}39)$$

ایک ایسا کارآمد جال بچھا دیتا ہے جس سے مختلف مشتمل مقداروں کا موازنہ کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ایک جال شکل .16-8 میں دکھایا گیا ہے۔

آیئے اب ہم یہ دیکھیں کہ اس شکل سے اضافیتی حرکیات کے مختلف منظروں کی تفسیر کس طرح ہوتی ہے۔ لارنز تخفیف کا مساوات (16-7) Σ' میں ایک صحیح لمبائی x'^1، کا تبادل Σ فریم میں دیتا ہے۔ ایک چھڑ OP' پر غور کیجیے جو Σ' میں ساکن ہے۔ سرے کے نقطہ P' کی عالمی لکیر (α'). x'^4 محور کے متوازی حرکت کر رہی ہے کیونکہ یہ Σ' میں ساکن (صحیح) ہے۔ اسی طرح سے نقطہ O x'^4 محور کی سمت میں حرکت کر رہا ہے Σ میں چھڑ کی پیمائش اُس وقت کی جاتی



[شکل .16-8 منکاوسکی شکل جس میں لارنز تخفیف اور وقت کشادگی دکھایا گیا ہے]



[شکل .16-9 منکاوسکی شکل جس میں مبدا پر ایک مشاہد کے لیے مکان و زمان کی تقسیم روشنی کے مخروط کے ذریعہ ماضی مستقبل اور دیگر مقام کے لیے دکھایا گیا ہے]

ہے جب مبدا منطبق ہوتے ہیں اور جب سرے کے نقطے Σ میں ہم وقتی ہوتے ہیں یعنی x^1 محور کی سمت میں ہیں۔ اس لیے Σ میں چھڑ کی لمبائی OP کی لمبائی ہے۔ OP اور OP' کا موازنہ کرنے کے لیے ہمیں احتیاط رکھنی چاہیے کہ پیمائش ہائپر بولن کی حالی کے لحاظ سے کریں۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ ہائپر بولا

$$(x^1)^2 - (x^4)^2 = OP^2 = (x'^1)^2 - (x'^4)^2$$

Ox'^1 کو O اور P' کے درمیان پار کرتا ہے، اور اس لیے $OP < OP'$ جو ایک متحرک فریم سے مشاہدہ کی گئی صحیح لمبائیوں کے لارنز تخفیف کی مطابقت میں ہے۔

وقت کشادگی پر غور کے لیے آئیے ہم Σ' میں ایک اکیلی ساکن گھڑی — $x' = t' = x = t = 0$ پر لیں۔ جیسے جیسے وقت گزرتا ہے $t' = t = 0$ کے اضافت کے وقت وقفہ کو ایک عالمی لکیر سے جو x'^4 شاخ کی سمت میں حرکت کر رہی ہے ظاہر کیا جائے گا اور جو Σ میں محض Ot' ہے Σ میں O اور t' ایک ہی مکانی نقطہ پر نہیں ہیں اور وہ نقطہ جسے t کے ساتھ ہم وقتی خیال کیا جاتا ہے t، یہ موگاز وہاں tt' شاخ x^1 کے متوازی ہے۔ لیکن "ہائپر بولی ناپ" میں $OS = Ot$ اور $Ot > Ot'$. اس لیے ایک مشاہد جو Σ میں ساکن ہے Σ' میں ناپے گئے صحیح وقت وقفہ سے زیادہ لمبے گزرے ہوئے وقت کا مشاہدہ کرے گا جو مساوات (16-4). کی وقت کشادگی سے مطابقت میں ہے۔

وقت کشادگی اور لارنز تخفیف کا بظاہر غیر تشاکل کے باوجود منکاوسکی خشکل Σ اور Σ' فریموں کے درمیان تشاکل کو دکھاتی ہے۔ ہماری مثالوں میں مکانی وقفوں اور زمانی وقتوں دونوں کے لیے Σ' کو صحیح فریم لیا گیا تھا۔ اگر ہم نے صحیح فریم کے طور پر Σ کو چنا ہوتا تو Ot, PP' کے متوازی ہوتا اور OP', tt' کے متوازی ہوتا جس سے تخفیف اور کشادگی کے رشتے اُلٹے ہو جاتے۔

$\beta > 1$ کے ساتھ ایک لارنز استحالہ مخلوط ہوتا ہے اور اس لیے طبیعیاتی لحاظ سے غیر ممکن ہوتا ہے۔ (ہم اس بیان کی اہمیت کا ایک بار پھر بعد کو جائزہ لیں گے)۔ منکاوسکی شکل پر اس کا مطلب یہ ہے کہ دونوں میں سے کوئی بھی

نشان لگا محور خط $x^1 = -x^4$ کے آگے نہیں جا سکتا جو چہار ابعادی فضا میں ایک مخروط ہے جسے روشنی کا مخروط کہتے ہیں۔ اس لیے ایک مانند وقت وقفہ جس کے لیے $ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 > 0$ ہے کسی فریم میں مانند فضا نہیں بن سکتا لیکن اگر اُسے صحیح فریم کے لحاظ سے لیا جائے تو وہ خالص وقتی بن سکتا ہے۔ اسی سبب سے ایک مانند مکان وقفہ $ds^2 < 0$ کسی فریم میں مانند۔ وقت نہیں بن سکتا لیکن اگر صحیح فریم کے لحاظ سے لیا جائے تو خالص مکانی بن سکتا ہے۔

اس طرح سے روشنی کا مخروط $x^1 = \pm x^4$ منکاوسکی فضا کو جیسا شکل 16-8. میں دکھایا گیا ہے خطّوں میں بانٹ دیتا ہے جو بنیادی نقطہ پہ ایک مشاہد کے لیے یعنی دیے ہوئے وقت اور جگہ کے لیے غیر متغیری اہمیت رکھتے ہیں وہ وقتی خطّہ جس پر "ماضی" کا لیبل ہے ایسے واقعات ظاہر کرتا ہے جن کا مبدا کے لحاظ سے وقت وقفہ کسی استمراری فریم کے منفی ہے۔ اسی طرح مثبت وقتی وقفے اُس خطّہ میں محدود ہیں جن کا لیبل "مستقبل" ہے جا ہے O. پر مقیم مشاہد کا فریم کوئی بھی ہو۔ اس خطّہ کے واقعات جسے "دیگر مقام" کہا ہے مشاہد سے فضائی طور پر الگ ہیں لیکن فضائی گھماؤ اور انتقال کے ذریعہ ان کا ایک دوسرے میں استحالہ کیا جا سکتا ہے۔

16-5 رفتار کے لیے استحالہ مساوات

لارنز تبادل کے مساواتوں کے x اور t کے لحاظ سے تفرقی اخذ لینے سے کسی متحرک نقطہ کی رفتار کے لیے استحالہ مساوات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ ہم فریم Σ' کی فریم Σ, کی نسبت سے رفتار کو جس کی قیمت Σ, میں حاصل کی گئی ہے، ظاہر کرنے کے لیے نشانات v اور $\beta = v/c$ کا استعمال جاری رکھیں گے اور $u_x = dx/dt$, $u_x' = dx'/dt'$ وغیرہ کو ایک دیے ہوئے فریم میں رفتار ظاہر کرنے کے لیے داخل کریں گے Σ سے Σ' کے لیے لارنز استحالے یہ پائے گئے ہیں:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{16–40}$$

مساواتوں (16-40) کا t کے لحاظ سے تفرق کرنے پر ہم پاتے ہیں :

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dt}{dt'}, \tag{16–41}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dt'}. \tag{16–42}$$

اور

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \beta u_x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{16–43}$$

مساوات (16-43) کے ذریعہ ہم مساوات (16-41) اور (16-42) کو غیر نشان والے متغیروں کے لحاظ سے لکھ سکتے ہیں :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \tag{16–44}$$

$$u'_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v/c^2} u_y, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v/c^2} u_z \tag{16–45}$$

" طولی رفتار کے جوڑ کا فارمولہ" مساوات (16-44) بجے بعد دیگرے لارنز تبادل کے مساوات (16-28) سے اتفاق کرتا ہے کیونکہ کسی دوسرے لارنز فریم کے مبدا کی حرکت کو Σ' فریم کی نسبت سے ظاہر کر سکتا ہے -

مساوات (16-43) کے جو وقت وقفوں dt اور dt' میں رشتہ بتاتا ہے کچھ دلچسپ نتائج ہیں اگر u_x کے مناسب چناؤ سے یہ ممکن ہو سکے کہ $(dt'/dt) < 0$ ہو جائے تو زیر غور دونوں فریموں میں دونوں واقعوں کی وقتی ترتیب ایک دوسرے سے الٹی ہو گی یہ ایک منطقی تضاد ہو گا اگر

(a) دونوں واقعے سبب اور اثر ظاہر کرتے ہیں اور (b) وقت کی سمت کی اہمیت ایک متغیری اہمیت ہے۔ اس باب کے شروع میں ہم نے (b), کو مان لیا ہے اس لیے ہم یہ نتیجہ نکالنے کے لیے مجبور رہیں کہ سبب اور اثر کے تسلسل کو سب فریموں میں قائم رکھنے کے لیے کسی مخصوص فریم میں

$$u \leq c, \tag{16-46}$$

جہاں کسی ایسے واقعہ کی ترسیلی رفتار ظاہر کرتا ہے جو سبب کو اثر سے جوڑ سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ فیز رفتاریں یا صرف جیامٹریائی اہمیت کی رفتاریں اس پابندی کے زیر اثر نہیں آتیں۔ یہ پابندی بے شک ممکن استمراری فریموں کی اضافی رفتار پر عائد ہوتی ہے اس لیے اس پر غور کرنا ضروری نہیں ہے کہ اس حالت میں جب $\sqrt{1-\beta^2}$ مخلوط ہو تو لارنز استحالہ سے حرکیات پر کیا اثر ہوگا۔

رفتار استحالہ کے مساواتوں کو بہت آسانی سے ایک متحرک وسیلے میں روشنی کی رفتار پر اور ستاروں کے فتور پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

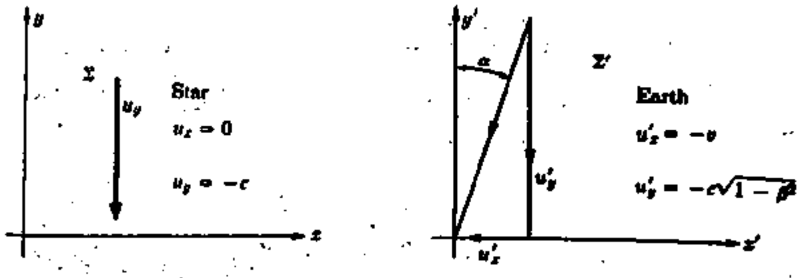
مان لیجیے کہ ایک متجانس اور سمتی یکساں وسیلہ جس کا انعطافی انڈیکس n ہے رفتار v سے x محور کی مثبت سمت میں ایک مشاہد کی نسبت سے جو Σ. میں ساکن ہے حرکت کر رہا ہے، اس فریم کے لحاظ سے جس میں وسیلہ ساکن ہے روشنی کی رفتار $u' = c/n$ ہے Σ, میں مقیم ایک ساکن مشاہد کے لحاظ سے رفتار v, ہے جہاں u, مساوات (16-44) سے v کا نشان الٹ دینے پر حاصل ہوتا ہے؛

$$u = \frac{c/n + v}{1 + v/nc} \simeq \frac{c}{n} + v(1 - 1/n^2) \tag{16-47}$$

جو v/c. میں پہلے درجہ تک صحیح ہے۔ یہ تجرباتی حقائق سے اور سیکشن 11-4. میں اخذ کیے گئے کلاسکی برقی حرکیات کے نتیجہ سے اتفاق کرتا ہے۔ لیکن اس مساوات کے کلاسکی اخذ میں ایک نسبتاً پیچیدہ میکنزم شامل تھا یہ اثر سیال کے اندر متحرک ثانوی اشعاع کار کے سبب سے اشعاع خارج

کرنے کی وجہ سے سمجھا گیا۔ یہاں مساوات (16-47) میکنزم کی بابت بلا کسی تشریحی جانکاری کے اخذ کیا گیا ہے۔ ہمیں ایسے حالات سے اکثر دوچار ہونا پڑے گا جہاں آخری نتیجہ کی مانگ اضافیاتی وجوہات پر مبنی ہوگی لیکن جہاں اُس نتیجہ کو حاصل کرنے کا طبیعیاتی میکنزم ظاہر نہیں ہوگا۔

رفتار استحالہ کے مساواتوں سے دور کے ستاروں کا فتور بھی آسانی سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ مان لیجیے کہ ستارہ کی روشنی کی ایک شعاع زمین کی طرف زمین کی رفتار کے عمودی سمت میں آرہی ہے جیسا شکل 16-10 میں دکھایا گیا ہے۔ ستارہ کے فریم میں یہ عمل محض روشنی کا اخراج ہے جس کی رفتار کے اجزا $u_x = 0$, $u_y = -c$ ہیں۔ زمین کے فریم میں مساوات (16-44) اور (16-45) سے دیے ہوئے رفتار کے اضلال یہ ہیں:



[شکل 16-10. ستارہ کی روشنی کے فتور کی]

$$u'_y = -c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad u'_x = -v.$$

اس لیے نارمل کے ساتھ بنا وقوع زاویہ مندرجہ ذیل ہوگا۔

$$\tan\theta' = \frac{u'_x}{u'_y} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\sin\theta' = \beta. \qquad (16\text{-}48)$$

ہم نے باب 15 میں دیکھا ہے کہ اخراج میکانکی تصویر یا قائم ایتھر مفروضہ سے $\theta' = \beta$, ملتا ہے، جو عمل میں مساوات (16-48) سے ناقابلِ امتیاز ہے۔

مجوزہ حوالے

مخصوص اضافیت اور لارنٹز استحالہ کے تصوّرات کے لیے بہت سے عمدہ دیباچے ہیں۔ نیچے دی ہوئی فہرست میں ایسی تصانیف شامل ہیں جن سے اس کتاب کے مصنّف سب سے زیادہ آشنا ہیں اور امکان یہ ہے کہ یہی سب سے زیادہ آسانی سے دستیاب ہوسکیں گی۔ خاص طور سے صفحات 266–282.

R. BECKER, *Theorie der Elektrizitat*, Band II,

منکاوسکی جیامٹری خاص طور سے عمدہ ڈھنگ سے پیش کی گئی ہے:

P. G. BERGMANN, *An Introduction to the Theory of Relativity.*

باب IV میں لارنٹز استحالہ کو بہت صاف طور سے سمجھایا گیا ہے:

V. FOCK, *The Theory of Space, Time and Gravitation.*

پہلا باب اضافیتی نظریہ کی بڑھیا واضح تشریحی تمہید ہے

R. C. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology,* صفحہ 34 تک یا اگر دستیاب ہوسکے تو *The Theory of the Relativity of Motion,*

جو اس مضمون کی عمدہ تمہید مہیا کرتا ہے۔

A. EINSTEIN AND H. MINKOWSKI in *The Principle of Relativity.* اصلی کاغذات کا بڑا احتیاط ترجمہ

A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity.* یہ درسی کتاب نہیں ہے اور نہ ایسی جسے جلدی میں پڑھا جائے اس کا غور سے مطالعہ کارآمد ہوگا۔

C. MØLLER, *The Theory of Relativity*, Chapters I and II. یہ ایک حال کی کتاب ہے جس کا حوالہ ہم آنے والے بابوں میں دیں گے۔

دوسری بہت سی زیادہ عام درسی کتابوں میں سے جن میں مخصوص اضافیت کی صاف اور قابلِ تمہیدیں ہیں ہم اُن کا ذکر کریں گے۔

G. JOOS, *Theoretical Physics*, Chapter X.

R. B. LINDSAY AND H. MARGENAU, *Foundations of Physics*, Chapter 7.

مشق

1. کیا z - محور کی سمت میں اضافی حرکت کا انتخاب اور مبدا کا $t = t' = 0$ پر انطباق مساوات (21-16) میں دیے ہوئے لارنز استحالہ پر کوئی واقعی روک لگاتا ہے ؟ کسی من مانی سمت میں اضافی حرکت کے لیے اور سمتی قدری فریم میں مبدا کے من مانے جوڑ کے لیے لارنز استحالہ کرنے میں آپ تفصیل میں کس طرح چلیں گے ؟ -

2. شکل 8-16, کی منکاؤسکی شکل کے حوالے سے Σ میں ایک صحیح لمبائی اور ایک صحیح وقت کی جسے نشان لگے نظام Σ' سے مشاہدہ کیا جاتا ہے، تفسیر کیجیے -

3. دکھائیے کہ a^2 کا ایک صحیح فریم سے ایک عام فریم میں استحالہ یہ ہے :-

$$a^2 \to [a^2 - (a \times \beta)^2]\gamma^6,$$

جہاں $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}.$

باب 17

ہم تغیّر اور اضافیتی میکانیات

باب 16 میں ہم نے اس کی تحقیق کی کہ مخصوص اضافیت کے اصولوں کا حرکیات کے قوانین پر کیا اثر۔ اگر اصول جائز ہیں تو ان کا اطلاق طبیعیات کے سب شعبوں پر ہونا چاہیے، کسی ہم کے کسی تجربہ کے ذریعہ ایک ترجیحی استمراری فریم کو دریافت کرنا ممکن نہیں ہونا چاہیے۔ اضافیت کے اصولوں کے اثر کو دوسرے دوسرے میدانوں میں داخل کرنے کے لیے ہم مناسب خیالاتی تجربات Gedanken Experimente, کو مرتب کر سکتے ہیں جیسا ہم نے حرکیات میں کیا یا ہم لارنز استحالہ کو متعلقہ قبل۔ اضافیت مساواتوں کے زمانی و مکانی سمتی قدروں پر عائد کر کے اور پھر باقی مقداروں کے لیے استحالہ رشتے اخذ کر کے طبیعیاتی مقداروں کے لیے استحالی رشتے حاصل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ یہ دونوں ہی راستے کارآمد ہیں۔ خیالی تجربہ کا طریقہ طبیعیاتی تصوروں کے نزدیک ترین رہتا ہے اور ہم اس کا استعمال تصادموں کی بحث میں کریں گے سیدھے تبادل کا عمل اکثر محنت طلب ہوتا ہے گو کہ آئنسٹائن نے اپنے اصلی کام میں برق مقناطیسی میدانوں کے استحالی مساواتوں کو اخذ کرنے کے لیے اور یہ دکھانے کے لیے کہ میکسویل کے مساوات اضافیتی اصولوں سے اتفاق کرتے ہیں اسی طریقے کا استعمال کیا تھا۔

ایک تیسرا طریقہ ہے جو اضافیت کی توسیع کے لیے ان سب سے کہیں زیادہ طاقتور اور موثر ہے۔ وہ راستہ یہ ہے کہ مساواتوں کو پھر سے ایسی

شکل میں لکھا جائے جو صریحی طور پر ظاہر کر دے کہ ایک مختلف استمراری فریم میں استحالہ کے تحت مقداروں کا رویہ کیا ہوگا۔ اگر کسی مساوات کی شکل ایسی ہے جو کہ استمراری فریم کی تبدیلی کے لیے غیر متغیر ہے تو ظاہر ہے کہ اس مساوات پر مبنی کوئی تجربہ ایسا نتیجہ نہیں دے سکتا جو اس مخصوص حوالہ کے فریم پر منحصر ہو۔ تب یہ مساوات ایسے مظہر کا بیان کریں گے جو مخصوص اضافیت کے اصولوں سے اتفاق کرے گا۔ کوئی مساوات جو اس طرح لکھا جاتا ہے کہ اس کی شکل استمراری فریم کے چناؤ پر منحصر نہ ہو لارنز ہم تغیر کہلاتا ہے۔

ہم اس طریقہ کی تفتیش اس حد تک کریں گے کہ ہم میکانیات اور برقی حرکیات کے بنیادی اضافیتی رشتوں کو اخذ کر سکیں۔

17-1 چار-ویکٹر کا لارنز استحالہ

لارنز استحالہ کو ایک چار ابعادی فضا میں مبدا سے نقطہ $(x^1, x^2, x^3, x^4 = ct)$, تک کے وقفہ کے اجزا کے ایک خطی تبادل کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ تکراری مدوں کے لیے جوڑ کے رواج کا استعمال کرتے ہوئے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$x'^i = Q^i_j x^j, \qquad (17\text{-}1)$$

جہاں Q^i_j اس میٹرکس سے ملتا ہے:

$$Q^i_j = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \qquad (17\text{-}2)$$

یہاں حسب معمول $\beta = v/c$ اور لکھنے میں سہولت کے لیے

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (17\text{-}3)$$

ہم نے پہلے ہی یہ دیکھا ہے کہ اگر ویکٹر x^i کے اجزا کی تحویل مساوات (17-1) کے مطابق ہوتی ہے تو x^i پر مشتمل کوئی تجربہ ایک ترجیحی فریم نہیں دے سکتا۔ اس لیے اگر کوئی طبیعیاتی رشتہ چار ابعاد میں ایک ویکٹر مساوات کی شکل میں لکھا جاتا ہے جس میں ویکٹر کے اجزا کی مساوات (17-1) کے مطابق تحویل ہوتی ہے تو اس طرح کے مساوات کو لارنز ہم متغیر شکل میں لکھا ہوا کہا جاتا ہے۔

اگر ہم مساوات (17-1) کو x^i کے لیے حل کریں تو ہم پاتے ہیں کہ

$$x^j = (Q^i_j)^{-1}x'^i, \tag{17-4}$$

جہاں

$$(Q^i_j)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & +\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{17-5}$$

مساوات (17-2) کا مقلوب میٹرکس ہے یعنی اُس تحویل کا میٹرکس جو مخالف رفتار سے فریموں کی اضافی حرکت سے مطابقت رکھتا ہے۔ اگر کوئی مقدار جس کے چار اجزا A_j ہیں x^i کے الٹے استحالہ کی شکل میں تحویل ہوتی ہے یعنی؛

$$A'_i = (Q^i_j)^{-1}A_j, \tag{17-6}$$

کی طرح تو ایک ایسا رشتہ جس میں A_j قسم کے اجزا مساوات کی شکل میں ہوں۔ لارنز ہم متغیری ہوتا ہے۔ ان دو حالتوں کو پھر سے اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے، کوئی مقداریں A_j یا B^j لارنز ہم متغیری ہیں اگر استمراری فریم کے بدلنے کے تحت ان کا استحالہ ترتیب سے مساوات (17-6) کی طرح یا

$$B'^i = Q^i_j B^j, \tag{17-7}$$

کی طرح ہوتا ہے۔ A_j کو ایک متغیری چہار ویکٹر اور B^j کو ایک مخالف متغیری چہار ویکٹر کہا جاتا ہے (بدقسمتی سے لفظ "ہم متغیر"

دو مختلف طریقوں سے استعمال کیا گیا ہے لیکن یہ استعمال ایک مقبول رواج کا معاملہ ہے ، میٹرکس کی زبان میں Q^i_j کا رشتہ مقلوب استحالہ سے اس مساوات کے ذریعہ ہے :

$$(Q^k_j)^{-1} Q^j_i = \delta^i_k, \qquad (17\text{-}8)$$

جہاں

$$\delta^i_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}9)$$

ایک میٹرکس ہے مماثلہ ظاہر کرتا ہے ۔ ہمیں یہاں نہ تو خود عام ٹینسر تجزیہ سے مطلب ہے اور نہ سمتی قدروں کے عام استحالہ سے، مخصوص اضافیت کے لارنتز استحالہ میں استحالہ ضربیہ Q^i_j مستقلے ہیں اور اس لیے سمتی قدروں سے آزاد ہیں ۔ زیادہ تر حوالوں میں مستقل ضربیوں والے استحالہ کو سمتی قدروں کے عام استحالہ کی ایک خصوصی حالت کے طور پر اخذ کیا جاتا ہے جس میں خود ضربیے سمتی قدروں کے فنکشن ہوتے ہیں ۔ عام استحالہ میں مساوات (17-1) کے ہم پلہ مساوات میں ایک تفرقی سمتی قدری قطعہ dx^i کا استحالہ اس طرح ہوتا ہے :

$$dx'^i = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) dx^j. \qquad (17\text{-}10)$$

ہم متغیر اور مخالف متغیر ویکٹر اجزا کا استحالہ بالترتیب اس طرح ہوتا ہے :

$$A'_i = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right) A_j, \qquad B'^i = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) B^j, \qquad (17\text{-}11)$$

اضافیت کے عام نظریے میں مساوات (17-10) اور (17-11) کا استعمال ضروری ہے کیونکہ استحالہ کے ضربیے سمتی قدروں کے فنکشن ہو سکتے ہیں ۔ اس حالت میں ہم متغیر اور مخالف متغیر مقداروں کے درمیان فرق کی مزید اہمیت ہو جاتی ہے ۔ مساوات (17-5) سے یہ ظاہر ہے کہ مخصوص اضافیت میں ہم متغیر

ویکٹر A_i کا استحالہ محض $ct, -z, -y, -x$ کی طرح ہوتا ہے لیکن اس حالت میں بھی جب کہ استحالہ ضریبے مستقلے ہوں عام ٹینسر تجزیہ کا طریقہ حساب بے حد کارآمد ہے اور ہم مستند تشکیلوں کا استعمال کریں گے۔

17-2 مخصوص اضافیت میں کارآمد کچھ ٹینسر رشتے

اپنے مطلب کے لیے ہم ٹینسروں کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ یہ وہ مقداریں ہیں جو خود اپنی واضح تحویلی صفات قائم رکھتی ہیں جب کہ سمتی قدروں کا لارنز استحالہ عمل میں آتا ہے۔ سب سے آسان ایک متغیرّ یا اسکیلر ہے جس کا تعین صرف ایک عدد سے کیا جا سکتا ہے مثلاً ہم نے دیکھا ہے کہ $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ ایک ایسا ہی غیر متغیرّ ہے۔ اس طرح کی کسی مقدار کو ایک صفر درجے کا ٹینسر کہتے ہیں سیکشن 17-1 کے مخالف متغیرّ اور ہم متغیر چہار ویکٹر درجہ ایک کے ٹینسر ہیں۔ درجہ دو کا ایک مخالف متغیر ٹینسر ایک سولہ مقداروں کا مجموعہ ہے جس کا استحالہ اس طرح ہوتا ہے:

$$T'^{kl} = Q^k_i Q^l_j T^{ij}, \tag{17-12}$$

یعنی دو مخالف متغیر ویکٹروں کا ضرب۔ اسی طرح درجہ دو کا ایک ہم متغیر ٹینسر ایک سولہ اجزا کا سٹ ہے جس کا استحالہ اس طرح ہوتا ہے:

$$T'_{kl} = (Q^k_i)^{-1}(Q^l_j)^{-1} T_{ij}, \tag{17-13}$$

یعنی دو ہم متغیر ویکٹروں کے ضرب کی طرح ایک درجہ دو کا ملا جلا ٹینسر ایک مخالف متغیر اور ایک ہم متغیرّ ویکٹر کے ضرب کی طرح تحویل پذیر ہوتا ہے۔

$$T'^l_k = Q^l_j (Q^k_i)^{-1} T^j_i. \tag{17-14}$$

اس طرح صاف ہو جاتی ہے $T^{l_1 l_2 \cdots l_n}_{k_1 k_2 k_3 \cdots k_m}$ قسم کی کوئی مقدار جو اس طرح تحویل پذیر ہوتی ہے۔

$$T'^{l_1 l_2 \cdots l_m}_{k_1 k_2 k_3 \cdots k_m} = Q^{l_1}_{i_1} Q^{l_2}_{i_2} \cdots Q^{l_n}_{i_n} (Q^{k_1}_{j_1})^{-1} (Q^{k_2}_{j_2})^{-1} \cdots (Q^{k_m}_{j_m})^{-1} \, T^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_m} \tag{17-15}$$

یعنی محض ہم متغیری اور مخالف متغیری چار ویکٹر اجزا کے ضربوں کی طرح تحویل پذیر ہوتی ہے۔ رتبہ $(m + n)$ کا ٹینسر کہلاتی ہے، ہمارے طبیعیاتی اطلاقوں میں درجہ دو سے اونچے ٹینسروں کا شاذونادر ہی کام پڑے گا۔

چونکہ زیر غور استحالے خطی ہیں اس لیے برابر درجہ کے دو ٹینسروں کا جوڑ یا فرق اسی درجہ کا ایک ٹینسر ہوگا اور مساوات صرف ایک ہی قسم کے مقداروں کے درمیان بنائے جا سکتے ہیں۔ اس طرح کے ٹینسر مساوات لازماً ہم متغیر ہوں گے طبیعیات کے دوسرے قوانین کو ٹینسر مساواتوں کی شکل میں پھر سے لکھ کر اضافیت کے اصولوں کو وسیع کرنے کے لیے ہمیں ٹینسروں کے طریقۂ استعمال کے کچھ رواجی قاعدوں کی ضرورت پڑے گی۔

1. جب ایک ملے جلے ٹینسر میں ایک مخالف متغیری مدو ہی ہے جو ایک ہم متغیری مد ہے تو اس وجہ سے کیا گیا جوڑ ٹینسر کے درجے میں دو کی کمی کر دیتا ہے، اس عمل کو تخفیف کہتے ہیں۔ ایک ٹینسر T^i_j کی تخفیف یعنی T^i_i ایک غیر متغیرہ ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اگر ہم ویکٹر گریڈینٹ (درجہ دو کا ٹینسر) کی تخفیف کریں تو ہمیں ڈائیورجنس (درجہ صفر کا ٹینسر) ملتا ہے۔

2. ہم نے دیکھا ہے کہ مخصوص اضافیت میں "خطی قطعہ" $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$, ایک اسکیلر غیر متغیرہ ہے ds^2 کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$ds^2 = g_{ij} \, dx^i \, dx^j, \tag{17-16}$$

جہاں

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \tag{17-17}$$

کو خطی قطعہ کا "میٹرک ٹینسر" کہتے ہیں۔ (عام ٹینسر تجزیہ میں g_{ij} سمتی قدروں کا فنکشن ہوتا ہے۔ مساوات (17-5) کا استعمال کر کے یہ آسانی

سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ g_{ij} واقعی ایک ٹینسر ہے۔

3۔ g_{ij} رشتہ:

$$B_i = g_{ij}B^j \tag{17-18}$$

کے ذریعہ ہم متغیر اجزا کے ایک سٹ کا ہر فرد ایک مخالف متغیر ٹینسر جز کے ساتھ منسلک کر سکتے ہیں۔ مساوات (17-17) سے دی ہوئی g_{ij} کی مخصوص شکل کے لیے یہ عمل محض پہلے تین اجزا کے نشانوں کو اُلٹ دے گا۔ بنیادی مخالف متغیر وقفہ dx_i کے مطابقت کے ہم متغیر اجزا ایسے ہیں کہ

$$dx^i\, dx_i = ds^2. \tag{17-19}$$

4۔ مساوات (17-11) کے حوالہ سے $\partial/\partial x^i = (\partial x^j/\partial x'^i)\, \partial/\partial x^j$ لکھنے پر یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ کسی ٹینسر پر کام کرنے والا تفرقی اخذ ایک زائد ہم متغیر ٹینسر جز کی طرح تحویل کرتا ہے۔ (اگر g_{ij} سمتی قدروں کے فنکشن ہیں تو یہ صحیح نہیں ہوگا) اس لیے گریڈینٹ کا عمل ٹینسر کے درجہ میں ایک (ہم متغیری نشان) کا اضافہ کر دیتا ہے اگر T^0 ایک اسکیلر ہے تو اس کا گریڈینٹ $\partial T^0/\partial x^i$ ایک ہم متغیر ویکٹر ہوگا اور اسکیلر کے اضافے کو تخفیف کے ذریعہ ایک ٹینسر رشتہ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے،

$$dT^0 = \frac{\partial T^0}{\partial x^i}\, dx^i. \tag{17-20}$$

اسی طرح اگر T^i ایک مخالف متغیر ویکٹر ہے تو $\partial T^i/\partial x^j$ ایک دو درجہ کا ملا جلا ٹینسر ہوتا ہے جب کہ T^i، کی چہار- ڈائیورجنس $\partial T^i/\partial x^i$، ایک اسکیلر غیر متغیرہ ہے۔

5۔ اگر ایک چہار- ویکٹر حسب ذیل رشتہ کی پابندی کرتا ہے،

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^i} = 0, \tag{17-21}$$

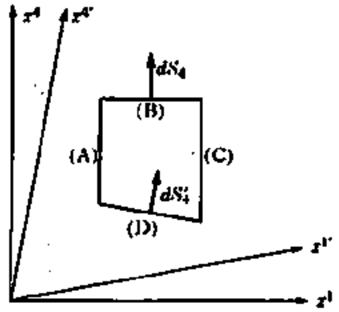
اور اگر T^i کے اجزا صرف ایک محدود مکانی خطہ میں صفر سے مختلف ہیں تو سہ- ابعادی اسپیس کے اوپر انٹیگرل

$$I = \int T^4\, dv, \tag{17-22}$$

ایک متغیرہ ہوتا ہے۔ آئیے ہم اس مقالہ کو ثابت کریں۔ گاس کے مقالہ کا چہار ابعادی ہم پلہ یہ بیان کرتا ہے کہ

$$\int \frac{\partial T^i}{\partial x^i} d^4x = \int T^i \, dS_i, \qquad (17\text{-}23)$$

جہاں $d^4x = dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = dv\, dx^4,$ اور dS_i سہ ابعادی "سطح" کا ایک قطعہ ہے جو چار ابعاد میں T^i کے عمودی ہے۔ وہ خطہ جس کے اوپر مساوات (17-23) کا انٹیگریشن کرنا ہے شکل 17-1 میں دکھایا گیا ہے۔



[شکل 17-1. مساوات (17-22) کے مقالہ کو ثابت کرنے کے لیے انٹیگریشن کا خطہ دکھایا گیا ہے]

جہاں سطحیں (A) اور (C) اس طرح چنی گئی ہیں کہ T^i کے مکانی اجزا (A) اور (C) پر غائب ہو جاتے ہیں۔ ایسا کر سکتے ہیں۔ کیونکہ یہ مان لیا گیا تھا کہ وہ خطہ جہاں T^i کے مکانی اجزا غائب نہیں ہوتے محدود ہے۔ (B) کو x^4۔ محور کے عمودی چنا گیا ہے جبکہ (D) x'^4۔ محور کے عمودی چنا گیا ہے۔ تب مساوات (17-21) اور (17-23) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ:

$$\int T^4 \, dS_4 = \int T'^4 \, dS'_4.$$

چونکہ $dS_4 = dv$ اور $dS_4 = dv',$ جو معمولی سہ ابعادی حجمی قطعہ ہے اس لیے اس کا مطلب ہے کہ:

$$I = \int T^{4} \, dv. \qquad (17\text{–}22)$$

لارنٹز استحالہ کے تحت ایک غیر متغیرہ ہے۔ اسی طرح سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر درجہ دو کا ٹینسر حسب ذیل رشتہ کی پابندی کرتا ہے:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^{i}} = 0, \qquad (17\text{–}24)$$

تو

$$B^{j} = \int T^{4j} \, dv \qquad (17\text{–}25)$$

ایک چہار ویکٹر ہے۔ بعد کو مساوات (17-21) اور (17-24) کو° برقراری قوانین °کی طرح پہچانا جائے گا۔

16.- ایک ٹینسر دو مخالف متغیری مدزوں (in-dices,) i اور j کے لحاظ سے تشاکل رکھتا ہے اگر i اور j کو آپس میں بدلنے پر ٹینسر کے سب اجزا وہی رہتے ہیں۔ ایک ٹینسر مخالف متشاکل یا اسکیو متشاکل کہا جاتا ہے اگر i اور j کا اس طرح کا آپسی ادل بدل محض سب اجزا کے نشان بدل دیتا ہے۔ سمتی قدروں کے استحالہ کے تحت سب تشاکلی اوصاف غیر متغیر رہتے ہیں۔

یہ رشتے ہمارے ذرہ میکانیات کے ہم متغیری بیان کے لیے کافی ہوں گے حالانکہ ہم نے برق مقناطیسی میدانوں کے ہم متغیری بیان میں سب متعلقہ مسئلوں کی پیش بندی سے پرہیز کیا ہے۔ قبل اس کے کہ ہم اضافیتی اصولوں کی میکانیات کے لیے توسیع کی کوشش کریں ہمیں یہ دھیان میں رکھنا ہے کہ طبیعیات میں ایک ہم متغیری رشتہ تین طرح سے بنایا جا سکتا ہے۔

(a) وہ رشتہ ایک مخصوص استمراری فریم کے لیے معلوم ہے جیسے کہ صحیح فریم جس میں زیر غور نظام ساکن ہے۔ اگر اس قانون کو ایک ایسے ٹینسر مساوات کی شکل میں ظاہر کرنا ممکن ہے جو اس مخصوص فریم میں صحیح رشتہ دے دیتا ہے تو اس ٹینسر مساوات کی عام اہمیت ہوتی ہے۔

(b) ایک معلوم ٹینسر رشتہ کو ہم ایک ہم متغیری ٹینسر عمل سے ایک نئے ٹینسر مساوات میں تبدیل کر دیا جاتا ہے۔ اس کی سب سے سادہ مثال ایک غیر متغیر سے ضرب کی ہے، لیکن ہم نے ٹینسر ضرب تخفیف اور ہم متغیری تفرق کو بھی ہم متغیری عملوں کی شکل میں دیکھا ہے۔

(c) ایک ایسے رشتہ سے جو ایک مخصوص فریم میں جائز ہو ایک مساوات اُن مقداروں کا جن کی تحویلی صفات معلوم ہیں استحالہ کر کے اور باقی مقداروں کے لیے صحیح استحالہ اخذ کر کے حاصل کی جاتی ہے۔ تب یہ مقداریں ٹینسر شکل میں قابل اظہار ہوں گی۔ اس باب کے شروع میں اس عمل کا ذکر سیدھے استحالہ کے نام سے کیا گیا ہے اور یہ عام طور سے بہت محنت طلب ہوتا ہے۔

17-3 تحریک کی برقراریت

آیئے ہم مندرجہ بالا افکار کو نقطہ کمیتوں کے واسطے برقراریت کے قانون کی تشکیل کے لیے استعمال کریں۔ اس طرح سے اخذ کیے گئے تشکیلی رشتوں کا تب ایک ایسے خیالی تجربہ کے نتیجہ سے موازنہ کیا جائے گا جو مختلف فریموں سے مشاہدہ کیے گئے غیر الاسٹک تصادموں پر مشتمل ہو۔

قبل اضافیت طبیعیات میں رفتار u سے حرکت کرنے والا ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے، تحرک p, رکھتا ہے جہاں:

$$p = mu. \qquad (17\text{-}26)$$

ویکٹر u ایک چہار ویکٹر کے پہلے تین اضلال پر مشتمل نہیں ہے، کیونکہ $u = dr/dt,$ اور جب کہ dr چہار ویکٹر $dx^i = (dr, c\,dt),$ کے تین اجزا ظاہر کرتا ہے dt ایک غیر متغیرہ نہیں ہے۔ [اگر کسی چہار ویکٹر کے مکانی اجزا ایک مستندسہ۔ العادی ویکٹر کے موافق ہیں تو ہم چہار ویکٹر کے اضلال کے شمار میں معمول ویکٹر نوٹیشن کا استعمال کریں گے جیسے کہ $x^i = (r, ct)$.] میں لیکن اگر ہم مخالف متغیر ویکٹر dx^i کو غیر متغیر خطی قطعہ $ds,$ سے تقسیم کریں تو ہمیں ایک چہار ویکٹر

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \qquad (17\text{-}27)$$

ملتا ہے جسے چہار رفتار کہتے ہیں۔ مقدار ds صحیح وقت وقفہ کا c سے ضرب ہے یا

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \qquad (17\text{-}28)$$

اور اس لیے u کے اجزا اس سے ملتے ہیں:

$$u^i = \left(\frac{u}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right). \qquad (17\text{-}29)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اس طرح سے تعریف کیا گیا u کے ابعاد عام رفتار کے نہیں ہیں بلکہ یہ غیر ابعادی ہے۔[1]

مساوات (17-27) کو ایک غیر متغیر مقدار m_0c^2 سے جسے ذرہ کا خاصہ مان لیا جاتا ہے ضرب کرنے سے خطی تحرک کی مطابقت کا ایک ہم متغیری اظہار بنایا جا سکتا ہے۔ یہاں m_0 سکونی کمیت ہے یعنی وہ کمیت جو ذرہ کے صحیح فریم میں ناپی گئی ہے۔ اس طرح تعریف کیا گیا چہار تحرک یہ ہے:

$$p^i = m_0\frac{dx^i}{ds}c^2. \qquad (17\text{-}30)$$

اس طرح سے تعریف کرنے پر p^i لارنتز غیر متغیرہ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے ابعاد توانائی کے ہیں۔ اگر ہم اس کا اطمینان کر لینا چاہتے ہیں کہ ایک نقطہ پر تفاعل

---

[1] چہار ویکٹروں یا ٹینسروں کی تعبیر کرنے میں ہمیں اس بات کا اطمینان کر لینا چاہیے کہ ٹینسر کو ظاہر کرنے والے میٹرکس کے مختلف افراد کے ابعاد وہی ہیں۔ اسے c کی مناسب قوتوں کا استعمال کر کے کیا جاتا ہے اسے ٹھیک کس طرح کیا جاتا ہے یہ رواج کا معاملہ ہے اور بہت سی تصانیف c کی قوتوں میں ہمارے رواج سے مختلف ہیں مثال کے طور پر u^i کی ہم آہنگ تعریف اس طرح کی جا سکتی ہے $u^i = (u/\sqrt{1 - u^2/c^2},\ c/\sqrt{1 - u^2/c^2})$، جس سے u کے ابعاد ایک رفتار کے ہو جاتے ہیں۔ اس رواج کا بھی اکثر استعمال ہوتا ہے کہ لمبائی اور وقت کی اکائیاں اس طرح چنی جائیں کہ $c = 1$ ہو جائے جس کی وجہ سے سادگی آ جاتی ہے۔

کرنے والے دو ذرّوں کے لیے تحرک کی برقراریت کا قانون اضافیت کے ڈھانچے میں برقرار رہے تو اس خاطر کہ یہ قانون استمراری فریم کے چناؤ سے آزاد ہو اس کی شکل تصادم سے پہلے اور بعد یہ ہونا چاہیے:۔

$$p_1^i + p_2^i = \text{مستقلہ} \qquad (17\text{–}31)$$

مساوات (17-31) حسب ذیل کلاسکی قانون کی جگہ لیتا ہے جس میں یہ مان لیا گیا ہے کہ m_1 اور m_2 مستقل ہیں

$$m_1u_1 + m_2u_2 = \text{مستقلہ} \qquad (17\text{–}32)$$

یہ بحث ذرّات کے درمیان سیدھے تفاعل کے لیے ہی محدود ہے ۔ اس میں دو وجوہات سے "فاصلہ پر تفاعل" شامل نہیں ہے۔ کسی دیے گئے وقت پر دو علیحدہ ذرّوں کل تحرک کا اضافیت میں کوئی مطلب نہیں ہے، مزید برآں سب تفاعل ایک محدود رفتار سے ترسیل ہوتے ہیں۔ اس لیے ایک دوسرے سے علیحدہ ذرّات کے درمیان تحرک کے تبادلے کے معنی صرف اسی حالت میں ہیں جب ہر ذرّہ اپنے اوپر لگنے والے میدان کے ساتھ تحرک برقرار رکھتا ہے۔ یا اگر تفاعل ایک ذرّہ کے ذریعہ ترسیل ہوتا ہے جو یکے بعد دیگرے دونوں ذرّہ کمیتوں سے تفاعل کرتا ہے اگر صحیح طور سے دیکھا جائے تو اس بحث کے سختی سے درست ہونے کے لیے دونوں زیرِ غور کمیت نقطوں میں سے ہر ایک کا پھیلاؤ صفر ہونا چاہیے۔

مساوات (17-30) کے ذریعہ تعریف کیے گئے چہار تحرک کے اجزا یہ ہیں:

$$p^i = \left(\frac{m_0uc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right). \qquad (17\text{–}33)$$

جہاں ملا کسی دیے ہوئے فریم میں معمولی رفتار ہے پہلے تین اجزا اس شکل کے ہیں:۔

$$cp = cmu, \qquad (17\text{–}34)$$

جہاں

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (17\text{–}35)$$

اس وجہ سے اگر ہم چاہتے ہیں کہ تحرک کی برقراریت کا قانون اپنے مساوات (32-17) کے کلاسکی شکل میں برقرار رہے اور وہ لارنزہم متغیری ہو تو پھر کسی ذرہ کی کمیت غیر متغیر نہیں رہے گی بلکہ اس مخصوص حوالے کے فریم میں اپنی رفتار پر منحصر ہوگی۔ "کمیت کی رفتار کے ساتھ تبدیلی" تحرک کی برقراریت کے قانون کو ہم متغیری طرح پر تشکیل کرنے کا فوری نتیجہ ہے۔

17-4 توانائی کا تحرک اور کمیت سے رشتہ

تحرک کی برقراریت کے قانون کی اضافیتی شکل کا مفہوم نہ صرف p کے تین مکانی اجزا کی برقراریت بلکہ چوتھے جز کی برقراریت بھی ہے۔

$$p^4 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = mc^2. \qquad (17\text{–}36)$$

آیئے ہم اس مقدار کی طبیعیاتی اہمیت کی تفتیش کریں۔ کسی دیے ہوئے فریم میں p^4 کی وقت کے ساتھ بدلنے کی شرح مندرجہ ذیل ہے؛

$$\frac{dp^4}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) = \mathbf{u}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right), \qquad (17\text{–}37)$$

یا

$$\frac{dp^4}{dt} = \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}. \qquad (17\text{–}38)$$

اگر ہم سہ ابعادی) قوت کو تحرک کی وقت کے ساتھ تبدیلی کی شرح مانتے رہیں تو

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \qquad (17\text{–}39)$$

تب

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (17\text{–}40)$$

وہ شرح بتاتا ہے جس سے کسی مخصوص نظام میں کام کیا جا رہا ہے۔ اس وجہ سے اگر کسی مخصوص فریم میں توانائی کی برقراریت کو جائز رہنا ہے اور اگر E اس

فریم میں توانائی کو ظاہر کرتا ہے تو

$$\frac{dp^4}{dt} = \frac{dE}{dt}; \quad p^4 = E + \text{مستقلہ} \tag{17-41}$$

چونکہ توانائی کا ظہور اس حالت میں ہی ہوتا ہے جب توانائی میں تبدیلی ہوتی ہے اس لیے طبیعیاتی اہمیت میں کوئی کمی واقع نہیں ہوتی اگر ہم :

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{17-42}$$

رکھ دیں ۔

اس طرح ہمیں یہ نتیجہ نکالنا پڑتا ہے کہ "مقدار کار" سے ناپی گئی توانائی اور ایک دی ہوئی رفتار پر تحرک کے ذریعہ حرکت سے ناپی گئی کمیت ایسے تصور ہیں جن کا باہمی ادل بدل کیا جا سکتا ہے ، جب ایک وجود میں ہوتا ہے تو دوسرا بھی ہوتا ہے۔ کمیت اور توانائی دونوں ہی غیر متغیر نہیں ہیں ؛ دونوں کی مقدار مشاہد کے فریم پر مساوات (17-42) کے رشتہ کے ذریعہ منحصر ہے ہم نے دکھایا ہے کہ mc^2 میں تبدیلی میکانکی قوتوں کی وجہ سے کام سے مطابقت رکھتی ہے ؛ اس دعویٰ کا مطلب کہ mc^2 میں تبدیلی کسی بھی متعلقہ طریقۂ کار میں توانائی کی تبدیلی کو ظاہر کرتی ہے ایک مزید مفروضہ ہوگا جس کے جا ہونے کا دار و مدار تجربہ پر ہوگا۔ طبیعیات کے دوسرے میدانوں کا تجربہ اور خاص طور سے نیوکلی طبیعیات کا جہاں کمیت میں کسری تبدیلیاں بہت زیادہ ہو جاتی ہیں ، وثوق کے ساتھ بغیر کسی معقول شک و شبہ کے ثابت کرتا ہے کہ مساوات (17-42) اس زیادہ عام معنی میں جائز ہے ۔

کم رفتاروں کے لیے E کلاسکی حرکیاتی توانائی اور "سکونی توانائی" m_0c^2 کے جوڑ کے برابر ہو جاتی ہے ۔ u/c کی چھوٹی قیمتوں کے لیے مساوات (17-42) کو پھیلانے پر ہم پاتے ہیں :-

$$E = m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0u^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{u^4}{c^2} + \cdots$$

عام طور سے اضافیتی میکانیات چھوٹی رفتاروں کے لیے نیوٹنی میکانیات میں بدل جاتی ہے جیسا کہ ہونا ہی چاہیے۔ اضافیتی نقطہ سے توانائی کی برقراریت اور تحرک کی برقراریت ایک دوسرے سے آزاد اصول نہیں ہیں۔ ایک ہم متغیری تشکیل کے لیے ایک کے ساتھ دوسرے کا ہونا لازم ہے۔ وہ ہم متغیر جو توانائی تحرک چہار ویکٹر

$$p^i = (cp, E), \qquad (17\text{–}43)$$

سے وہی رشتہ رکھتا ہے جو ds کا dx^i, سے ہے، آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے:-

$$p^ip_i = E^2 - c^2p^2 = (m_0c^2)^2 \qquad (17\text{–}44)$$

توانائی اور تحرک کے درمیان یہ رشتہ کسی فریم میں جائز ہے اور ایک صحیح فریم میں جہاں $p = 0$ ہے ہمیں محض $E = m_0c^2$. ملتا ہے۔

توانائی تحرک ویکٹر p^i کا تبادل کسی دوسرے مخالف متغیر ویکٹر کی طرح ہوتا ہے۔ مساوات (17-2) کے مطابق ہم پاتے ہیں کہ

$$cp'_x = \frac{cp_x - \beta E}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (17\text{–}45)$$

$$p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z, \qquad (17\text{–}46)$$

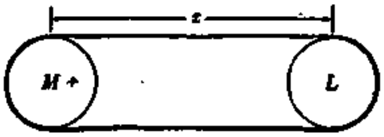
$$E' = \frac{E - \beta cp_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (17\text{–}47)$$

جہاں $E = p^4$. ان استحالی رشتوں سے دیکھا جا سکتا ہے کہ توانائی کی کسی منتقلی کا مطلب کمیت کی اور اس لیے تحرک کی منتقلی ہے اگر E کسی نظام کی توانائی اس کے صحیح فریم (صفر تحرک) میں ہے تو نشان لگے نظام سے مندرجہ ذیل تحرک کا مشاہدہ کریں گے

$$p'_x = \frac{-\beta E}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-v}{c^2}E'. \qquad (17\text{–}48)$$

مساوات (17-48) کے مطابق ہمیں کسی بھی ایجنسی کے ساتھ جو توانائی کو (خواہ کسی بھی شکل میں ہو) ترسیل کر رہا ہے تحرک وابستہ کرنا ہوگا۔ ایک موٹر M پر غور کیجیے جو ایک فاصلہ x پر مقیم بوجھ L کو چلا رہا ہے جیسا کہ شکل 17-2. میں دکھایا گیا ہے، اگر موٹر رفتار dE/dt سے بوجھ کو توانائی پہنچا رہا ہے تو L کی کمیت اسی مطابقت سے بڑھ رہی ہے۔ کمیت ایک فاصلہ x پر شرح $(1/c^2)\, dE/dt$, سے پہنچائی جا رہی ہے اور اس لیے نظام درج ذیل تحرک رکھتا ہے:

$$p = \frac{x}{c^2}\frac{dE}{dt}.$$



[شکل 17-2. موٹر M جو بوجھ L کو جو فاصلہ x پر ہے چلا رہا ہے]

عام طور سے اگر کوئی جسم کسی دی ہوئی رفتار سے توانائی جذب کر رہا ہے تو جسم کا تحرک بڑھتا ہے اور پورے تحرک کو برقرار رکھنے کے لیے ہمیں اُس وسیلہ کے ساتھ جو توانائی کی ترسیل کسی دی ہوئی سمت میں شرح N فی اکائی رقبہ سے کر رہا ہے ایک g، فی اکائی حجم تحرک کثافت منسلک کرنا ہوگا جہاں

$$g = \frac{N}{c^2}. \qquad (17\text{-}49)$$

یہ رشتہ باب 11، میں ہماری تابانی کے داب پر بحث سے اور سیکشن 6-10 میں ہمارے تحرک کے توازن کے متعلق خیالات سے اتفاق کرتا ہے۔ جب ہم نے برق مقناطیسی اشعاع پر جو ایک توانائی کا بہاؤ N ظاہر کرتی ہے، غور کیا تھا تو ہمیں مجبوراً ایک تحرک کثافت کو جو (17-49) سے ملتا ہے برقی مقناطیسی میدان سے منسوب کرتا تھا۔ یہ درحقیقت اس وجہ سے تھا کہ ہم نے یہ ماننے سے انکار کر دیا تھا کہ ایتھر ایک جسم برداشت کرنے کی اہلیت رکھتا ہے۔ ایتھر کو ان تجربوں کے ذریعہ جا

کا ذکر باب 15 میں کیا گیا ہے معلوم کرنے میں ناکامیابی اس یقین کو مستحکم کرتی ہیں کہ اشعاع کے اخراج اور جذب کا نظام ایک بند نظام ہے۔ نتیجہ یہ ہے کہ تحرک کی برقراریت کی وجہ سے مساوات (17-49) کی ضرورت ہوئی۔ اس کے برخلاف تحرک کی برقراریت اور ایتھر کی عدم وجود کے مفروضوں کو استعمال کر کے کمیت توانائی ترادف کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح سے بلا پورے اضافیتی حرکات کو داخل کیے ہوئے رشتہ $E = mc^2$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

17-5 منکاوسکی قوت کسی دیے ہوئے فریم میں قوت $F = dp/dt$ ایک چہار ویکٹر کا مکانی حصہ نہیں ہے۔ دوسری طرف درج ذیل مقدار جسے منکاوسکی قوت کہتے ہیں ایک مخالف متغیری چہار ویکٹر ہے:

$$F^i = \frac{dp^i}{ds} = \frac{d}{ds}(c\mathbf{p}, mc^2)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\frac{d(mc)}{dt}\right], \qquad (17\text{-}50)$$

F^i کے اجزا اس طرح لکھے جا سکتے ہیں:

$$F^i = \left(\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right), \qquad (17\text{-}51)$$

جہاں $\mathbf{F}$ اور $\mathbf{u}$ مساوات (17-39) اور (17-40) کے معمولی سہ ابعادی قوت اور رفتار ہیں۔ قوت کے لیے استحالہ کے قوانین F^i کی چہار ویکٹری نوعیت سے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔ ہم اپنے کو صرف اس حالت کے لیے ہی محدود رکھیں گے، جب $\mathbf{F}$ اس فریم میں جسے ہم نے Σ فریم کہا ہے صحیح ہے یعنی $\mathbf{u} = 0$۔ $\Sigma' F^i = (\mathbf{F}, 0)$ فریم میں $u'_x = v$، چونکہ $u_x = 0$، اور ہم پاتے ہیں:

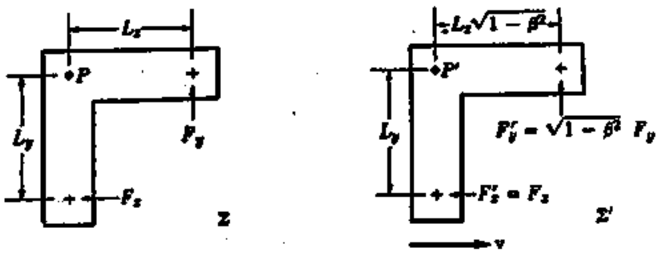
$$F'_x = F_x, \qquad (17\text{-}52)$$

$$F'_y = F_y\sqrt{1 - \beta^2}, \qquad (17\text{-}53)$$

$$F'_z = F_z\sqrt{1 - \beta^2}. \qquad (17\text{-}54)$$

شکل 17-3. میں دکھائے گئے قائمۃ الزاویہ لیور کا توازن F کے استحالہ کے مساوات کا ایک دلچسپ اطلاق مہیا کرتا ہے۔ جیسا کہ دکھایا گیا ہے Σ میں ساکن ایک مشاہد کے لیے F_x اور F_y کے اثر کے تحت لیور سکونی توازن میں ہے اس لیے

$$F_xL_y = F_yL_x. \qquad (17\text{–}55)$$



[شکل 17-3. ایک متحرک سمتی قدری نظام میں قائمۃ الزاویہ لیور]

Σ' میں ایک ساکن مشاہد کے لیے ہم توقع کریں گے کہ لیور گردشی اور خطی توازن میں بنا رہے گا کیونکہ ایسا ہونے پر دونوں استمراری فریموں میں فرق کیا جا سکے گا لمبائیوں اور قوتوں کے لیے استحالہ مساواتوں کا استعمال کرنے پر ہم پاتے ہیں کہ Σ' میں ایک مشاہد کے لیے ایک خاص مروڑ T' لیور پر گھڑی کی سوئی کی الٹی سمت میں کام کرے گا جہاں

$$T' = F_xL_y - (\sqrt{1-\beta^2}\,F_y)(\sqrt{1-\beta^2}\,L_x) = \frac{F_xL_yv^2}{c^2}. \qquad (17\text{–}56)$$

لیکن اس مروڑ سے کوئی گھماؤ پیدا نہیں ہوتا کیونکہ F'_x لیور پر $F'_xv = F_xv$, کی شرح سے کام کر رہا ہے اور لیور کا زاویائی تحرک حسب ذیل شرح سے بڑھ رہا ہے:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{(F_xv)vL_y}{c^2} = \frac{F_xL_yv^2}{c^2}. \qquad (17\text{–}57)$$

اس لیے Σ' میں ایک مشاہد کے لیے گو نہ تو مروڑ صفر ہے اور نہ زاویائی تحرک

میں تبدیلی پھر بھی موجودہ مروڑ زاویائی تحرک میں اضافہ صحیح صحیح متوازن کر دیتا ہے اور توازن کی حالت ایک غیر متغیر کی شکل میں برقرار رہتی ہے۔ (اس بحث میں ہم نے اُس ترکیب کا کوئی ذکر نہیں کیا ہے جس سے لیور میں ہو کر قوتوں کی ترسیل ہوتی ہے۔ اضافیت کی وجہ سے لچک کے قوانین میں بھی بڑی ترمیمات ہو جاتی ہیں۔ لیور کو ہم ایک سخت جسم نہیں سمجھ سکتے کیونکہ ایک جھٹکے کے ترسیل کی رفتار محدود ہوتی ہے۔ بہر حال ان ترمیموں کو مدِ نظر رکھتے ہوئے ایک زیادہ تشریحی بحث اوپر ملے نتائج کو تبدیل نہیں کرتی) قوتوں کے موضوع کو چھوڑنے کے قبل آیئے ہم مختصراً باہری قوتوں کے تحت ایک ذرّہ کی حرکت پر غور کریں۔

$$\mathbf{F} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right), \qquad (17\text{–}39)$$

سے ہم پاتے ہیں کہ

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\frac{du}{dt} + \frac{m_0 u u}{c^2(1 - u^2/c^2)^{3/2}}\frac{du}{dt}. \qquad (17\text{–}58)$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ایک ذرّہ کے اسراع کے لیے اسراع کی سمت میں قوت کے ایک حصّل کے علاوہ رفتار کے متوازی بھی ایک قوّت کا جز درکار ہے۔ کم رفتاروں کے لیے مساوات (17–58) کے داہنے طرف کا دوسرا رکن پہلے کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہے، جب u/c، اکائی کے مقابلے میں بہت چھوٹا ہوتا ہے تو مساوات (17–58) تقریباً $\mathbf{F} = m_0\, du/dt$، ہو جاتا ہے جو نیوٹن کے حرکت کے دوسرے قانون کی کلاسکی شکل ہے۔

17-6 دو یکساں ذرّوں کا تصادم

ٹینسری طریقوں کو بغیر رجوع کیے ہوئے رفتار پر کمیت کے انحصار کو لارنز استحالہ کے استعمال سے اور دو ذرّوں کے تصادم میں تحرک کی برقراریت لازم ہونے سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ یہ Gedanken Experi mente کے عمل کے ذریعہ اضافیت کے اصولوں کی توسیع کی ایک مثال ہے۔

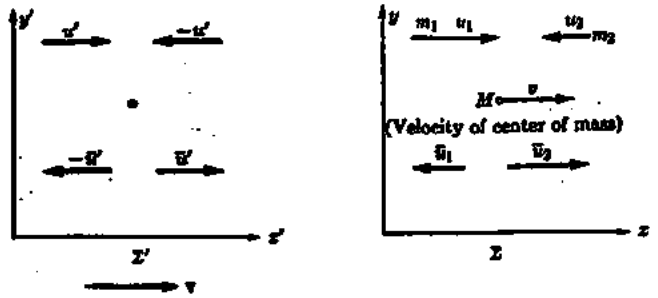
ایک ہی صفات کے دو نقطہ ذرّوں کے سیدھے تصادم پر غور کیجیے۔ ہم Σ' کو کمیتی مرکز کا فریم چن سکتے ہیں جس میں تصادم متشاکل ہے یعنی دونوں برابر رفتار سے پاس

آتے ہیں جیسا شکل 17-4. میں دکھایا گیا ہے۔ ایک لاانتہا چھوٹے وقفہ کے دوران جڑے رہنے کے بعد وہ الٹی سمتوں میں اسی فریم میں برابر رفتار سے الگ ہو جائیں گے۔
اب ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ کسی فریم میں تحرک اور کمیت برقرار رہیں گے اس لیے Σ، میں؛

$$m_1 + m_2 = M, \tag{17-59}$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = Mv, \tag{17-60}$$

جہاں M تصادم کے دوران متحدہ کمیت ہے۔ طولی رفتار کے لیے جوڑ کے رشتوں سے ہم پاتے ہیں کہ؛



[شکل 17-4. دو یکساں ذروں کا تصادم۔ پڑے نشان تصادم کے بعد کی مقداریں بتلاتے ہیں؛ Σ' کی رفتار v Σ. میں ہے]

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}, \qquad u_2 = \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2}. \tag{17-61}$$

M کو مساوات (17-59) اور (17-60) کے ذریعہ خارج کر دینے پر اور مساوات (17-61) کا استعمال کرنے سے ہم پاتے ہیں کہ؛

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + u'v/c^2}{1 - u'v/c^2} = \frac{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}}. \tag{17-62}$$

اس لیے جیسا ہم نے فرض کیا ہے برقراریت کے مفروضہ قوانین کو ہر فریم میں قائم رکھنے کے لیے

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \qquad (17\text{-}63)$$

ہونا چاہیے جہاں m_0 ذرّہ کے لحاظ سے صحیح فریم میں اس کی کمیت ہے۔ یہ مساوات (17-35) سے اتفاق کرتا ہے اور دوسرے مزید اخذ اوپر کی طرح ہوں گے۔

یہ بیان خاص دلچسپی کا اس وجہ سے ہے کہ ہم مساوات (17-61) کے ذریعہ تصادم کے دوران کی کمیت M حاصل کرسکتے ہیں:

$$M = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}\right)$$
$$= \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\,\sqrt{1 - u'^2/c^2}}. \qquad (17\text{-}64)$$

یہ $2m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$، سے جو m_0 سکونی کمیت والے اور رفتار v سے حرکت کرنے والے دونوں ذرّوں کی کمیت $2m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ سے بڑا ہے۔ یہ بڑھی ہوئی کمیت دونوں ذرّوں کے تصادم کے دوران توانائی میں اضافہ کو ظاہر کرتی ہے جو جمع ہوئی الاسٹک توانائی کی وجہ سے ہے یا اُس توانائی کا اضافہ ہے جو پوری پوری حرکیاتی شکل میں واپس نہیں آئی ہے۔ اس لیے جہاں تک تصادم کے پہلے حصّے کا سوال ہے، غیر الاسٹک اور الاسٹک تصادموں کے درمیان فرق غائب ہو جاتا ہے۔ اگر دونوں ذرّے تصادم کے بعد الگ ہو جاتے ہیں تو کسی فریم میں آخری رفتار معلوم کرنے کے لیے تصادم کے دوران توانائی میں تبدیلیوں کی جانکاری ضروری ہے۔

17-7 تصادموں کے لیے حرکیاتی رشتے نکالنے میں چہار۔ وکیٹروں کا استعمال

سکشن 17-3 کی ہماری عام بحث سے ظاہر ہو گیا ہے کہ دو ذرّوں کے درمیان تصادم میں مقدار p کے چار اجزا جو مساوات (17-33) سے ملتے ہیں برقرار رہتے ہیں۔ اس لیے ان اجزا کا استعمال کر کے مناسب الجبرائی عملوں کے ذریعے تصادمی حرکیات کا تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔ اکثر بیشتر یادہ کارآمد ہوتا ہے اور

طبیعیاتی لحاظ سے زیادہ نصیحت آموز بھی کہ مسئلہ کو خود چہار ویکٹر عملوں کے ذریعہ حل کیا جائے آیئے ہم طبیعیاتی دلچسپی کی دو مثالوں پر غور کریں۔

مثال I. سکونی کمیت m_{10} اور m_{20} کے دو ذرّوں کا تصادم کمیت مرکز توانائی :
مان لیجئے کہ دونوں ذرّوں چہار کے تحرک p_1^i اور p_2^i ہیں تصادم کے وقت کل چہار تحرک :

$$p^i = p_1^i + p_2^i. \tag{17-65}$$

ہوتا ہے۔ درج ذیل غیر متغیرہ :

$$p^i p_i = (E_1 + E_2)^2 - c^2(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \tag{17-66}$$

وہی رہے گا چاہے $p^i = (c\mathbf{p}, E)$ کے اجزا کی قیمت کسی بھی فریم میں لی جائے خاص دلچسپی کا فریم وہ ہے جس میں $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0,$ اور جسے عام طور سے "کمیت مرکزی فریم" کہتے ہیں گو کہ "صفر تحرک فریم" کہنا زیادہ صحیح ہوگا، اس فریم میں مقدار

$$E = (E_1 + E_2)_{\text{center of mass}} - (m_{10} + m_{20})c^2 \tag{17-67}$$

وہ زائد توانائی ہے جو "غیر الاسٹک" عملوں میں کام آسکتی ہے۔ اس لیے عام طور سے

$$E + (m_{10} + m_{20})c^2 = [(E_1 + E_2)^2 - c^2(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2]^{1/2}, \tag{17-68}$$

جہاں $E_1, E_2, \mathbf{p}_1$ اور $\mathbf{p}_2$ کی قیمت کسی بھی فریم میں لی جا سکتی ہے۔ خاص طور سے اگر دلچسپی کے فریم میں سکونی کمیت m_{20} کا ذرّہ شروع میں ساکن ہے تو $\mathbf{p}_2 = 0$ اور $E_2 = m_{20}c^2$ اس لیے

$$E = \{[(m_{10} + m_{20})c^2]^2 + 2Tm_{20}c^2\}^{1/2} - (m_{10} + m_{20})c^2, \tag{17-69}$$

جہاں $T = E_1 - m_{10}c^2$ اس فریم میں متحرک ذرہ کی حرکی توانائی ہے۔ یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایک لیبوریٹری حرکی توانائی

$$T = \frac{E^2 + 2(m_{10} + m_{20})c^2E}{2m_{20}c^2} \tag{17-70}$$

کی ضرورت ہوگی جس سے کسی غیر متحرک نشانہ کے ساتھ تصادمی ردِ عمل غیر الاسٹک عملوں کے لیے ایک توانائی دستیاب ہو سکے۔

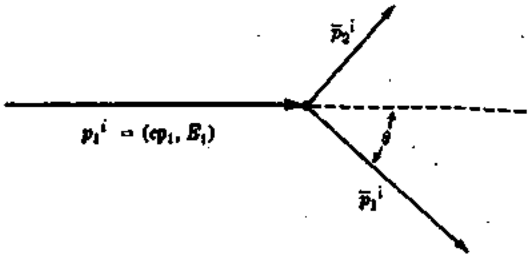
طالب علموں کے لیے مساوات (17-64) سے غیر ہم متغیری طریقوں کے ذریعے مساوات (17-70) کے اخذ کرنے کی کوشش کا اوپر کے تجزیہ سے موازنہ سبق آموز ہوگا۔

مثال .II سکونی کمیت m_{10} اور m_{20} والے دو ذرّوں کے درمیان الاسٹک تصادم کی حرکیات :

جیسا ہم نے سیکشن ;17-6 میں کیا تھا ہم پھر بیٹڑی لکیروں کا استعمال تصادم کے بعد کی مقداروں کو ظاہر کرنے کے لیے کریں گے۔ چہار تحرک کی برقراریت ہم پاتے ہیں کہ :

$$p_1^i + p_2^i = \bar{p}_1^i + \bar{p}_2^i. \tag{17-71}$$

حوالہ کا فریم وہ لیجیے جس میں وہ ذرّہ جس کی سکونی کمیت m_{20} ہے شروع میں ساکن ہے یعنی $p_2^i = (0, m_{20}c^2)$; اور مان لیجیے کہ سکونی کمیت m_{10} والا ذرّہ اپنے ابتدائی تحرک کی سمت سے زاویہ θ بناتا ہوا " چھٹک " جاتا ہے (دیکھیے شکل (17-5)).



[شکل .17-5 الاسٹک تصادم کی حرکیات]

مساوات (17-71) کا استعمال کرنے پر غیر متغیرہ یہ آتا ہے: $\bar{p}_2^i\, \bar{p}_{2_i}$ (دیکھیے مساوات (17-44))

$$\bar{p}_2^i\, \bar{p}_{2_i} = (m_{20}\, c^2)^2 = (p_1^i + p_2^i - \bar{p}_1^i)(p_{1_i} + p_{2_i} - \bar{p}_{1_i}) \quad (17\text{-}72)$$

$$= 2(m_{10}\, c^2)^2 + (m_{20}\, c^2)^2 - 2c^2\, \mathbf{p}_1 \cdot \bar{\mathbf{p}}_1 + 2E_1 m_{20}\, c^2$$

$$-2E_1\bar{E}_1 - 2\bar{E}_1 m_{20}\, c^2. \quad (17\text{-}73)$$

$\cos\theta = (\mathbf{p}_1 \cdot \bar{\mathbf{p}}_1)/p_1\bar{p}_1$ کے لیے حل کرنے پر ہم پاتے ہیں:

$$\cos\theta = \frac{m_{20}\, c^2(T_1 - \bar{T}_1) - T_1\bar{T}_1 - m_{10}\, c^2(T_1 + \bar{T}_1)}{c^2 p_1 \bar{p}_1} \quad (17\text{-}74)$$

جو $\cos\theta$ اور حرکیاتی توانائیوں T_1 اور $\bar{T}_1$ کے درمیان رشتہ ہے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$cp_1 = [T_1(T_1 + 2m_{10}\, c^2)]^{1/2} \quad (17\text{-}75)$$

اور اسی طرح کا ایک رشتہ $\bar{p}_1$ اور $\bar{T}_1$ کے درمیان ہے۔ عام طور سے مساوات (17-74) کو مساوات (17-75) کا استعمال کرکے سکونی کمیتوں کی مخصوص قیمتوں کے لیے سادہ بنایا جا سکتا ہے۔

حوالوں کا مشورہ

P. G. BERGMANN, *An Introduction to the Theory of Relativity*, باب 5 اور 6.
ٹینسر کیلکولس کو اس طرح پیش کیا گیا ہے کہ وہ اضافیت کے عام نظریہ پر لاگو ہو سکے۔

R. C. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, باب III اور IV.
ٹالمین اور ان کے ساتھی اس طرح کے "خیالی تجربات" کے لیے ذمہ دار ہیں جیسے دو یکساں ذرّوں کا تصادم۔

L. LANDAU AND E. LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields*, باب 1 اور 2
بعد کے موقعوں پر بھی ہم اضافیتی برقی حرکیات پر اس عمدہ کتاب کا حوالہ دیں گے

مصنفین نے اس موضوع کی اندرونی منطق پر زیادہ زور دیا ہے۔ اور اضافیت کے اصول اور انحراف کے اصول سے شروعات کیا ہے۔

V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation.* پہلے چار باب مخصوص اضافیت کے نظریہ پر ہیں اور ان میں کچھ پہلو ایسے شامل ہیں جو اور جگہ نہیں ملتے۔

C. Møller, *The Theory of Relativity*, Chapter ~~IV~~ V. باب ~~IV~~ V میں الاسٹک سلسلوں کی میکانیات شامل ہیں لیکن بہتر یہ ہے کہ اس کا مطالعہ باب V میں کی گئی برقی حرکیات کی اضافیتی تشکیل کے مطالعہ کے بعد کیا جائے۔

میکانیات کی بہت سی درسی کتابوں میں سے ہم ان کا مشورہ دیں گے۔

C. E. Weatherburn, *An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus.*

J. L. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus.*

مشق

1. – مان لیجیے کہ ایک ذرہ جس کی ابتدائی توانائی E اور سکونی توانائی E_0 ہے ایک ویسے ہی ساکن ذرہ سے ٹکراتا ہے۔ دکھائیے کہ اگر $E \gg E_0$, ہو تو صفر تحرک فریم میں بیش ترین توانائی $\sqrt{2EE_0}$. ہوگی۔

2. – π^0 مسان جس کی سکونی توانائی E_0 ہے اور جو تجربہ گاہ میں رفتار v سے حرکت کر رہا ہے ٹوٹ کر دو گاما کرنوں میں بدل جاتا ہے تو (a) تجربہ گاہ میں π^0 مسان سے بنی گاما کرنوں کی تقسیم توانائی (b) تجربہ گاہ میں ایک گاما کرن کا دوسری کے مقابلہ میں زاویائی بٹوارے کا حساب لگائیے۔

3. – اگر ابتدائی حرکی توانائی T_0 اور سکونی توانائی E_0 کا ایک ذرہ ایک ویسے ہی ساکن ذرہ سے ٹکراتا ہے تو دکھائیے کہ اُس ذرہ کی جو زاویہ θ پر ٹکرا کر جاتا ہے حرکی توانائی T یہ ہے:

$$T = \frac{T_0 \cos^2 \theta}{1 + (T_0 \sin^2 \theta)/2E_0}.$$

4. ۔ایک پروٹان جوڑہ پیدا کرنے کے لیے کیمتی مرکز نظام میں توانائی = $2M_0c^2$ 1862 Mev درکار ہوتی ہے تو (a) پروٹان (b) الکٹران کی کم سے کم توانائی کیا ہوگی جو ایک ساکن پروٹان سے تصادم کرکے یہ واقعہ پیدا کرسکے۔

5. ۔ پروٹان۔نیوٹران کے انتشاری تجربات میں منتشر کرتے والا اور انتشاری ذرّہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں جب کہ رفتاریں غیر اضافیتی ہیں۔ اس زاویہ میں پہلے درجہ کی تصحیح (جسے چھوٹا مان لیا گیا ہے) کا حساب اُن رفتاروں کے لیے لگائیے جو اتنی کافی بڑی ہیں کہ یہ تصحیح ضروری ہو جاتی ہے۔

6. ۔ مساوات کو ثابت کیجیے۔

7. ۔ کامپٹن اثر میں طول لہر شفٹ کے مساوات کو اخذ کیجیے۔ مساوات ۔ (17-74) کا استعمال کیجیے اور نتیجہ کا تعین۔ ویکٹر تجزیہ سے توازن کیجیے۔

8. ۔مان لیجیے کہ کسی ذرّے پر اس کے اپنے سکونی فریم میں کام کرنے والی صحیح قوت (سہ ابعادی) $F(\tau)$ ہے جو کہ ذرّہ پر ناپے گئے صحیح وقت τ کے فنکشن کے طور پر دی گئی ہے۔صرف ایک ابعادی حرکت مان لیجیے۔ثابت کیجیے کہ کسی دیے ہوئے فریم میں رفتار u درج ذیل سے ملتی ہے:۔

$$\frac{u}{c} = \sinh\left[\sinh^{-1}\left(\frac{u_0}{c}\right) + \frac{1}{m_0c}\int_0^{\tau} F(\tau')\, d\tau'\right],$$

جہاں u_0 ابتدائی رفتار ہے۔

9. ۔ ایک مسافر ایک فضائی جہاز میں ہے جس کا اسراع ایسا ہے کہ قوت $F(\tau)$ کی جیسا مشق 8 میں دیا گیا ہے، ایک مستقل قیمت $F(\tau) = m_0g$ ہے جہاں g حسب معمول زمینی کثافت کی وجہ سے اسراع ہے اس فاصلے کا حساب لگائیے جو آرام کی جگہ سے چل کر وہ مسافر اپنی پوری زندگی میں طے کرتا ہے (جسے 60 سال مان لیجیے)۔

باب 18

برقی حرکیات کی ہم متغیری تشکیل

ہمیں یاد ہے کہ لارنز تبادل کو برقی مقناطیسی لہر کی ترسیل کے خیال سے داخل کیا گیا تھا۔ دراصل برقی مقناطیسی لہر کی ترسیل کو تعین کرنے والی یکساں مساوات پہلے ہی ہم متغیری شکل میں ہیں کیونکہ ڈالمبرٹی آپریٹر

$$\Box = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (18\text{–}1)$$

ایک غیر متغیر ہے۔ عام طور سے میکسویل کی مساواتیں اور ان کے نتائج بہت آسانی سے ہم متغیری بیان میں ڈھالے جا سکتے ہیں۔ یہ اس حقیقت کی وجہ سے ہے کہ برقی حرکیات کے قوانین کو اضافیت کے تقاضوں کی مطابقت میں لانے کے لیے کسی ترمیم کی مطلق ضرورت نہیں ہے۔ مساواتوں میں فضا۔ وقت کے سمتی قدریں کی ہم متغیری تشکیل اپنے آپ مساواتوں کے باقی ماندہ حصوں کو ہم متغیری شکل میں لے آتی ہے۔

18-1 چہار ویکٹر مضمر

اضافیتی لحاظ سے یہ صاف ہے کہ ثقل چارج اور کرنٹ اسی چیز کے محض مختلف رُخ ہیں اگر ایک "صحیح" ثقل چارج ρ_0 ایسے فریم میں ہے جس میں یہ چارج سکونی ہیں تو مخالف متغیری ویکٹر

$$j^i = \rho_0 \frac{dx^i}{ds} \qquad (18\text{–}2)$$

کے اضلال ہیں :

$$j^i = \left(\rho\frac{\mathbf{u}}{c}, \rho\right), \qquad (18\text{-}3)$$

جہاں

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (18\text{-}4)$$

اس لیے ثقل چارج اور کرنٹ کے لیے تبادل کی مساواتیں اپنے آپ نکل آتی ہیں اور چونکہ ثقل چارج اور ثقل کرنٹ ایک ہی چہار ویکٹر j^i کے اضلاع ہیں اس لیے ہم غیر یکساں لہر مساواتوں (14-7) اور (14-8)، کو ہم مشابہ طریقے سے ایک میں ملا سکتے ہیں۔ اگر مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جائے؛

$$\Box\phi = -\rho/\epsilon_0, \qquad (18\text{-}5)$$

$$\Box c\mathbf{A} = -\rho\mathbf{u}/c\epsilon_0, \qquad (18\text{-}6)$$

تو یہ مساوات مندرجہ ذیل کے مساوی ہیں:

$$\Box\phi^i = -\frac{j^i}{\epsilon_0}, \qquad (18\text{-}7)$$

جہاں

$$\phi^i = (c\mathbf{A}, \phi). \qquad (18\text{-}8)$$

اس لیے اسکیلر اور ویکٹر مضراب ایسی مقداریں نہیں ہیں جن کا بے تعلق بیان کیا جا سکے؛ یہ اسی چیز کے مختلف رُخ ہیں۔ نتیجہ کے طور پر یہی بات برقی اور مقناطیسی میدانوں کے لیے بھی کہی جا سکتی ہے؛ کئی معنوں میں یہ بھی ایک ہی چیز کے مختلف رُخ ہیں۔

چارج اور کرنٹ کے تسلسل کی مساوات یہ سادہ ہم متغیر شکل لے لیتی ہے۔

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0, \qquad (18\text{-}9)$$

اور لارنز شرط مساوات (14-3)، اس کی جوڑی دار ہو جاتی ہے:

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial x^i} = 0. \qquad (18\text{-}10)$$

ϕ_i کے ہم متغیری اجزا کے لحاظ سے گیج استحالے، مساوات (14-9) اور (14-10)؛ مل کر ایک مساوات:

$$\phi_i' = \phi_i + \frac{\partial}{\partial x^i}(c\psi), \qquad (18\text{-}11)$$

بناتے ہیں جو صحیح استحالہ خاصیت اور صحیح نشان دونوں دیتے ہیں۔ میدان کا ϕ_i اور متعلقہ طبیعیاتی قوانین سے اخذ کا انحصار اسکیلر فنکشن ψ کے چناؤ پر منحصر نہیں ہونا چاہیے۔

مساوات (18-4)، جو ایک ساکن ثقل چارج استحالہ ایک غیر موزوں فریم کے ثقل چارج میں دیتا ہے، ایسا ہے کہ وہ کل ثقل چارج کی غیر متغیریت کو لازم کر دیتا ہے۔ ایک مکانی حجمی قطعہ کا ایک صحیح مکانی حجم dv_0 سے رشتہ یہ ہے:

$$dv = dv_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \qquad (18\text{-}12)$$

چونکہ صرف ایک ابعاد میں ہی لارنز سکڑن واقع ہوتی ہے۔ اس لیے:

$$\rho\, dv = \rho_0\, dv_0 \qquad (18\text{-}13)$$

اور دیے ہوئے حدود کے اندر کا چارج غیر متغیر بنا رہتا ہے۔ اس طرح اضافیتی نظریہ میں الکٹران کا چارج e ایک عالمی مستقلہ بنا رہتا ہے۔ چونکہ قدرت میں کوئی ایسے چارج نہیں پائے گئے ہیں جو e کے پورے ضعف نہ ہوں اس لیے کل چارج ایک شمار کے عمل سے ناپا جا سکتا ہے اور اُسے بھی غیر متغیر مانا جا سکتا ہے۔ یہ سب حقایق تجربہ سے اتفاق کرتے ہیں۔ کل چارج کا غیر متغیری ہونا مساوات (17-22) کے مصدقہ کو مساوات (18-9) کے ساتھ ملانے کا براہ راست نتیجہ بھی ہے۔

آیئے ہم ایک (غیر متغیر) نقطہ چارج e کے لیے جو نقطہ (x_1^i) پر واقع ہے غیر متجانس لہر مساوات یعنی مساوات (18-7) کا انٹگرل حاصل کریں۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک موزوں فریم میں جیسا شکل 18-1، میں ہے مساوات (18-7) کا انٹگرل محض کولم مضمر ہے:-

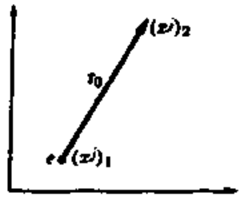
$$\phi_0^i = \left(0, \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}\right), \qquad (18\text{–}14)$$

جہاں r_0 موزوں ویکٹر فاصلہ منبع سے میدانی نقطہ تک ہے $(x^i)_2$ پر مضمر سگنل کو اُس وقت ناپنا ہوگا جو مندرجہ ذیل ابطائی شرط کی مطابقت میں ہو:

$$R^jR_j = 0 = -r^2 + c^2t^2, \qquad (18\text{–}15)$$

جہاں

$$R^j = (x^j)_2 - (x^j)_1 = (r, ct) = (r, r). \qquad (18\text{–}16)$$



[شکل 18-1. ماخذ نقطہ اور میدان نقطہ ایک موزوں فریم میں]

مساوات (18–14) کو کسی بھی فریم میں جائز بنانے کے لیے ہم مضمر حل کو ٹینسر شکل میں اس طرح پر لکھنے کی کوشش کریں گے کہ اگر $u = 0.$ ہو تو وہ کولوم مضمر میں بدل جائے۔ ایک موزوں فریم میں چہار۔ رفتار $u^i = dx^i/ds,$ کے اجزا یہ ہوتے ہیں؛

$$u_0^i = (0, 1). \qquad (18\text{–}17)$$

اب غیر متغیرہ $u^iR_i,$ کی قیمت موزوں فریم میں نکالی جا سکتی ہے جہاں $R_0^i = (r_0, r_0)$ اور یہ محض

$$u^iR_i = r_0. \qquad (18\text{–}18)$$

ہے۔

مساوات (18–14) کو تب ٹینسر شکل میں اس شرط کے ساتھ کہ $R^jR_j = 0$ ہو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\phi^i = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^i}{u^jR_j}, \qquad (18\text{–}19)$$

یہ مساوات اب ہر فریم میں خواہ وہ صحیح ہو یا نہیں، جائز ہوگا۔

مساوات (18-19) کو سہ۔ ابعادی ویکٹروں کے لحاظ سے لکھنے کے لیے ہم یاد کرتے ہیں کہ

$$u^j = \left(\frac{\mathbf{u}}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right). \tag{17-29}$$

اس لیے:

$$u^j R_j = \frac{-\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{r}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{18-20}$$

اور تب مساوات (18-19) کے اجزا یہ ہوتے ہیں:

$$\phi^i = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{u}}{cs},\ \frac{1}{s}\right). \tag{18-21}$$

جہاں

$$s = r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}}{c}. \tag{18-22}$$

مساوات (18-21) کے مضروں کو لینارڈ۔ ویشرٹ مضمر کہتے ہیں اور بعد کو ہم انھیں باب 14. کے ابطاشدہ مضروں سے اخذ کریں گے۔ مساوات (18-21) میں $\mathbf{u}$ مشاہد کی رفتار کی شکل میں داخل ہوتا ہے جو اُس فریم کی اضافت سے ہے جس میں سگنل کے "اخراج" کے وقت چارج ساکن تھا۔

18-2 برق مقناطیسی میدان ٹینسر

مضروں سے میدانوں کے ہم متغیری اخذ کو لکھنے میں ایک مسئلہ پیدا ہوتا ہے، جس کی بنیاد عام سہ۔ ابعادی ویکٹر تجزیہ میں ہے یعنی E اور B ایک ہی قسم کے ویکٹر نہیں ہیں۔ ایک عام ویکٹر کا اصلی ماڈل فضا میں ایک نقطہ کا نقل ہے۔ ایسے ویکٹروں کو قطبی ویکٹر کہتے ہیں اور D، E، F، u وغیرہ اسی قسم کے ہیں (کیونکہ چارج کو سیکشن 1-1 میں دی ہوئی تعریف کے مطابق ایک اسکیلر مانا گیا ہے نہ کہ "نقلی اسکیلر") اِن ویکٹروں کے اسکیلر ضرب سمتی

قدروں کے سبھی آرتھوگونل متبادلوں کے لیے ۔ نقل گردش اور انعکاس ویسے ہی بنے رہتے ہیں گو کہ اگر ایک یا سب سمتی قدروں کا نشان بدل دیا جائے تو مطابقہ ویکٹر اجزا کے نشان بھی بدل جاتے ہیں ۔ یہی بات دو قطبی ویکٹروں کے "ویکٹر ضرب" کے لیے نہیں کہی جا سکتی : ویکٹر ضرب کی تعریف ہی اس بات پر منحصر ہے کہ آیا A × B کو داہنے ہاتھ والے ترتیب میں لیا جائے یا بائیں ہاتھ والے دو ویکٹر ضرب کا اصل ماڈل ایک متوازی الاضلاع کے رقبے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جسے A اور B. بناتے ہیں لیکن اس طرح کی سطح کی سمت من مانی ہوتی ہے) یہ صاف ظاہر ہے کہ اگر A اور B کے تینوں سمتی قدری اجزا کی سمت بدل دی جائیں تو A × B. میں کوئی بھی تبدیلی نہیں ہوتی ۔ مقداریں جو ویکٹر ضربوں کی طرح تبادل پذیر ہوتی ہیں محوری ویکٹر کہلاتی ہیں اور اس کی مثالیں ٹارک زاویائی تحرک B, H, اور M. ہیں ۔ یہ سمتی قدریں نظام کی منتقلیوں اور صحیح گھماؤ کے لیے معمولی ویکٹروں کی طرح تبادل پذیر ہوتے ہیں لیکن ایسی تبدیلیوں کے لیے جن میں سمتی قدروں کا انعکاس شامل ہو محوری اور قطبی ویکٹروں کے درمیان اضافی نشان الٹ جاتا ہے ۔ ایک محوری ویکٹر اور ایک قطبی ویکٹر کا اسکیلر ضرب ایک اصلی اسکیلر نہیں ہوتا بلکہ نقلی اسکیلر ہوتا ہے : اس کا نشان محوروں کے الٹے پر الٹ جاتا ہے ۔ طبیعیاتی ایکٹر رشتوں میں صرف ایک ہی قسم کے ویکٹروں کے درمیان مساوات بن سکتا ہے ۔

محوری ویکٹر ایک چہار ۔ ویکٹر کے مکانی اجزا نہیں بنا سکتے ۔ دوسری طرف C = A × B کے اجزا کو دو اشاریوں سے (indices,) ظاہر کیا جا سکتا ہے ایک A کے اضلاع کا اور دوسرا B: کے اضلاع کا :

$$C_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha = -C_{\beta\alpha}, \tag{18-23}$$

جہاں ایک داہنے ہاتھ والے کارتیسی سمتی قدری نظام میں

$$C_{12} = C_z, \quad C_{23} = C_x, \quad C_{31} = C_y, \tag{18-24}$$

مثال کے لیے مساوات $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ کو اس ترقیم میں اس طرح لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} = -\dot{B}_{\alpha\beta}, \qquad (18\text{–}25)$$

اور $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. کو اس طرح لکھا جاتا ہے :

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = B_{\alpha\beta}, \qquad (18\text{–}26)$$

یہاں α اور β, 1, 2, 3 تک محدود ہیں اور مساواتوں کے بائیں ہاتھ والے حصے معمولی سہ۔ ابعادی اجزا پر مشتمل ہیں۔ دوسری جانب $\mathbf{E}$ قطبی ہے، اسے مضمروں سے اس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے :۔

$$E_\alpha = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \qquad (18\text{–}27)$$

ٹینسری ضروریات کی روشنی میں مساوات (18-26) اور (18-27) کا معائنہ کرنے پر ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک چہار ابعادی غیر متشاکل میدان ٹینسر F_{ij} کو داخل کیا جائے جو ہم متغیری چہار ویکٹر مضمر

$$\phi_i = (-c\mathbf{A}, \phi), \qquad (18\text{–}28)$$

کے فنکشن کی شکل میں یہ ہے :

$$F_{ij} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}. \qquad (18\text{–}29)$$

غیر متشاکل ٹینسر مندرجہ ذیل رشتے سے ملے گا :

$$F^{ij} = \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^i}{\partial x_j}. \qquad (18\text{–}30)$$

مساوات (18-26) اور (18-27), کی مطابقت میں F_{ij} کے اجزا یہ ہیں :۔

$$F_{ij} = \overset{j \rightarrow}{i \downarrow} \begin{pmatrix} 0 & -cB_z & +cB_y & -E_x \\ +cB_z & 0 & -cB_x & -E_y \\ -cB_y & +cB_x & 0 & -E_z \\ +E_x & +E_y & +E_z & 0 \end{pmatrix} \qquad (18\text{–}31)$$

اور مطابقہ غیر متشاکل ٹینسر F^{ij} کے اجزا یہ ہیں:۔

$$F^{ij} = \overset{j \rightarrow}{i \downarrow} \begin{pmatrix} 0 & -cB_z & +cB_y & +E_x \\ +cB_z & 0 & -cB_x & +E_y \\ -cB_y & +cB_x & 0 & +E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix} = g^{in} g^{jm} F_{nm}. \qquad (18\text{–}32)$$

چونکہ مضروں کے لحاظ سے میدانوں کو ہم متغیری شکل میں لکھا جاتا ہے اس لیے میکسویل کے مساواتوں کو بھی ہم متغیری شکل میں لکھنا ممکن ہونا چاہیے۔ اس کی تصدیق آسانی سے ہوسکتی ہے کہ ماخذ مساواتیں:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\rho \mathbf{u} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \qquad (18\text{–}33)$$

مندرجہ ذیل سے مطابقت رکھتے ہیں

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = \frac{j^i}{\epsilon_0}, \qquad (18\text{–}34)$$

جو محض میدان ٹینسر کی ہم متغیری ڈائیورجنس ہے۔ مساوات (18–34) کا تسلسل کے مساوات (18–9)، سے اتفاق میدان ٹینسر کی غیر متشاکل نوعیت سے ظاہر ہے۔ باقی دو دیگر میدانی مساوات کسی قدر زیادہ بے ڈھنگے ہیں:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (18\text{–}35)$$

مندرجہ ذیل سے مطابقت رکھتے ہیں:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0. \qquad (18\text{–}36)$$

مساوات (18-36) کا بایاں حصہ ہر حالت میں غائب ہو جائے گا جب تک کہ $i \neq$ $j \neq k$ نہ ہو۔ علاوہ اس کے اشاریوں کا پرمیوٹیشن معنی کو نہیں بدلتا اور اس لیے مساوات (18-36) کی تشکیل سے ظاہر کیے گئے چونسٹھ مساواتوں میں سے صرف چار کار آمد اور واضح ہیں۔

مساوات (18-36) کو اس حقیقت کو خیال میں رکھتے ہوئے کہ یہ ایک بالکل غیر متشاکل تیسرے رتبہ کا ٹینسر ہے، ایسی شکل میں رکھا جا سکتا ہے جو مساوات (18-34) کے مشابہ ہو (جو ایک چہار ویکٹر کے مساوی ہے)۔ چوتھے رتبہ کے بالکل غیر متشاکل ٹینسر p^{ijkl}, کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ جب تک $i \neq j \neq k \neq l$, نہ ہو اس کے اجزا صفر ہوں گے اور اگر $ijkl$ 1234. کا ایک جفت پرمیوٹیشن ہے تو ± 1 اور اگر طاق ہے تو کے برابر ہوں گے۔ سمتی قدروں کی منتقلی اور موزوں گھماؤ کے لیے p^{ijkl} ٹینسر کی طرح تبادل پذیر ہوتا ہے لیکن انعکاس یا تقلیب (غیر صحیح گھماؤ) کے تحت نہیں؛ اس تعریف کے مطابق ایک طاق تعداد کے سمتی قدری محوروں کا نشان بدلنے سے p^{ijkl} کے اجزا نہیں بدلتے ہیں جو اس کے خلاف ہے جس کی ایک ٹینسر سے توقع کی جاتی ہے۔ اس لیے یہ صحیح معنی میں ایک ٹینسر نہیں ہے بلکہ ایک نقلی ٹینسر ہے۔ غیر متشاکل میدان ٹینسر کو p^{ijkl} سے ضرب کرنے سے جو نقلی ٹینسر بنتا ہے اُسے اس کا دوہرا کہتے ہیں۔

$$G^{ij} = p^{ijkl}F_{kl}. \tag{18-37}$$

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ G^{ij} کی ساخت F^{ij} کی طرح ہے سوا اس کے کہ E اور cB کا باہمی تبادلہ ہو گیا ہے۔ G^{ij}, کے لحاظ سے مساوات (18-36) مندرجہ ذیل کے مرادف ہے۔

$$\frac{\partial G^{ij}}{\partial x^i} = 0. \tag{18-38}$$

یہ مساوات اس طرح لکھا گیا ہے کہ مقناطیسی پولوں اور پول کرنٹوں کو اگر

اُن کا وجود ہو تو داخل کیا جا سکے۔ چونکہ G^{ij} ایک نقلی ٹینسر ہے لہٰذا مساوات (18-38) میں جوڑا جانے والا ایک فرضی پول چہار ویکٹر ایک نقلی ویکٹر ہو گا۔ میدانوں کے ٹینسری اظہار سے ہم فوراً میدانوں کے لارنز استحالہ کو اخذ کر سکتے ہیں۔ مساوات (17-12) سے

$$F'^{ij} = Q^i_k Q^j_l F^{kl}, \tag{18-39}$$

اور اس سے ہم مندرجہ ذیل رشتے آسانی سے اخذ کر سکتے ہیں :

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \tag{18-40}$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \tag{18-41}$$

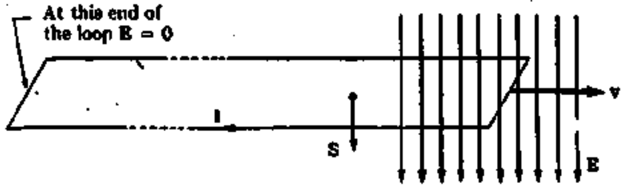
$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}), \tag{18-42}$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}/c^2), \tag{18-43}$$

جہاں باب 17 کی طرح $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ اور $E_{\parallel}, B_{\parallel}$ اور $\mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{B}_{\perp}$ بالترتیب $\mathbf{E}$ اور $\mathbf{B}$ کے اجزا ہیں جو $\mathbf{v}$ کے متوازی اور عمودی ہیں۔

مساوات (18-42) اور (18-43) کی طبیعیاتی لحاظ سے تفسیر ایک آسان طریقے سے کی جا سکتی ہے۔ جو ارقام $\mathbf{v}$ میں خطی ہیں (جز γ کو چھوڑ کر) انھیں بالخصوص کلاسکی ہونا چاہیے۔ مساوات (18-42) اس حقیقت سے مطابقت رکھتا ہے کہ β^2 درجہ تک ایک ذرّہ جو ایک مقناطیسی میدان کی اضافت سے حرکت کر رہا ہے ایک برقی میدان $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, محسوس کرتا ہے جس پر باب 9. میں تشریحی بحث ہو چکی ہے۔ مساوات (18-43) کی تفسیر کے لیے ہم ایک مستطیل سے گزرنے والے برقی فلکس پر توجہ مبذول کریں جو ایک برقی میدان والے خطّے سے ہو کر گزر رہا ہے۔ جیسا شکل 18-2. میں دکھایا ہے۔ مستطیل اس خطّے سے باہر تک پھیلا ہوا ہے جہاں $\mathbf{E}$ صفر سے مختلف ہے۔ اس مقناطیسی حالت کی جس پر سیکشن 9-3, میں بحث کی گئی ہے، پوری مشابہت میں مقناطیسی میدان $\mathbf{B}'$ کا جسے مستطیل کے ہمراہ حرکت کرنے والا مشاہد دیکھے گا، خطی

انٹیگرل اس مستطیل سے گزرنے والے برقی فلکس کی تبدیلی کی شرح کا تابع ہوگا اور اس حقیقی کرنٹ J کا بھی تابع ہوگا جو مستطیل سے وابستہ ہے۔ برقی فلکس کے بدلنے



[شکل 18-2. انٹیگریشن کا مستطیلی راستہ جو ایک غیر متجانس برقی میدان میں سے گزر رہا ہے]

کی شرح یہ ہے :

$$\oint \mathbf{E} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = -\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l}. \qquad (18\text{–}44)$$

اس لیے $\mathbf{B}'$ کی گردش اس سے ملتی ہے :

$$\oint (\mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l}) = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 J = -\frac{1}{c^2} \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} + \mu_0 J. \quad (18\text{–}45)$$

ساکن سمتی قدروں کے لحاظ سے یہ حسب ذیل کے مرادف ہے :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \qquad (18\text{–}46)$$

جو مساوات (18–43) سے اتفاق کرتا ہے اگر β چھوٹا ہو۔

میدانوں کے لیے یہ استحالہ مساوات برقی مقناطیسی میدانوں میں حرکت کرنے والے الکٹرانوں اور آئنوں پر مشتمل عملی مسئلوں کے حل کے لیے نہایت قیمتی ہیں۔

یہ اکثر ممکن ہو جاتا ہے کہ ایک مناسب لارنٹز فریم کا انتخاب کر کے ذریعہ یا تو برقی یا مقناطیسی میدان کو خارج کر دیا جائے۔ اس سے حل بہت آسان ہو جاتا ہے۔

18-1 خلامیں لارنز قوت فی اکائی حجم لارنز قوت $\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ ایک چہار۔ ویکٹر f^i کا مکانی حصہ ہے۔

$$f^i = F^{ik} j_k = \left(\mathbf{f}, \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{c}\right) \qquad (18\text{-}47)$$

f^i کا چوتھا جز برقی میدان کے ذریعہ فی اکائی حجم خرچ کی گئی طاقت کا ... گنا ہے۔ لیکن وہ پوری قوت جو حجم δv گھیرنے والے ایک چارج پر اس طرح لگتی ہے کہ $\delta q = \rho\, \delta v$، ایک چہار ویکٹر کا فضائی حصہ نہیں ہے کیونکہ یہ حسب ذیل سے ملتی ہے:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}\, \delta v = \delta q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \qquad (18\text{-}48)$$

چونکہ δq ایک غیر متغیرہ ہے اس لیے ایک موزوں فریم میں:

$$\mathbf{F}_0 = \delta q \mathbf{E}_0 \qquad (18\text{-}49)$$

اور اس لیے عام طور سے، مساوات (18-40) اور (18-42) سے

$$F_{\parallel} = F_{0\parallel}, \qquad (18\text{-}50)$$

$$\mathbf{F}_{\perp} = \gamma^{-1} \mathbf{F}_{0\perp}. \qquad (18\text{-}51)$$

یہ مساوات میکانکی قوت کے استحالہ کے مساواتوں (17-52)، (17-53) اور (17-) سے اتفاق کرتے ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ میکانکی قوتوں اور برقی قوتوں کے درمیان توازن فریم کے انتخاب سے غیر متغیرہ ہے۔ قوت کی نوعیت اس کی تبادلی صفات پر اثر انداز نہیں ہوتی۔ علاوہ ازیں ہم قوت کی تعریف ... dp ... سے کرنے میں حق بجانب ہوں گے اگر $\mathbf{F}$ کے لیے ہم مساوات (18-48) کو لارنز قوت کا استعمال کریں اور اس لیے مساوات (17-50) کسی ... مقناطیسی میدان میں ایک چارج شدہ ذرّے کی حرکت کے مساوات کا

صحیح اضافیتی اظہار ہے،

کسی باہری برقی، مقناطیسی میدان میں ایک چارج q والے ذرّے کی حرکت کا مساوات کسی لارنز فریم میں یہ ہے :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\mathbf{u}}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\right] = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \qquad (18\text{–}52)$$

جو مندرجہ ذیل ہم متغیّری مساوات کا مکانی جزو ہے۔

$$m_0c^2\frac{du^i}{ds} = qF^{ik}u_k. \qquad (18\text{–}53)$$

18-4 مادّی وسیلوں میں مآخذ کا ہم متغیّری بیان

الکٹرانی نظریہ کے نقطۂ نظر سے عام میکسویل مساوات برقی مقداروں کے ایسے خطّوں کے اوپر اوسط لینے کا نتیجہ ہیں جو اتنے کافی بڑے ہیں کہ کلاں میکرو اسکوپی مشاہدات ممکن ہو سکیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ مکانی برقی حرکیات کو مع چارجوں اور کرنٹوں کے ایک سادہ ہم متغیری طریقے سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ تب مادّی وسیلوں میں برقی حرکیات کی مساواتوں کو ایک ہم متغیری شکل میں لکھنا ممکن ہونا چاہیے مادّی وسیلوں کے میکرو اسکوپی برقی حرکیات میں نیا عنصر یہ ہے کہ چہار دیکٹر کرنٹ j^i کے چار غیر اجزا ایسے فریم میں بھی ہو سکتے ہیں جس میں وسیلہ ساکن ہو۔ ایسے فریم میں :

$$(j^i) = \left(\frac{\mathbf{j}^0}{c}; \rho^0\right), \qquad (18\text{–}54)$$

جہاں $\mathbf{j}^0$ صحیح فریم میں کرنٹ کثافت ہے آیئے اب ہم ایک غیر صحیح فریم میں j^i کے اجزا کی شکل پر غور کریں۔ خلائی حالت کے ساتھ مطابقت کے لیے j^i کے حسب ذیل اجزا کسی بھی فریم میں یہی رہیں گے۔

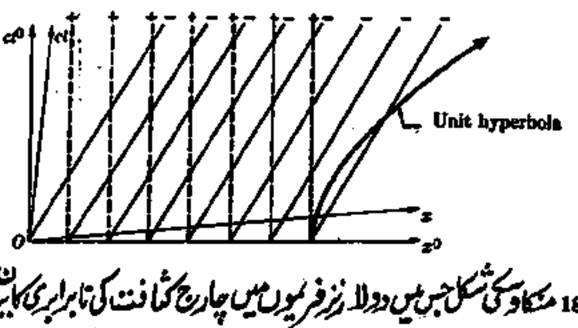
$$(j^i) = \left(\frac{\mathbf{j}}{c}, \rho\right) \qquad (18\text{–}55)$$

اوراس لیے عام طور سے

$$j_z = \gamma(j_z^0 - \rho^0 v), \qquad (18\text{-}56)$$

$$\rho = \gamma\left(\rho^0 - \frac{j_z^0 v}{c^2}\right), \qquad (18\text{-}57)$$

جہاں v کسی من مانے فریم کی رفتار (جو z کی سمت میں ہے) جسے موزوں فریم میں ناپا گیا ہے۔ مساوات (18-56) طبیعیاتی لحاظ سے صاف ہے اس میں منتقلی چارج سے پیدا ہوا حملی کرنٹ (convective current) شامل ہے اور تخفیف جز بھی موجود ہے جس کی وجہ سے چارج غیر متغیر ہو جاتا ہے مساوات (18-57) طبیعیاتی لحاظ سے اتنا صاف نہیں ہے : اس کا بیان ہے کہ کوئی شے جس میں کرنٹ بہتی ہے لیکن جو ایک صحیح فریم میں برقی لحاظ سے نیوٹرل ($\rho^0 = 0$) ہے اگر کسی دوسرے استمراری فریم سے دیکھی جائے تو نیوٹرل نہیں رہے گی۔ اس اثر کو متحرک چارجوں کی حرکیات کے خیال سے سمجھا جا سکتا ہے آیئے ہم صحیح فریم Σ^0 میں مثبت اور منفی چارجوں کی کثافت برابر لیں۔ سہولت کے لیے مان لیجیے کہ مثبت چارج ساکن ہیں (گو کہ یہ ہماری دلیل کے لیے ضروری نہیں ہے) اور منفی چارج حرکت میں ہیں۔ مثبت چارجوں کی عالمی لکیریں (جو ٹوٹی دکھائی گئی ہیں) اور منفی چارجوں کی عالمی لکیریں (جو پوری دکھائی گئی ہیں) جنہیں Σ^0 میں اور کسی من چاہے فریم Σ میں مشاہدہ کیا گیا ہے شکل 18-3. کے منکاوسکی شکل میں ظاہر کی گئی ہیں Σ^0 میں چارج کثافت کو + اور - چارجوں

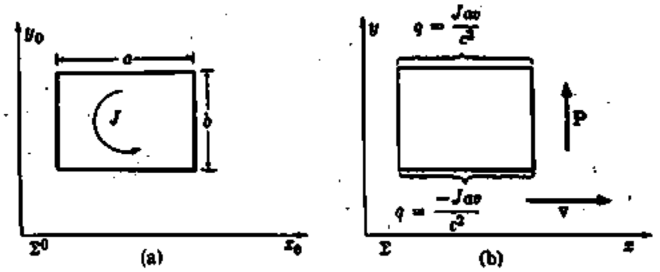


[شکل 18-3. منکاوسکی شکل جس میں دو لازر فریموں میں چارج کثافت کی نابرابری کا بیان دکھایا گیا ہے]

کو ایک ساتھ گن کر ناپا جاتا ہے، یعنی z^0- محور پر ناپا جاتا ہے۔ Σ^0 میں ثقل چارج

کو + اور − چارجوں کو x محور کی سمت میں گن کر نا پایا جاتا ہے یعنی Σ میں اُن کا ایک سا تھ اوسط لیا جاتا ہے۔ یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ X محور کی سمت میں − چارجوں کی کثافت محور کی کثافت کے مقابلے میں بلا شبہ گھٹ گیا ہے جب کہ x چارجوں کی کثافت میں بہت خفیف تبدیلی ہوئی ہے۔ (لیکن اس کا خیال رکھیے کہ چارج کثافت اکائی ہا پٹر x^0 کے مطابقہ محوروں کے مقطوعہ میں فی اکائی لمبائی چارجوں کے شمار سے ناپے جاتے ہیں جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے)۔ اِس لیے کل ملا کر ایک مثبت چارج Σ میں ملتا ہے جب ایک منفی کرنٹ نیوٹرل صحیح فریم میں بہتی ہے جو مساوات (18-57) سے اتفاق کرتی ہے۔

اس کا اثر جو کہ Σ اور Σ^0 کے درمیان ہم وقتی میں فرق کا سیدھا نتیجہ یہ حقیقت ہے کہ Σ^0 میں ایک مقیم نیوٹرل کرنٹ حلقہ میں ایک برقی گردشہ آجاتا ہے جب اُس کا مشاہدہ Σ میں کیا جاتا ہے۔



(شکل 18-4. برقی گردشہ جو ایک کرنٹ حلقہ حاصل کر لیتا ہے جب اس کا مشاہدہ ایک متحرک فریم سے کیا جاتا ہے)

شکل 18-4 کے مستطیلی کرنٹ حلقہ پر غور کیجیے جس میں کرنٹ J بہہ رہی ہے۔ Σ کے نقطۂ نظر سے x^0 کے متوازی ٹانگوں میں بالترتیب چارج $\pm Jav/c^2$ آجائیں گے، اگر ہم v میں دو قوتی رقموں کو نظر انداز کر دیں۔ اس طرح نظام کا برقی گردشہ یہ ہو گا:

$$|\mathbf{P}| = \frac{vabJ}{c^2} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{m}|}{c^2}. \qquad (18\text{-}58)$$

جہاں $JS = \mathbf{m}$ ویکٹر رقبہ $\mathbf{S}$ کے حلقہ کا مقناطیسی گردشہ ہے جبکہ $|\mathbf{S}| = ab$.

18-5 مادّی وسیلے میں میدان مساوات

اگر ہم چارج کرنٹ، چار ویکٹر کو "حقیقی" اجزا j^i اور مقناطیسیت تقطیبی اجزا j^i_M میں بانٹیں تو میکسویل ماخذ مساوات یعنی مساوات (18-34) یہ ہو جاتے ہیں :

$$\frac{\partial F^{il}}{\partial x^i} = \frac{j^l + j^l_M}{\epsilon_0}, \qquad (18\text{-}59)$$

جبکہ مساوات (18-36) ویسا ہی رہتا ہے۔ پہلے کی طرح F^{il} مساوات (18-32) کی میٹرکس سے $\mathbf{B}$ اور $\mathbf{E}$ کی شکل میں ملتے ہیں۔ سہ ابعادی تشکیل کی طرح یہاں بھی یہ بہتر رہے گا کہ مساوات (18-59) کو حقیقی چارجوں اور کرنٹوں کے لحاظ سے صرف خارجی ماآخذ کی طرح لکھا جائے اور ترغیب شدہ چارجوں اور کرنٹوں کو میدانوں میں شامل کیا جائے۔ یہ بات گردشہ ٹینسر M^{il} کو حسب ذیل مساوات کے ذریعے داخل کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

$$j^l_M = \frac{\partial M^{il}}{\partial x^i}. \qquad (18\text{-}60)$$

اس لیے باب 7 کے پیچ سے باہر ماآخذ کے ساتھ مطابقت ہونے کے لیے j^l_M کے اجزا یہ ہونے چاہئیں :

$$j^l_M = \left(\frac{\mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P}{c}, \rho_P\right) = \left(\frac{\nabla \times \mathbf{M}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, -\nabla \cdot \mathbf{P}\right). \qquad (18\text{-}61)$$

تب M^{il} کے اجزا اِس سے ملیں گے :

$$(M^{il}) = \begin{matrix} & j \rightarrow \\ \begin{matrix} i \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -M_z/c & M_y/c & -P_x \\ M_z/c & 0 & -M_x/c & -P_y \\ -M_y/c & M_x/c & 0 & -P_z \\ P_x & P_y & P_z & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}. \qquad (18\text{-}62)$$

سہ ابعادی رشتوں کی مطابقت سے :

$$\mathbf{H}/c\epsilon_0 = c\mathbf{B} - \mathbf{M}/c\epsilon_0, \qquad (18\text{-}63)$$

$$D/\epsilon_0 = E + P/\epsilon_0, \qquad (18\text{-}64)$$

ہم ایک نیا میدان H^{ij} داخل کرسکتے ہیں جس کی تعریف یہ ہے :

$$H^{ij}/\epsilon_0 = F^{ij} - M^{ij}/\epsilon_0. \qquad (18\text{-}65)$$

تب ماخذ کے مساوات یعنی مساوات (59-18) محض یہ ہو جاتے ہیں ۔

$$\frac{\partial H^{ij}}{\partial x^i} = j^j, \qquad (18\text{-}66)$$

جہاں

$$(H^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -H_z/c & H_y/c & D_x \\ H_z/c & 0 & -H_x/c & D_y \\ -H_y/c & H_x/c & 0 & D_z \\ -D_x & -D_y & -D_z & 0 \end{pmatrix} \qquad (18\text{-}67)$$

معاون میدانوں کی تعریف کرنے والے مساواتوں کے نشانات اُس طریقہ سے مطابقت رکھتے ہیں جس کے ذریعہ گردشوں سے مرازف کرنٹوں اور چار جوں کو اخذ کیا گیا ہے ۔

مساواتیں (36-18) اور (66-18) ہم متغیری میکسویل مساواتیں ہیں جن کا آپسی رشتہ مساوات (65-18) کے ذریعے ہے جو میدانوں F^{ij} اور H^{ij} میں اور گردشوں M^{ij} میں رشتہ ظاہر کرتا ہے ۔

اگر گردشہ M^{ij} اور کرنٹ j^j بجائے دیے ہوئے فنکشن ہونے کے، میدانوں کے لحاظ سے "ترکیبی" مساواتوں سے ظاہر کیے جاتے ہیں (مثلاً سرایت، ڈائیلکٹرک متعلقہ اور جالکتا) تو ہم متغیری مساوات بہت کارآمد نہیں ہوتے، کیوں کہ ان مستقلوں کی تعریف ایسے فریم میں کی گئی ہے جس میں وسیلہ ساکن ہے۔ ان مستقلوں کی ایک ہم متغیری تعریف ممکن ہے لیکن اس میں بہت زیادہ پیچیدگیاں درپیش ہوتی ہیں ۔

18-6 جزوی میدانوں کی استحالی صفات

گردشوں کے استحالی صفات ہم متغیری تشکیل سے فوراً مل جاتے ہیں جیسے کہ مساوات (40-18) سے لے کر (43-18) تک میں ہے ہم

سادہ نظام سے نشان لگے نظام میں استحالہ کے لیے جو رفتار v سے حرکت کر رہا ہے یہ پاتے ہیں :

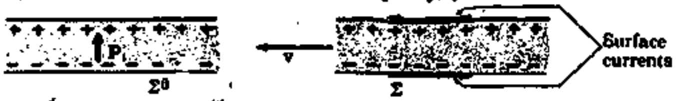
$$P'_{\|} = P_{\|}, \qquad (18\text{–}68)$$

$$M'_{\|} = M_{\|}, \qquad (18\text{–}69)$$

$$\mathbf{P}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{P}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{M}_{\perp}}{c^2}\right), \qquad (18\text{–}70)$$

$$\mathbf{M}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{P}_{\perp}). \qquad (18\text{–}71)$$

مساوات (18-68) متوقع ہے کیوں کہ $P_{\|}$ ایک (غیر متغیر) چارج اور فاصلہ/حجم (دونوں ایک ہی تناسب سے سکڑے ہوئے) کا حاصلِ ضرب ہے۔ اسی طرح کی دلیل مساوات (18-69) پر بھی لاگو ہوتی ہے۔ مساوات (18-71) میں کڑی $\mathbf{v} \times \mathbf{P}$ جز، γ کو چھوڑ کر، غیر اضافیتی ہے جو اس حقیقت کی وجہ سے رونما ہوتا ہے کہ ایک تقطیب شدہ وسیلے کا عمل کل ملا کر ایک چارج کے گردش کے مساوی ہوتا ہے۔ ہم اس اثر سے پہلے ہی (باب ۹) متحرک وسیلوں میں میکسویل کے مساواتوں پر ایک غیر۔اضافیتی بحث میں دوچار ہو چکے ہیں۔ ایک تقطیب شدہ لا انتہا پٹی پر جو شکل 18-5. میں دکھائی گئی ہے، غور



(شکل 18-5. ایک متحرک تقطیب شدہ پٹی ایک مقناطیسی وسیلے کے مساوی ہے)

کیجیے۔ ایک متحرک فریم Σ کے لیے یہ پٹی مخالف سطحی کرنٹ رکھتی ہے جو ایک یکساں مقناطیسی وسیلے کے مترادف ہے۔

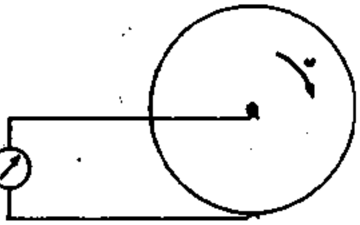
مساوات (18-70) کا کوئی غیر۔اضافیتی جوڑی دار نہیں ہے۔ جیسا پہلے دکھایا گیا ہے یہ مساوات کل ملا کر چارجوں کا اثر ظاہر کرتا ہے جب ایک نیوٹرل ساکن وسیلہ میں بہنے والی کرنٹ کا ایک غیر موزوں فریم سے مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ یہ زائد برقی گردش وہی ہے جس کی پیشین گوئی مساوات (18-58) کرتا ہے اور جو ہم وقتی کی اضافیتی تعریف کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ یہ مساوی برقی

گردشہ یک قطبی ترغیبی جنریٹر کے ظاہری تضاد کو دور کر دیتا ہے۔ ہم سیکشن 5-9 میں اس نتیجہ پر پہنچے تھے کہ جب ایک چالک جو کرنٹ لے جانے والے برشوں سے مس کر رہا ہے ایک مقناطیسی میدان کے عمودی حرکت کرتا ہے تو ایک کرنٹ بہے گی۔ جب تک B کا ماخذ خارجی ہے کوئی مشکل پیدا نہیں ہوتی۔ لیکن یہ اثر تب بھی بنا رہنا چاہیے جب B خود چھڑ کے مستقل مقناؤ کی وجہ سے ہو، چونکہ مستقل مقناؤ صرف مساوی ایمپیری کرنٹوں کی وجہ سے بیان ہو سکتا ہے اس لیے یہ سوال پیدا ہوا کہ کیا ایسے کرنٹ کس طرح ایک متحرک فریم سے دیکھے جانے پر ایک برق سکونی اثر پیدا کر سکتے ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ ایسا بیان کوئی مشکلات پیدا نہیں کرتا کیونکہ ہم برق سکونی میدان کی تفسیر ایسے کر سکتے ہیں کہ یہ مرادف گردشہ $v \times M/c^2$ کی وجہ سے ہے۔ چونکہ یہ مرادف مومینٹ ہم وقتی کی اضافیتی تعریف کا نتیجہ ہے اس لیے یک قطبی ترغیب بنیادی طور پر ایک اضافیتی اثر ہے۔

یک قطبی ترغیب کے لیے عملی ترکیبیں عام طور سے گردش پر مشتمل ہوتی ہیں اس لیے یہاں گردشی حرکت یا عام سرعتی حرکت کے متعلق کچھ مزید باتیں بتا دینا چاہیے۔ سرعتائے فریموں پر ایک مکمل بحث اس کتاب کے دائرے سے باہر ہے لیکن کچھ غور ضروری ہے جس سے یہاں اور سیکشن 5-9 میں دیے گئے بیانات کا عملی تجربات پر اطلاق واضح ہو جائے۔ حالانکہ ایسے فریموں کے درمیان جن کی حرکت میں فرق صرف ایک یکساں اضافتی رفتار کا ہوتا ہے (لارنز فریم)، کوئی شناخت ممکن نہیں ہے۔ لیکن اس کے برعکس ایسے تجربات کیے جا سکتے ہیں جن کے ذریعہ گردشی (سرعتائے) فریموں میں فرق کیا جا سکے۔ یہاں پر ہمارا سروکار صرف اُن مخصوص (استمراری) فریموں سے رہا ہے جن میں مخصوص اضافیت کے قوانین جائز ہیں۔ کون سا فریم استمراری ہے، اس کا فیصلہ ایسا مان لیا جا سکتا ہے کہ جو مادی کششی قوتوں کی بنا پر ہوگا، اس لئے "گردش کے لیے ترجیحی فریم" کا تعین کائنات میں کمیت کے بیشتر حصّے کے جائے قیام سے ہوگا۔ سچ کہا جائے تو ایسا کوئی فریم نہیں ہے جس میں مخصوص اضافیت صحیح صحیح جائز ہو۔ کیونکہ کوئی ایسا فریم نہیں مل سکتا جس میں مادی کششی اسراع

یا "مرادف" (یعنی نا قابلِ امتیاز) استمراری اسراع غائب ہوں۔ لیکن سب برقی مظاہر کے لیے زمین کی سطح ایک اطمینان کی اور اصل سے بہت قریب لازنز فریم ہے۔ یہ بات دھیان دینے کی ہے کہ مخصوص اضافیت کی آزمائشوں میں ہمارا تعلق زمینی سطح کی راست خطی حرکت کے اثرات سے رہا ہے، خم خطی حرکت کے اثرات سے نہیں رہا ہے۔

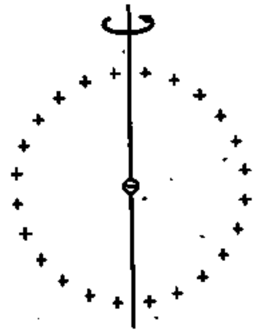
لیکن بڑے پیمانے کے ایسے برقی مقناطیسی اثرات ہیں جو زمین کے فریم میں مادّہ کی گردش کی وجہ سے پیدا ہوئے غیر استمراری فریموں کے لیے امتیازی ہیں، اگر ہم یہ مان لیں کہ ایسے اثرات گردشی فریم میں اور زمینی فریم میں باہمی ہونے چاہئیں تو بہت سے تضاد رونما ہوتے ہیں۔ آیئے ہم شکل 18-6. میں دکھائی گئی اس گردشی ترکیب پر غور کریں جو سیکشن 9-5, کی سرکنے والی چھڑ کے ہم پلہ ہے اور جسے "فیراڈے ڈسک" کہتے ہیں، اس کے رویے کے کچھ پہلو ان نتائج سے مطابقت رکھتے ہیں جو سیکشن 9-5. میں نکالے گئے تھے۔



(شکل 18-6. فیراڈے ڈسک گردش میں یک قطبی ترغیب کی مثال)

نقشہ 9-1, میں جو ڈسک مقناطیسی میدان کا ماخذ اور آلۂ مشاہدہ کی حرکت کے مختلف امکانات کے لیے برقی محرک قوت بتاتا ہے، دیئے گئے سب نتائج برقرار رہتے ہیں۔ خاص طور سے یہ اہم نتیجہ قائم رہتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے ماخذ کی حرکت (اس تجربہ میں گردش) کسی طبیعیاتی عمل پر اثر انداز نہیں ہوتی جب تک کہ اس حرکت سے ایک وقت کے ساتھ بدلنے والا میدان پیدا نہیں ہوتا، پھر برقی محرک قوت کو سیدھے فیراڈے قانون مساوات (9-2). سے معلوم کیا جا سکتا ہے اگر فلکس کی تبدیلی کا حساب ایسے مدار کے لیے لگایا جائے

جو واقعی کرنٹ بردار کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ یہاں یہ راستہ دو فریموں کے درمیان بٹا ہوا ہے۔ اس کے علاوہ اگر "الکٹران پر موثر قوت" کا خیال کیا جائے تو صحیح جواب ملتا ہے، لیکن دھیان رہے کہ گردشی فریم میں موثر برقی میدان E_r کم رفتاروں کے لیے $\omega B r$ ہے؛ اس کا ڈائیورجنس غیر صفر ہے اور اس وجہ سے ایک حجمی چارج پیدا ہوتا ہے، یہ خطی حرکت کے لیے ہمارے استحالہ قوانین سے میل نہیں کھاتا اور یہ ظاہر کرتا ہے کہ ڈسک "مطلق" گردشی حرکت (یعنی ایک استمراری فریم کے اضافت سے حرکت) اصولاً دریافت کی جاسکتی ہے۔



(شکل 18-7. گردشی تقسیم چارج جس کا کل ملاکر چارج صفر ہے)

ایک دوسرا تجربہ جو شکل 18-7. میں دکھایا گیا ہے زیادہ صاف طور سے مطلق گردشی فریموں کی پہچان کرتا ہے۔ ایک منفی نقطہ چارج میزان میں اپنے برابر کے مثبت کروی تقسیم چارج سے گھرا ہے اگر یہ نظام گردش میں ہے تو مثبت چارج دائری کرنٹ بناتے ہیں اور اس طرح پورے نظام میں ایک مقناطیسی گردشہ پیدا ہوجاتا ہے۔ اس لیے کرّے کے اندر اور باہر بھی B صفر نہیں ہوتا۔ ایک بار پھر ہمارے استحالہ قوانین غیر۔راست خطی حرکتوں کے لیے لاگو نہیں ہوتے۔ بلا عام اضافیت کی مدد کے اس مسئلہ پر ساکن اور گردشی دونوں فریموں میں ہم آہنگ بحث ممکن نہیں ہے[1] لیکن دیکھیے

(1.) L. I. Schiff, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 25, 391 (1939).

اس بات پر زور دینا ہوگا کہ ہمارے اس سے پہلے کے دلائل ہمیں بلا شبہ اجازت دیتے ہیں کہ مخصوص اضافیت کے ڈھانچے کے اندر سب میدانوں کا سب لارنز فریموں میں بیان کر سکیں چاہے ماخذ سرعتائے ہوں یا نہ ہوں۔

مجوزہ حوالے

Becker, Bergmann, Fock, Møller, Tolman. Landau Lifshitz کی کتابوں میں جن کی فہرست پہلے دی گئی ہے عمدہ تذکرے ملیں گے۔

اس موضوع پر میدان میں ایک ذرے کے رویے کے نقطہ نگاہ سے پہنچتے ہیں ان کے علاوہ ہم مندرجہ ذیل کتابوں کی فہرست بھی دینا چاہیں گے:

A. SOMMERFELD, *Electrodynamics*, Part III, Theory of Relativity and Electron Theory.
پروفیسر سومرفلڈ کے بجا طور پر مشہور نظریاتی طبیعیات پر لیکچروں کی تیسری جلد برقی حرکیات پر ہے۔

A. EINSTEIN *The Principle of Relativity* میں اصلی تحریر On the Electrodynamics of Moving Bodies کا ترجمہ

W. PAULI. *Relativitätstheorie*, Encyclopädie der Mathematischen Naturwissenschaften, Vol. V, 1921. یا خصوصی بازمطبوعہ۔ سے اب تک کے اس موضوع پر وسیع کلاسکی حوالے

مشق

1. اگر کسی ایک لارنز فریم میں E اور B عمودی ہیں تو وہ سب لارنز فریموں میں عمودی رہیں گے۔

2. اگر کسی ایک لارنز فریم میں $|E| > |cB|$ تو کسی دوسرے لارنز فریم میں $|E| > |cB|$ اور اس کا برعکس بھی ہوگا۔

3. اگر ایک لارنز فریم میں E اور B کے درمیان زاویہ حادہ ہے (یا منفرجہ) تو کسی دوسرے لارنز فریم میں یہ زاویہ حادہ (یا منفرجہ) ہوگا۔

4. اگر E اور B عمودی ہیں لیکن $|E| \neq |cB|$, تو ایک ایسا فریم ہوگا جس میں میدان یا تو خالص برقی ہوگا یا خالص مقناطیسی۔

5. اگر چارج کا ایک ذرّہ ایک مستوا میں ایک ایسے مقناطیسی میدان B کے عمودی حرکت کر رہا ہے جو وقت کے ساتھ نہیں بدلتا تو دکھائیے کہ خم خطی نیم قطر ρ اس سے ملتا ہے: $eB\rho = p$, جہاں p ذرہ کے تحرک (اضافیتی) کی جسامت ہے۔ اگر B فضا میں بھی مستقل ہے تو دکھایئے کہ حرکت ایک دائرہ میں ہوگی جو زاویائی تواتر

$$\omega = \frac{eB}{m} = \frac{eB}{m_0\gamma}, \qquad (18\text{-}72)$$

سے طے کیا جائے گا، جہاں m_0 ذرہ کی سکونی کمیت ہے اور $\gamma = m/m_0$.

باب 19

لینارڈ-ویشرٹ مضمر اور یکساں طور پر متحرک الکٹران کا میدان

جیسا ہم نے دیکھا ہے برق مقناطیسی نظریہ کے نتائج کو اخذ کرنے کے لیے ہم تغیر کی ریاضیاتی "مشینری" ایک طاقت ور اوزار ہے، لیکن تجربہ کے ساتھ موازنہ کرنے کے لیے حاصل ہوئے عبارات کا ترجمہ مشاہد کے عام مکان و زمان کے متغیروں میں کرنا ہوگا۔ اضافیتی نظریے کے آنے کے پہلے کلاسکی اشعاعی نظریہ کے زیادہ تر نتائج اخذ کیے جا چکے تھے، جہاں یہ مان لیا گیا تھا کہ مشاہد کا فریم وہ ہے جس میں میکسویل کے مساوات جائز ہیں۔ فارمولوں کی طبیعیاتی تفسیر کو مدنظر رکھ کر یہ سبق آموز ہوگا کہ ان میں سے کچھ اخذوں کو پھر سے حاصل کیا جائے خاص طور سے اب جب ہم نے اضافیتی نقطۂ نظر سے دیکھ لیا ہے کہ ان کا اطلاق اُس سے کہیں زیادہ عام ہے جو شروع میں سمجھا گیا ہوگا۔

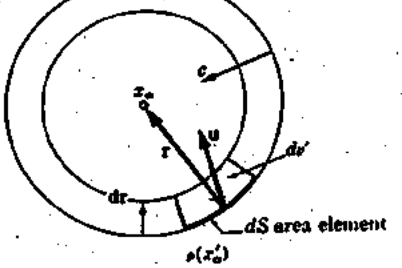
19-1 لینارڈ-ویشرٹ مضمر

الکٹران سے خارج ہوتے والی اشعاع کا حساب کرنے کے لیے آیئے ہم مساوات (14-24) اور (14-25) کے ابطا شدہ مضمروں کے اطلاق پر غور کریں۔ اب کلاسکی برقی حرکیات میں وہ اکیلی چیز جو ہمیں الکٹران کے متعلق معلوم ہے یہ ہے کہ اس کا کل چارج ایک خاص مقدار کا ہے، اور اس کے اشعاعی میدان کے کسی حساب میں اس طرح کی تفصیل شامل نہیں ہو سکتی کہ جیامٹریائی طور پر یہ چارج الکٹران کے اندر کسی طرح منقسم ہے۔ دوسری طرف بلا مختلف ریاضیاتی پھیلاؤ داخل کیے ہوئے یہ فرض کر لینا غیر ممکن ہے کہ الکٹرانی چارج کی جسمی وسعت صفر ہے۔

لیکن اشعاعی میدان کے کچھ پہلو الکٹران کے نیم قطر سے واقعی بے تعلق ہیں شرط صرف یہ ہے کہ وہ اشعاعی میدان کے دوسرے ابعاد کے مقابلہ میں چھوٹا ہو۔ الکٹران اور اس کے رویّہ پر اپنی بحث میں ہم یہ مان لیں گے کہ وہ ایک محدود نیم قطر رکھتا ہے لیکن ہم انہیں صفات کو طبیعیاتی اہمیت دیں گے جو نیم قطر کی لمبائی سے آزاد ہیں ایک استوار جسم کے نیم قطر کے معنی میں الکٹران کے محدود نیم قطر کا کوئی مطلب نہیں ہے۔ جیسا پہلے کہا جا چکا ہے ایک " استوار " ابعادی جسم اضافیتی لحاظ سے ایک خود۔ تضاد ہے۔ دوسری طرف دو امکانات کو خارج نہیں کیا گیا ہے (a) ایک ہم متغیری طور پر تعریف کیا گیا اسکیلر فاصلہ a وجود میں ہے اس طرح پر کہ ایک چار ویکٹر فاصلہ $|r - r'| > a$ کے اوپر سگنل ترسیل کیے جائیں تو برقی حرکیات (یا زیادہ عام کوانٹم برقی حرکیات) کے قوانین کی ترمیم کرنا ہوگی جو مانا جا سکتا ہے کہ ایک ہم متغیری میدانی تھیوری کے ڈھانچے کے اندر ہی ہوگی (یا اس کے کوانٹم مکانکی ہم مساوی ہیں) ز (b) کسی انقلابی قدر سے کم فاصلوں کے لیے اضافیت جائز نہیں رہتی۔ ایسا یقین کرنے کی کوئی وجہ نہیں ہے کہ اگلے باب میں متذکرہ " کلاسکی الکٹران نیم قطر " $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$ کا برقی حرکیات کے جائز ہونے کے لیے ایسی کسی ممکن منتہی قدر سے کوئی رشتہ ہے۔

اضافیت سے قبل سطلی مضمون کے تصور کا کسی ایسے نظام پر جس کا کل چارج معلوم ہو، اطلاق کرنے کے لیے بہت احتیاط برتنے کی ضرورت ہوا کرتی تھی۔ اگر $[\rho]$ وہ پس چارج کثافت ہے جسے مساوات (14-25) میں رکھنا ہے جس سے صحیح مضمر $\phi(x_0, t)$، مل سکے تو $\int [\rho]\, d\tau$ عام طور سے نظام کے کل چارج کو ظاہر نہیں کرتا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ اینٹگرینڈ $[\rho]\, d\tau$ میں شامل مختلف حصوں کی قیمتیں مختلف وقتوں پر لی گئی ہیں اور اس وقت کے دوران جب شکل 19-1 کا اطلاع حاصل کرنے والا کرہ تقسیم چارج کے اوپر سے ہو کر گزرتا ہے چارج اس طرح سے حرکت کر سکتے ہیں کہ اس تقسیم چارج کے مقابلے میں جو کل چارج کی صحیح قیمت دیتا ہے کم یا زیادہ ثقل کے معلوم ہوں۔ اسے اس عمل پر ایک تشریحی غور کے ذریعہ دکھایا جا سکتا ہے۔

شکل 19-1 کے کرہ پر غور کیجیے جو مشاہدہ نقطہ x_0 پر رفتار c، سے



(شکل 19-1. کرہ کا قطعہ dS جو رفتار u سے متحرک ایک چارج سے اطلاع حاصل کر رہا ہے۔)

مرکوز ہو رہا ہے اور مان لیجیے کہ وہ کسی نظام چارج پر سے گزرتے ہوئے اُس کے اندر چارج کثافت کے متعلق اطلاع حاصل کرتا ہے۔ اگر نظام چارج ایک اوسط رفتار کا جزو اُسی سمت میں رکھتا ہے جس میں مرکوزہ کرہ حرکت کر رہا ہے تو سطحی چارج کثافت کا حجمی اینٹگرل کل چارج سے زیادہ ہوگا۔ اگر تقسیم چارج ایک اوسط رفتار کا جز سکڑتے ہوئے کرہ کی رفتار کی اُلٹی سمت میں رکھتا ہے تو جو نتیجہ اینٹگرل دے گا وہ نظام کے کل چارج سے کم ہوگا۔

یہ مسئلہ ایسا ہی ہے جیسا کسی ملک کی آبادی کی مردم شماری۔ مان لیجیے کہ شمار کرنے والوں کا ایک گروہ "مرکزِ اطلاعات" کی سمت کو مخصوص رفتار سے جا رہا ہے اور سفر کرتا ہوا آدمیوں کو شمار کرتا جاتا ہے اور اس طرح آبادی کی کثافت معلوم کرتا ہے۔ مردم شماری کرنے والوں کی اطلاع کے مطابق پائے گئے میزان میں اور صحیح آبادی میں اختلاف ہوگا جو اس پر منحصر ہوگا کہ آیا کل ملا کر آبادی کا منتقلی کا رُخ مردم شماری والوں کی رفتار کی سمت میں تھا (جس حالت میں صحیح آبادی اُس سے کم ہوگی جس کی اطلاع دی گئی ہے) یا مردم شماری والوں کی مخالف سمت میں۔ اسی طرح سے ایک نزدیک آنے والے چارج سطحی مضمر مشاہد سے اسی فاصلہ پر واقع ایک دور جانے والے چارج کی بہ نسبت بڑا ہوگا کیوں کہ پاس آنے والا چارج اطلاع حاصل کرنے والے کرہ کے اندر زیادہ عرصہ تک رہتا ہے۔

آیئے ہم ایک الکٹران کے اشعاعی میدان پر غور کریں جس کی رفتار v کے

مقابلہ کی ہے ہم مان لیتے ہیں کہ ہمارا الکٹران ایک نظام ہے جس کے بارے میں ہم جانتے ہیں کہ (a) کل چارج e, ہے اور (b) ایک غیر واضح لیکن چھوٹے حجم کے اندر الکٹران کے چارج کے سب حصے باتنظیم رفتار $\mathbf{u}$. سے حرکت کر رہے ہیں۔ مان لیجیے کہ جہاں پر چارج ہے اس نقطہ سے ناظر نقطہ تک جس پر شکل 19-1 کا کرہ σ مرکز رو ہے نیم قطر ویکٹر $\mathbf{r}$ ہے ز r کرہ کے گزرنے کے وقت پر ناپی گئی نیم قطر کی "مبطی" قیمت ہے۔ اگر الکٹران ساکن ہے تو چارج کی وہ مقدار جو کرہ وقت، میں dr. سے سکڑنے پر پار کرے گا $[\rho]\, dS\, dr.$ ہوگا، برخلاف اس کے اگر $\mathbf{u}$ صفر سے مختلف ہے تو کرہ جو مقدار چارج پار کر لے گا وہ $[\rho]\, dS\, dr$ سے بمقدار $[\rho]\, dS(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}/r)\, dt$ کم ہوگا۔ اس لیے اطلاع حاصل کرنے کے اس طریقے سے معلوم کیے گئے چارج کی مقدار ہے:

$$de = [\rho]\, dv' - [\rho]\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}{r}\, dS\, dt. \qquad (19\text{–}1)$$

لیکن $dt = dr/c,$ اور $dS\, dr = dv',$ اس لیے

$$de = [\rho]\, dv' - [\rho]\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}{rc}\, dv'. \qquad (19\text{–}2)$$

مبطی چارج کثافت کے لیے حل کرنے پر ہم پاتے ہیں:

$$[\rho]\, dv' = \frac{de}{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}/cr}$$

یا

$$\frac{[\rho]\, dv'}{r} = \frac{de}{r - \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}/c}. \qquad (19\text{–}3)$$

مساوات (19–25) اور (19–24) کے مبطی مضمر اس طرح پر ہو جاتے ہیں:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{de}{r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}/c}, \qquad (19\text{–}4)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{u}\, de}{r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}/c}. \qquad (19\text{–}5)$$

اُس انتہائی حالت میں جب چارج ایک نقطہ ہے فاصلہ پر منحصر ارقام آہستہ آہستہ مٹتے ہیں اور چونکہ $\int de = e,$ الکٹران کا معلوم چارج ہے، لہذا ایک

نقطہ چارج کے مضمر یہ ہیں:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e}{r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}/c}\right], \qquad (19\text{-}6)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e\mathbf{u}}{r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}/c}\right]. \qquad (19\text{-}7)$$

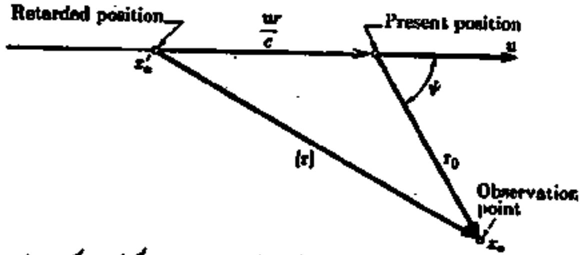
مساوات (19-6) اور (19-7) کو ایک واحد الکٹران کے لینارڈ۔ ولیشرٹ مضمر کہتے ہیں۔ دھیان رکھیے کہ یہ عبارات چارج کی وسعت سے آزاد ہیں اور اس لیے الکٹران کے کسی تفصیلی ماڈل پر بھی منحصر نہیں ہیں۔ درحقیقت یہ مساوات (18-21) ہی ہیں لیکن رفتار کا مطلب بالکل دوسرا ہے۔ یہاں رفتار چارج کی اپنے مبطی مقام میں اس مخصوص سمتی قدری فریم کی نسبت سے رفتار ہے جس میں اضافیتی نظریہ سے قبل یہ ماننا پڑا تھا کہ میکسویل کی مساوات جائز ہیں۔ باب 18 میں ہم نے دیکھا کہ رفتار مشاہد کی اس فریم کی اضافت سے رفتار ہے جس میں سگنل کے اخراج کے وقت چارج ساکن تھا۔ اگر ہم رفتار کی اس طرح پر مکرر تفسیر کریں تو متحرک چارجوں کے میدانوں کے سب تفصیلی حسابات جو اس مفروضہ کی بنا پر کیے گئے تھے کہ ایک ایسا فریم ہے جس میں لہر مساوات صحیح ہے ان کے مساوی ہیں جو برقی حرکیات کی ایک اہم متغیری شکل کے نتیجہ میں رونما ہوتے ہیں۔

19-2 مستقل رفتار سے حرکت کرنے والے چارج کے میدان

چونکہ کسی الکٹران کے "مبطی" مقام کا اُس کے موجودہ مقام سے رشتہ عام طور سے معلوم نہیں ہوتا، اس لیے لینارڈ۔ ولیشرٹ مضمروں کے ذریعہ میدانوں کی قیمتیں عام طور سے صرف چارجوں کے مبطی مقاموں اور رفتاروں کے لحاظ سے نکالی جا سکتی ہیں لیکن اگر حرکت یکساں ہے تو مضمروں اور میدانوں کو چارج کے "موجودہ" مقام کے لحاظ سے ظاہر کرنا ممکن ہے یعنی اُس وقت ، پر چارج کا مقام جب شکل 19-1 کا اطلاع حاصل کرنے والا کرہ مشاہدہ نقطہ پر سکڑ کر پہنچتا ہے۔

ایک الکٹران پر توجہ کیجیے جو مطابق شکل 19-2, کے یکساں رفتار سے

x- سمت میں حرکت کر رہا ہے۔ آیئے ہم الیکٹران کے موجودہ مقام کے لحاظ سے لینارڈ۔ ویشرٹ نسب نما $s = r - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})/c$ کی قیمت دریافت کریں۔



(شکل 19-2. ایک یکساں رفتار سے حرکت کرنے والے الیکٹران کے مضمر اور میدانی سمتی قدریں)

چونکہ شکل کی جیامٹری سے، $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{u} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ اس لیے اس کی آسانی سے تصدیق کی جا سکتی ہے کہ

$$s^2 = r_0^2 - \left(\frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{u}}{c}\right)^2. \qquad (19\text{–}8)$$

تب نسب نما s کا صریحی اظہار موجودہ مقامی سمتی قدروں $x_0, y_0, z_0,$ کے لحاظ سے یا r_0 اور u اور r_0: کے درمیان زاویہ ψ کے لحاظ سے کیا جا سکتا ہے:

$$s = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{u^2}{c^2}(y_0^2 + z_0^2)}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y_0^2 + z_0^2)}$$

$$= r_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}\sin^2\psi}. \qquad (19\text{–}9)$$

مساوات (19–6) اور (19–7) میں اسے رکھنے پر الیکٹران کے موجودہ سمتی قدروں کے لحاظ سے لینارڈ ویشرٹ مضمر مل جاتے ہیں۔

اس حالت میں میدانوں کا صریحی حساب آسانی سے لگایا جا سکتا ہے۔ برقی میدان یہ ہے:-

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad (14\text{-}1)$$

وقتی تفرّقی اخذ کی قیمت مکانی تفرّقی اخذ کی شکل میں یہ یاد رکھ کر نکالا جاسکتا ہے کہ میدان کو یکساں رفتار سے حرکت کرنے والا چارج ساتھ لے جاتا ہے۔ ایک ساکن مشاہد وقت $t + dt$ پر وہ میدان دیکھے گا جو وقت t پر اُس سے فاصلہ $-u\,dt$ سے ہٹے ہوئے مقام پر تھا۔ اس لیے وقتی تفرّقی اخذ کی جگہ یہ رکھا جاسکتا ہے:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u\frac{\partial}{\partial x}. \qquad (19\text{-}10)$$

مساوات (19-1) میں اس رشتہ کا استعمال کرنے سے برقی میدان کے اجزا محض یہ ہو جاتے ہیں:

$$E_x = \frac{ex_0}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right), \qquad (19\text{-}11)$$

$$E_y = \frac{ey_0}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right), \qquad (19\text{-}12)$$

$$E_z = \frac{ez_0}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \qquad (19\text{-}13)$$

اگرچہ A صرف x جز ہی رکھتا ہے، برقی میدان اپنے تینوں اجزا میں (نسب نما کو چھوڑ کر) متشاکل ہوتا ہے، دھیان رکھیے کہ میدان کی سمت الکٹران (منفی الکٹران کے لیے) کی "موجودہ" جگہ کی طرف ہوتی ہے نہ کہ "مبطیٰ" جگہ کی طرف۔ ویکٹر کی زبان میں برقی میدان اس عبارت سے ملتا ہے:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left[\mathbf{r} - \frac{\mathbf{u}r}{c}\right]_{ret}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{e\mathbf{r}_0(1 - u^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 s^3}$$

$$= \frac{e\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}\,\frac{(1 - u^2/c^2)}{[1 - (u^2/c^2)\sin^2\psi]^{3/2}}, \qquad (19\text{-}14)$$

جو صریحی طور پر میدان کی سمت بتاتا ہے۔

یکساں رفتار سے حرکت کرنے والے الکٹران کا مقناطیسی میدان = B

$\nabla \times \mathbf{A}$, کے ذریعہ حساب لگانے پر یہ ملتا ہے:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}_0}{s^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E}. \tag{19-15}$$

کم رفتاروں کے لیے $u \to 0, s \to r$, مساوات (19-14) اور (19-15) کولوم اور بیوسوار کے میدان بن جاتے ہیں۔ اونچی رفتاروں کے لیے $u \to c$, دونوں میدانوں کی جسامتیں اُس زاویہ پر منحصر ہوجاتی ہیں جو الکٹران کی حرکت کی سمت نصف قطر $\mathbf{r}_0$. سے بناتی ہے۔ مساوات (19-14) سے یہ دیکھا جائے گا کہ اس سمت میں جو حرکت کی سمت سے زاویہ قائمہ بناتی ہے میدان $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, کی نسبت سے بڑا ہوجائے گا جب کہ حرکت کی سمت میں میدان $(1 - u^2/c^2)$. کی نسبت سے کم ہوجائے گا۔ اس طرح پر بہت اونچی رفتاروں کے لیے میدان ہموار لہر کے میدان سے بتدریج زیادہ مشابہ ہوتا جاتا ہے۔ جب ایک تیز رفتار الکٹران مشاہد کے پاس سے ہوکر گزرتا ہے تو تھوڑے وقت کے لیے وہ ایک خالص عرضی برقی اور مقناطیسی میدان دیکھتا ہے۔ لیکن خیال رہے کہ ایک یکساں رفتار سے حرکت کرنے والا چارج اس معنی میں غیر اشعاعی ہوتا ہے کہ اس کا میدان توانائی کا خسارہ ظاہر نہیں کرتا، یہ مساوات (19-14) اور (19-15). سے ملے میدانوں کی مطابقت کے پوائنٹنگ ویکٹر کی سیدھی قیمت نکال کر دکھایا جا سکتا ہے۔

یہ فارمولے بجنسہٖ وہی ہیں جو ایک ساکن چارج کے میدانوں کے لارنز استحالہ سے جس میں رفتار پر کوئی پابندی نہ ہو، حاصل ہوتے ہیں (اس بیان کا ثبوت ایک مسئلہ کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے)۔ اضافیتی نظریے سے قبل ان نتائج کے اطلاق میں کافی احتیاط کی ضرورت پڑتی تھی اور یہ مفروضہ کہ مشاہد اُس مخصوص حوالے کے فریم کے لحاظ سے ساکن ہے جس میں میکسویل کے مساوات جائز مانے گئے تھے، نہایت دقت طلب ہوتا تھا۔ اضافیتی نظریے نے اس کی اس تفسیر کو جائز ثابت کر کے کہ وہ الکٹران اور مشاہد کی اضافتی رفتار ہے ان دقتوں کو دور کر دیا ہے۔

19-3 لہر مساوات کا سیدھا حل

یہ دیکھنا سبق آموز ہوگا کہ کس طرح

ایک یکساں رفتار سے حرکت کرنے والے چارج کے میدان کے متعلق ہمارے نتائج کو غیر متجانس لہر مساواتوں سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (14-7) اور (14-8) کو مساوات (14-3) کی معاون لارنز شرط کے تحت حل کرنا ہوگا۔ لازم ہے کہ یکساں رفتار سے حرکت کرنے والے الکٹران کا میدان الکٹران کے ساتھ عملی طور پر لے جایا جاتا ہے جس کا مطلب ہے کہ وقتی اور سمعانی تفرقی اخذ ایک دوسرے سے آزاد نہیں ہیں۔ اس حقیقت کو ریاضیاتی شکل میں مساوات (19-10) کو عام بنا کر کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\mathbf{u}\cdot\nabla. \qquad (19\text{-}16)$$

اس کا مطلب ہے کہ کسی دیے نقطے پر کوئی میدانی پیرامیٹر وقت dt میں اتنی ہی مقدار سے بدلتا ہے جتنا ایک خاص وقت پر اس کا فرق اسی میدانی پیرامیٹر سے ہوگا جس کی قیمت الکٹران کی حرکت کی سمت میں فاصلہ $-u\,dt$ پر لی گئی ہے۔
اب ہم غیر متجانس مساوات

$$\Box\psi(x_a, t) = -g(x_a) \qquad (14\text{-}11)$$

پر اس شرط کے تحت غور کریں گے کہ ماخذ چارج مستقل رفتار سے x- سمت میں حرکت کر رہا ہے اور اس طرح اس کا وقت پر صریحی انحصار نہیں ہے۔ تب مساوات (19-16) سے لہر مساوات یہ ہو جاتا ہے۔

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -g(x,y,z). \qquad (19\text{-}17)$$

اس مساوات کا استحالہ متغیروں کو بدل کر کیا جا سکتا ہے:

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{1-u^2/c^2}};\quad y_1 = y;\quad z_1 = z; \qquad (19\text{-}18)$$

جس سے یہ مندرجہ ذیل برقی سکونی پوآسان مساوات بن جاتا ہے:

$$\nabla_1^2\psi = -g(\sqrt{1-u^2/c^2}\,x_1, y_1, z_1), \qquad (19\text{-}19)$$

جس کا حل مندرجہ ذیل عام کولوم مضمر ہے :

$$\psi(x_{1_\alpha}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{g(x'_{1_\alpha})\, dt'_1}{r(x'_{1_\alpha}, x_{1_\alpha})} \qquad (19\text{-}20)$$

اگر ہم شروع کے متغیروں میں تبدیل کریں تو حل یہ ہو جاتا ہے :

$$\psi(x_\alpha) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{g(x'_\alpha)}{s}\, dt', \qquad (19\text{-}21)$$

جہاں (1)

$$s = \sqrt{(x - x')^2 + (1 - u^2/c^2)[(y - y')^2 + (z - z')^2]}. \qquad (19\text{-}22)$$

صریحی طور پر تب رفتار u, سے حرکت کرنے والے ایک چارج e کے لیے :

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s}, \qquad (19\text{-}23)$$

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{u}}{4\pi\epsilon_0 c^2 s}. \qquad (19\text{-}24)$$

مساوات (19-23) اور (19-24) وہی مضمر بتاتے ہیں جو لینارڈ۔ ویشرٹ عبارات سے حاصل کیے گئے تھے ۔ لیکن اس اقدم میں مطابقہ لہر کی ترسیلی رفتار اور موجودہ مسلئ مضمروں کے درمیان رشتہ کے بابت سوال نہیں اٹھتا، کیونکہ ایک مناسب استحالہ کے ذریعے ہم نے مساوات (19-11) کو جسے حل کرنا ہے سکونی مساوات (19-19) میں بدل لیا ہے، ظاہر ہے کہ مساوات (19-18) کا خاص ریاضیاتی عمل درحقیقت ایک لارنتز استحالہ جس میں ہم مشاہد کے مقام کا استحالہ ایسے فریم میں کر دیتے ہیں جو اس الکٹران کی بنسبت سے ساکن ہے جس کے میدان کا حساب لگانا ہے ۔

19-4 "رسم حملی مضمر" [illegible] convection ان میدانوں کی وجہ سے ایک دوسرے الکٹران پر جو رفتار u سے شروع کے میدان

---

(1) دھیان رکھیے کہ مساوات (19-22) میں $x - x'$ مساوات (19-9), کی موجودہ سمتی قدر x_0 سے مطابقت رکھتا ہے اور اسی طرح دوسری سمتی قدروں کے لیے بھی۔

پیدا کرنے والے الکٹران کی متوازی سمت میں حرکت کر رہا ہے، لگنے والی قوت ایسا مانا جا سکتا ہے کہ لارنٹز عبارت سے ملے گی :

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

اگر میدانوں کا حساب مساوات (19-23) اور (19-24) کے مضمروں سے نکالا جائے تو زور مندرجہ ذیل سے ملے گا :

$$\mathbf{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left[-\nabla\left(\frac{1}{s}\right) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{u}}{c^2 s} + \frac{\mathbf{u}}{c^2}\times\left(\nabla\times\frac{\mathbf{u}}{s}\right)\right], \quad (19\text{-}25)$$

جو ویکٹر ضرب کو پھیلانے سے یہ ہو جاتا ہے :۔

$$\mathbf{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{1 - u^2/c^2}{s}\right). \quad (19\text{-}26)$$

مساوات (19-26) کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے :

$$\mathbf{F} = -\nabla\psi, \quad (19\text{-}27)$$

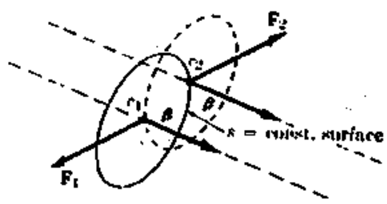
جہاں

$$\psi = \frac{e^2(1 - u^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 s} \quad (19\text{-}28)$$

جسے حملی مضمر کہتے ہیں۔ اس طرح ایک الکٹران کی وجہ سے دوسرے پر لگی قوت کو ایک اسکیلر مضمر میدان پیدا کرنے والے الکٹران کے گرد کروی تشاکل نہیں رکھتا۔ خاص طور سے چونکہ قوت سمت برابر حملی مضمر والی سطح کے عمودی ہونا چاہیے اس لیے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ وہ قوت جو (x_1, y_1, z_1) پر مقیم الکٹران e_1 دوسرے الکٹران e_2 پر جو (x, y_2, z_2) پر ہے۔ لگاتا ہے اس اپسائڈ کے عمودی ہوگا، جس کی عبارت مندرجہ ذیل ہے :۔

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (1 - u^2/c^2)[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]}$$
$$= \quad \text{مستقل} \quad (19\text{-}29)$$

جیسا شکل 19-3. میں دکھایا گیا ہے :۔



(شکل 19-3. عملی مظہر سے اخذ کی گئی دو نقطہ چارجوں کے درمیان قوت دکھائی گئی ہے)

دوسری طرف الکٹران e_1 پر لگنے والی ردّ عملی قوت F_1 ساتھ میں حرکت کرنے والے الکٹران e_2 کی نسبت سے بنے مطابقہ ایسا ئڈ کے عمودی ہوگا (جیسے شکل میں ٹوٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے)۔ اس لیے سوا اُس حالت کے جب الکٹرانوں کو جوڑنے والی لکیر حرکت کی سمت کے متوازی یا عمودی ہے عمل اور ردّ عمل کی قوتیں ہم خطی نہیں معلوم ہوتیں۔ اس لیے اگر دونوں الکٹران ایک سخت چھڑ سے جُڑے ہوں تو ایک جفت اُس دُھری کے گرد جو الکٹرانوں کو جوڑنے والی لکیر اور سمت حرکت سے ہے، مستوا کے عمودی ہے، کام کرے گا۔ ہم پہچان سکتے ہیں کہ یہ وہی ٹارک جس کی پیشین گوئی امپیر قانون کرتا ہے، جب متحرک چارجوں کی جگہ کرنٹ قطعے لے لیتے ہیں اور جسے ٹراوٹن اور نوبل نے ناپنے کی کوشش کی تھی۔ مشاہدہ کا نتیجہ صفر آنے سے پیدا ہوا تضاد اُن مشکلات کو ظاہر کرتا ہے جو قبلِ اضافیت برقی حرکیات کو متحرک چارجوں کی رفتار کی تفسیر میں پیش آتی تھیں۔

جس ٹارک کی یہاں پیشین گوئی کی گئی ہے وہ اس مشاہد کے لیے جو دونوں چارجوں کی اضافت سے رفتار u سے حرکت کر رہا ہے بالکل حقیقی ہے اور اگر کوئی میکانکی دشواریاں نہ ہوں تو اسے ناپا جا سکتا ہے۔ ہم پہلے ہی کہہ چکے ہیں کہ ایک "استوار" چھڑ کا مفروضہ اضافیتی نظریہ سے ہم آہنگ نہیں ہے۔ اضافیت کے جو معنی ہیں وہ یہ ہیں کہ میکانکی مقداریں انھیں استحالی قوانین کی پابند رہیں گی چاہیں ان کی بنیاد میکانکی ہو یا برقی۔ اس لیے وہ قوتیں جو الاسٹک زوروں سے حاصل ہوئی ہیں رفتار پر اسی طرح منحصر ہوں گی جس طرح کہ لارنز قوت سے تعلق رکھنے والی قوتیں۔

یہ پورا مسئلہ اُس مسئلے کے مشابہ ہے جس میں تارک زاویائی تحرک میں اضافہ سے متوازن ہو جاتا ہے۔ یہ بات واضح ہے کہ ایسے مشاہد کے لیے جو چارجوں کے ساتھ حرکت کر رہا ہے، وہ درحقیقت کرنٹ قطعے نہیں رہتے اور مشاہدہ کیا گیا تفاعل محض سکونی کولومب قوت ہوگا۔

19-5 خیالی فوٹان کا تصوّر

ہم نے دکھایا ہے کہ ایک تیز رفتار چارج کا برقی مقناطیسی میدان ایک ہموار لہر کے میدان کے قریب تر ہوتا جاتا ہے جیسے جیسے رفتار c کے قریب ہوتی جاتی ہے۔ اس مطابقت کو ایک مقداری طریقہ سے ظاہر کرنا نہایت دل چسپ ہے۔[1]

ایک گزرتے ہوئے چارج کی وجہ سے برقی مقناطیسی میدان وقت میں ایک پلس ہے جو میدان کی توانائی کی ایک تواتری تقسیم کے مساوی ہے۔ ظاہر ہے کہ اس تواتر اسپیکٹرم کا اینٹگرل چارج کے میدان کی کل توانائی ظاہر کرتا ہے۔ بلاشبہ جب تک چھوٹے فاصلوں پر یہ میدان "کاٹ" نہیں دیا جاتا یہ اینٹگرل توسیعی ہوگا۔

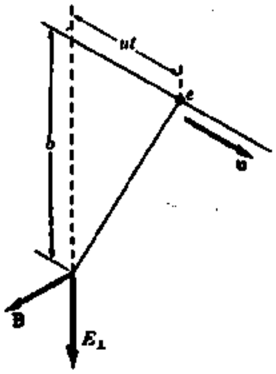
ہم پہلے برقی میدان کے اُس جزو کا جو رفتار u کے عمودی ہے، فوریئر تجزیہ کریں گے۔ مساوات (19-13) کے مطابق

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} E_\perp(t) = \frac{\gamma^{-2} b}{[(ut)^2 + \gamma^{-2}b^2]^{3/2}}, \qquad (19\text{-}30)$$

جہاں $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ اور b مشاہد اور ذرّہ کے خط حرکت trajectory کے درمیان فاصلہ ہے۔ دیکھیے شکل (19-4).

---

(1) چارج شدہ متحرک ذرّوں سے پیدا شدہ تفاعل اور واقع برقی مقناطیسی لہروں سے ہوئے تفاعل کے درمیان قریبی رشتہ پہ پہلے فرمی نے توجہ دی تھی E. Fermi, *Z. Physik* 29, 315 (1924).



(شکل 19-4. ایک متحرک الکٹران کے عرضی میدان کا حساب لگانے کے لیے)

اِس میدان کے فوریر اجزا اس سے ملتے ہیں :-

$$E_{\omega\perp} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_\perp(t)e^{i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{eb\gamma^{-2}}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{[(ut)^2 + \gamma^{-2}b^2]^{3/2}}\,dt$$

$$= \frac{e}{8\pi^2\epsilon_0 bu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega b/\gamma u)\xi}}{(\xi^2+1)^{3/2}}\,d\xi, \qquad (19\text{–}31)$$

جہاں $\xi = \gamma ut/b.$ اس کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے :-

$$E_{\omega\perp} = \frac{e}{4\pi^2\epsilon_0 bu}\left[\left(\frac{\omega b}{\gamma u}\right) K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma u}\right)\right], \qquad (19\text{–}32)$$

جہاں K_1 قسم دو کا بیسل فنکشن ہے جس کی دلیل خیالی ہے۔ فنکشن $K_1(x)$ کا $x = 0$ کے نزدیک رویّہ $1/x$ کی طرح ہے اور یہ اسیمپٹوٹی انداز سے e^{-x}. کی طرح صفر ہو جاتا ہے۔ اس لیے مساوات (19-31) کے تخمینہ کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے :-

$$E_{\omega\perp} = \frac{e}{4\pi^2\epsilon_0 bu}, \quad \omega < \gamma u/b,$$

$$E_{\omega\perp} = 0, \qquad \omega > \gamma u/b. \qquad (19\text{–}33)$$

یہ رشتہ کافی معقول ہے کیونکہ میدان کی عرضی سمت میں سکڑن کی وجہ سے موثر "گزرنے کا وقت" $b/\gamma u$. کے درجہ کا ہے۔

ایک برق مقناطیسی لہر میں آدھی توانائی برقی میدان اور آدھی مقناطیسی میدان لے جاتا ہے اس لیے کل توانائی یہ ہے :-

$$U = \epsilon_0 \int E_\perp^2 \, dv = \epsilon_0 \int \left(\int E_\perp^2 u \, dt \right) 2\pi b \, db. \qquad (19\text{–}34)$$

مساوات (14–45) میں ثابت کیے گئے مصدقہ کا استعمال کر کے ہم اس توانائی کو زیریں اجزا کے لحاظ سے اس طرح لکھ سکتے ہیں :

$$U = \int_0^\infty U_\omega \, d\omega = 4\pi\epsilon_0 u \int \left(\int_0^\infty |E_{\omega\perp}|^2 \, d\omega \right) 2\pi b \, db$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 u} \int_0^\infty \int_{b_{\min}}^{\gamma u/\omega} \frac{db}{b} \, d\omega, \qquad (19\text{–}35)$$

جہاں $b_{\min}$ کولوم میدان کے خاتمے کی نچلی قیمت ہے، اس لیے ہم مساوی ہموار لہر کے میدان کی تواتر کے لحاظ سے تقسیم توانائی یہ ہے :

$$U_\omega = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 u} \ln \left(\frac{\gamma u}{\omega b_{\min}} \right). \qquad (19\text{–}36)$$

ظاہر ہے کہ کلاسکی نظریے کے ڈھانچے کے اندر $b_{\min}$ کی وضاحت نہیں ہوتی۔

رشتہ $U_\omega \, d\omega = \hbar\omega N_\omega \, d\omega.$ کے ذریعہ مساوات (19–36) کو مرادف فوٹانون کی تعداد N_ω میں تبدیل کرنا دلکش رہے گا ہم $u \simeq c.$ لے لیتے ہیں تب :

$$N_\omega \, d\omega = (2\alpha/\pi) \ln (\gamma c/\omega b_{\min}) \, (d\omega/\omega), \qquad (19\text{–}37)$$

جہاں $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \sim 1/137$ باریک بناوٹ مستقلہ ہے۔

الکٹرانوں یا دوسرے ایسے ذرّوں کے وسیلے سے جن کا عمل دراصل اُن کے برقی مقناطیسی میدان کے ذریعہ ہوتا ہے، ہونے والے عملوں کے امکان کا رشتہ ان عملوں کے امکان سے جوڑتے ہیں جو برق مقناطیسی اشعاع کے وسیلے

سے ہوتے ہیں مساوات (19-37) بہت مفید ہے۔ مان لیجیے کہ مقدار حرکت $\mathbf{p}_1$ کا ایک الکٹران اس طرح عمل کرتا ہے کہ عمل کے بعد اس کا تحرک $\mathbf{p}_2$ ہو جاتا ہے۔ اس قریبی حساب کو جائز بنانے کے لیے ہمیں یہ مان لینا ہوگا کہ تحرک اور توانائی میں تبدیلیاں ابتدائی توانائی کے مقابلے میں کم ہیں۔ کوانٹم میکانکی لحاظ سے تب b_{min} اس فاصلہ کے برابر درجہ کا ہے جس سے کم کے لیے الکٹران کے مقام کا تعین اصول غیر یقینیت کے مطابق نہیں ہو سکتا یعنی $b_{min} \sim \hbar/|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|$۔ اس لیے زیر غور عمل میں جذب ہوئے فوٹانون کی تعداد N_ω ہے۔

$$N_\omega \, d\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{A\gamma c}{\omega\hbar} |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|\right) \frac{d\omega}{\omega}, \qquad (19\text{–}38)$$

جہاں A ایک مستقلہ ہے جس کی قیمت اکائی درجہ کی ہے۔ چونکہ $\hbar\omega = E_1 - E_2$، جہاں E_1 اور E_2 تحرک $\mathbf{p}_1$ اور $\mathbf{p}_2$ کے مطابقت کی توانائیاں ہیں اور چونکہ $\gamma = E_1/m_0c^2$، اس لیے ہم پاتے ہیں کہ

$$N_\omega \, d\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \ln\left[A\left(\frac{E_1}{m_0c^2}\right) \frac{|c\mathbf{p}_1 - c\mathbf{p}_2|}{E_1 - E_2}\right] \frac{d\omega}{\omega} \qquad (19\text{–}39)$$

یہ فارمولہ فوٹانون کے وسیلہ سے اور الکٹرانوں کے وسیلہ سے کیے گئے عملوں کے درمیان واقعی تجرباتی پیرامیٹروں کے لحاظ سے رشتہ قائم کرنے کے لیے ایک اعدادی بنیاد مہیا کرتا ہے۔ عددی جز $2\alpha/\pi = 0.00464$ دکھاتا ہے کہ فی الکٹران ہم مساوی فوٹانوں کی تعداد تھوڑی ہے۔

مجوّزہ حوالے

ہمارا تذکرہ اس کتاب کے سیکشن 11 کے متوازی ہے R. Becker, *Theorie der Elektrizität*, Band II.

L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields.*

لینارڈ ویشرٹ مضمروں کو چار- ابعادی ٹینسر تشکیل سے اخذ کیا گیا ہے۔ چہار- مضمر کے لیے تفرقی مساوات کو مخلوط مستوا میں انٹگریشن

سے حل کیا ہے :

A. SOMMERFELD, *Electrodynamics.*

J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory.*

لہر مساوات کے مخلوط اینٹگریشن کی دوسری پیش کش۔ سومرفلڈ نے بتایا ہے کہ یہ طریقہ 1904, میں G. Herglotz) نے اضافیتی نظریے سے قبل ریاضیاتی خوبصورتی کے خیال سے نکالا تھا۔

مشق

.1 ۔ ساکن کولوم میدان کے لارنز استحالہ کے ذریعہ ایک مستقل رفتار سے حرکت کرنے والے چارج کے میدان کے لیے ایک عام اظہار حاصل کیجیے۔ اس بیان کو کہ حرکت کے سمت میں میدان میں تخفیف ہوجاتی ہے۔ آپ مساوات (18–40). سے کس طرح ہم آہنگ کرسکتے ہیں جس کے مطابق $E_{\parallel} = E_{\parallel}'$

.2 ۔ شکل 19-3 کے چارجوں پہ لگنے والے ٹارک کو حملی مضر کے ذریعہ اخذ کیجیے اور جواب کو اس ٹارک سے ملائیے جو باب .15 میں معلوم کی گئی تھی ۔

باب 20

سُرعتائے چارج سے شعاع ریزی

اب ہم ایک چارج e کے میدانوں پر اُس عام حالت کے لیے غور کریں جس کے لیے مان لیا گیا ہے کہ ابطاشدہ مقام بطور ابطا شدہ وقت کے فنکشن کے دیا ہوا ہے۔ دوسرے لفظوں میں $z(t')$ معلوم ہے جبکہ t' وہ وقت ہے جس پر ایک رفتار c سے ترسیل ہونے والا سگنل z پر اس طرح خارج ہوا کہ وہ وقت t پر z پر پہنچے، دھیان رکھیے کہ اس بیان کا مطلب ہے کہ اخراج کے وقت t' اور میدانی نقطہ پر اس کے پہنچنے کے وقت t کے درمیان رشتہ قائم کرنے کے لیے ایک واضح طریقہ موجود ہے۔ اضافیتی نظریہ سے پہلے محض یہ مان لیا جاتا ہے کہ مسئلہ کو اُس فریم میں حل کیا گیا ہے جس کے لیے c پر مشتمل لہر مساوات جائز ہے اور اس لیے t اور t' آپس میں c کے ذریعہ مربوط ہیں، اضافیت اس تشکیل کو وسیع کر کے سب فریموں کے لیے جائز قرار دیتی ہے۔ دوسرا مزید فرق کلاسیکی اور اضافیتی تشکیلوں میں تصوراتی ہے، کلاسیکی طبیعیات میں یہ مان لیا جاتا ہے کہ ہمہ گیر وقتی پیمانہ موجود ہے جس سے t' اور t کے درمیان رشتہ کی آزادانہ تصدیق کی جا سکتی ہے۔ اس لیے اس مفروضہ کی صداقت کی کہ کوئی فریم واقعی وہ فریم ہے جس کے لیے لہر مساوات صحیح ہے۔ آزادانہ طور سے تصدیق کی جا سکتی ہے۔ اضافیت اس مفروضہ کو نہیں مانتی۔ علاوہ بریں جیسا باب 19 میں ہے ہمیں دونوں حالتوں میں رفتار u کے معنی پر دھیان دینا ہوگا۔ کلاسیکی نظریہ میں u ماخذ

نقطہ کی رفتار اس فریم میں ہے جس میں لہر مساوات جائز ہے مخصوص اضافیت میں u کسی استمراری فریم میں رفتار ہے۔ ہم سارے حسابات سہ ابعادی زبان میں کریں گے جس سے نتائج کی آسانی سے تعبیر ہوسکے۔ میدانوں کے لیے ایک ہم متغیری عبارت باب 21 [مساوات (98-21)] میں دی گئی ہے۔

20-1 سرعتائے چارج کے میدان

آیئے ہم ایک چارج e کے جس کے لیے $x_a(t')$ دیا ہوا ہے مکمل برقی اور مقناطیسی میدانوں کا حساب نکالیں۔ اس طرح چارج کی رفتار اور اسراع کی ابطاشدہ قیمتیں:

$$u_a = dx'_a/dt', \qquad \dot{u}_a = d^2x'_a/dt'^2, \tag{20-1}$$

بھی معلوم ہوجاتی ہیں۔ ویکٹری رسم میں

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt'} = -\mathbf{u}, \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2} = \dot{\mathbf{u}}. \tag{20-2}$$

لینارڈ۔ ویشرٹ مضمر نیچے دیے عام فارمولا سے ملتے ہیں :-

$$\phi(x_a, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{s}, \tag{19-6}$$

$$\mathbf{A}(x_a, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{u}}{s}, \tag{19-7}$$

جہاں $s = r - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})/c$ میدانی نقطہ اور ابطاشدہ ماخذ نقطہ دونوں کی سمتی قدروں کا فنکشن ہے۔ میدانی اور ماخذ نقطہ کے متغیرات مندرجہ ذیل ابطاشدہ شرط کے ذریعہ رشتہ رکھتے ہیں :

$$r(x_a, x'_a) = [\sum(x_a - x'_a)^2]^{1/2} = c(t - t'). \tag{20-3}$$

جب ہم میدانوں E اور B کو مساوات (6-19) اور (7-19) کے مضمروں سے حسب معمول

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

کے ذریعہ اخذ کرتے ہیں تو ہمیں یہ دیکھنا ہوگا کہ ویکٹر آپریٹر ∇ کے اجزا ایک مستقل وقت t پر جزوی تفرقی اخذ ہیں اور اس لیے وقت t' پر نہیں ہیں۔ x_a کے لحاظ سے جزوی تفرقی اخذ لینے سے بہ یک وقت ہمسایہ نقطوں کے مضمروں کا موازنہ ہوتا ہے لیکن یہ مضمر سگنل چارج سے مختلف وقتوں پر پیدا ہوئے۔ اسی طرح t کے لحاظ سے جزوی تفرقی اخذ کا مطلب ہے مستقل x_a اور اس لیے یہ ایک دیے میدانی نقطہ پر مضمروں کا موازنہ ایک ایسے وقتی وقفہ کے لیے بتاتا ہے جس کے دوران ماخذ کی سمتی قدریں بدل گئی ہوں گی چونکہ وقتی تبدیلی صرف t' کے لحاظ سے ہی دی گئی ہے (مسئلہ کے بیان میں شروع میں) ہمیں $\partial/\partial t|_{x_a}$ اور $\nabla|_{t}$ کا استحالہ ایسی عبارتوں میں کرنا ہوگا جو $\partial/\partial t'|_{x_a}$ کے لحاظ سے ہوں جس سے ہم میدانوں کا حساب لگا سکیں۔ یہ عمل اس لیے ضروری ہے کہ ماخذ چارج سرعتائے ہونے کی حالت میں عام طور سے مضمروں کو صرف "موجودہ مقام" کے لحاظ سے ظاہر کرنا غیر ممکن ہوتا ہے جیسا ہم نے مستقل حرکت کی حالت میں کیا تھا۔

تفرقی اخذوں کی دریافت طلب تحویل حاصل کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ چونکہ x_a', t' کا ایک دیا ہوا فنکشن مان لیا گیا ہے ہمیں مساوات (20-3) سے ملتا ہے:

$$r[x_a, x_a'(t')] = f(x_a, t') = c(t - t'), \qquad (20\text{-}4)$$

جو t, x_a اور t' کے درمیان ایک فنکشنی رشتہ ہے۔ $\partial/\partial t$ کا $\partial/\partial t'$, کے ساتھ رشتہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف اس رشتہ میں x_a کو مستقل رکھنا ہے اور یہ دھیان رکھنا ہے کہ:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t'}\right)_{x_a} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r}. \qquad (20\text{-}5)$$

تب

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r}\frac{\partial t'}{\partial t}, \qquad (20\text{-}6)$$

یا

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}/rc} = \frac{r}{s}. \qquad (20\text{-}7)$$

اس لیے

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{r}{s}\frac{\partial}{\partial t'} \qquad (20\text{-}8)$$

وقتی تفرقی اخذوں کے دریافت طلب استحالہ ہے، اسی طرح سے ویکٹر آپریٹر ∇ کے لیے،

$$\nabla r = -c\nabla t' = \nabla_1 r + \frac{\partial r}{\partial t'}\nabla t' = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}}{r}\nabla t', \qquad (20\text{-}9)$$

جہاں ∇_1 سے ہمارا مطلب مساوات (20-4) میں دیئے فنکشن f کی پہلی دلیل کے لحاظ سے تفرقی ہے۔ یعنی ایک مستقل الطاشدہ وقت t پر تفرق ہے اس لیے مساوات (20-9)، سے

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{r}}{sc}, \qquad (20\text{-}10)$$

اور عام طور سے

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{\mathbf{r}}{sc}\frac{\partial}{\partial t'}. \qquad (20\text{-}11)$$

مساوات (20-8) اور (20-11) تفرقی آپریٹروں کے میدانی نقطہ کے سمتی قدروں سے اشعاع کار نقطہ کی سمتی قدروں میں تبادل کے لیے درکار رشتے ہیں۔ اس لیے برقی میدان کا لینارڈ۔ ویشرٹ مضمروں کے ذریعے حساب بہ ہو جاتا ہے۔

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e}\mathbf{E} = \frac{1}{s^2}\nabla s - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{u}}{sc^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\nabla_1 s - \frac{\mathbf{r}}{cs^3}\frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{r}{s^2c^2}\dot{\mathbf{u}} + \frac{r\mathbf{u}}{c^2s^3}\frac{\partial s}{\partial t'}. \qquad (20\text{-}12)$$

$\nabla_1 s = \mathbf{r}/r - \mathbf{u}/c$ کا اور مساوات (20-5)، کا استعمال کرکے اور رقموں کو اکٹھا کرکے ہم پاتے ہیں کہ $\dot{\mathbf{u}}$ پر مشتمل دونوں رقمیں مل کر ایک

ویکٹر تہرا ضرب بن جاتی ہیں، جس سے

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e}\mathbf{E} = \frac{1}{s^3}\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2 s^3}\left\{\mathbf{r}\times\left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c}\right)\times\dot{\mathbf{u}}\right]\right\}. \quad (20\text{–}13)$$

اسی طرح سے

$$\frac{4\pi\epsilon_0 c^2}{e}\mathbf{B} = \nabla\times\frac{\mathbf{u}}{s} = -\frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{u}}}{cs^2} + \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{r}}{s^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}}{rc} + \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{u}}}{cs^2} + \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{r}}{s^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{r}}{s^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{1}{cs^3}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left\{\mathbf{r}\times\left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c}\right)\times\dot{\mathbf{u}}\right]\right\}. \quad (20\text{–}14)$$

مساوات (20-13) سے موازنہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ،

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{E}}{rc}. \quad (20\text{–}15)$$

اس لیے مقناطیسی میدان ہمیشہ E کے اور ابطاشدہ نصف قطر ویکٹر r کے عمودی ہوتا ہے۔

برقی میدان دو علیحدہ حصوں پر مشتمل ہے۔ مساوات (20-13) کی پہلی رقم بڑے فاصلوں پر $1/r^2$ کے حساب سے بدلتی ہے اور شکل میں بالکل وہی ہے جو ایک یکساں رفتار سے حرکت کرنے والے چارج کے "حملی" میدان کی ہے۔ ہم $\mathbf{r}_u = \mathbf{r} - r\mathbf{u}/c$ کو "خیالی موجودہ نصف قطر ویکٹر" کہہ سکتے ہیں یعنی وہ مقام جس پر چارج "موجودہ وقت" پر ہوتا اگر وہ نقطہ t' سے یکساں رفتار سے چلتا رہتا ہے (دیکھیے شکل (20-1). $\mathbf{r}_u$ کے لحاظ سے $1/r^2$ میدان محض یہ ہے:

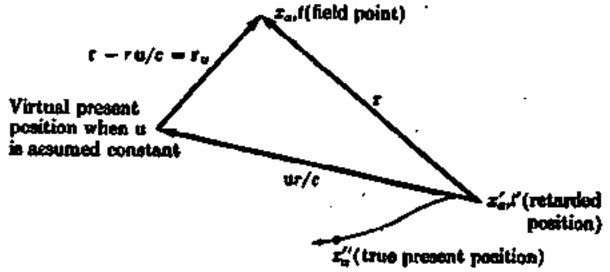
$$\mathbf{E}_{\text{induction}} = \frac{e\mathbf{r}_u}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right), \quad (20\text{–}16)$$

جو بجنسہٖ وہی ہے جو ایک یکساں رفتار کے چارج کے لیے مساوات (19-14) ہے۔ یہ اس قریبی۔ سکونی یا تغلیبی میدان کے مشابہ ہے جس پر ہم نے باب

14 میں بدلنے والے کرنٹوں اور چارج نظاموں سے خارج اشعاع کے سلسلہ میں بحث کی تھی۔ مساوات (20-16) ایک غیر اشعاعی رقم اس معنی میں ظاہر کرتا ہے کہ ایک انتہائی دور سطح پر توانائی کے بہاؤ میں اس کا کوئی حصّہ نہیں ہے۔ اگر چارج سُرعتی ہے تو میدان نہ تو سکونی ہے اور نہ عملی اور میدانی توانائی میں سب ملا کر کچھ تبدیلی ہوگی جسے مہیا کرنا ہوگا۔ یہ توانائی کا خسارہ صرف اس باہری قوت پر ایک ردِّ عمل عائد کرے گا جو الکٹران کی حرکت کے لیے ذمّہ دار ہے۔ ہم اگلے باب میں اس ردِّ عملی قوت پر پھر تفصیلی غور کریں گے۔

مساوات (20-13) کی دوسری رقم:

$$\mathbf{E}_{\text{radiation}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}_u\times\dot{\mathbf{u}}), \qquad (20\text{–}17)$$



(شکل 20-1. ایک من مانی حرکت کرنے والے چارج کے میدان کے لیے مقامی پیرامیٹر)

درجہ $1/r$ کی ہے اور اس لیے بلاشبہ ایک اشعاعی میدان ظاہر کرتی ہے اس معنی میں کہ وہ ایک بڑے کرّے کی سطح سے ہو کر توانائی فلکس میں حصّہ لیتی ہے۔ مساوات (20-14) کے لیے بھی اس قسم کے دلائل لاگو ہوتے ہیں۔ آیئے ہم اس اشعاعی میدان کی کچھ اہم خصوصی حالتوں پر غور کریں۔

20-2 کم رفتار پر شعاع ریزی

اُس حالت میں جب کہ رفتار اس قدر کم ہے کہ u/c اکائی کے مقابلے ناقابلِ لحاظ ہے $\mathbf{r}_u \simeq \mathbf{r}$، اور $s \simeq r$، اس لیے

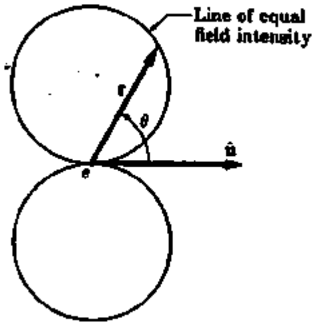
$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{u}}), \qquad (20\text{–}18a)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2}\,\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}. \qquad (20\text{–}18b)$$

مساوات [20-18a, b] ایک ایسا میدان ظاہر کرتے ہیں جو شکل میں [مساوات (14-82)] کے مماثل ہے جو ایک اشعاعی برقی دو پول ہوتا ہے جس کا گردشہ $\dot{u}e/\omega^2$. کے برابر ہوتا ہے۔ اس لیے اشعاع کی توانائی کی زاویائی تقسیم محض $\sin^2\theta$ تقسیم ہے جس پر سیکشن 14-7 میں بحث ہو چکی ہے (دیکھیے شکل (20-2).)

سرعتائے چارج کی توانائی کے خسارے کو معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (20-18) کے مطابق پوائنٹنگ ویکٹر کا انٹیگرل ایک کرہ پر لیتے ہیں اور یہ پاتے ہیں: (1)

$$-\frac{dU}{dt'} = \frac{e^2\dot{u}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \qquad (20\text{–}19)$$



(شکل 20-2. ایک کم رفتار کے الکٹران کے اشعاعی میدان کی زاویائی تقسیم تصویر $\dot{u}$ کی دھری کے گرد متشاکل ہے)

20-3 وہ حالت جس میں $\dot{u}$ متوازی u کے ہے
اگر $\dot{u}$ اور u. ایک ہی سمت میں ہوں تو

(1) گاسی اکائیوں میں (دیکھیے ضمیمہ 1)

$$\frac{-dU}{dt'} = \frac{2e^2\dot{u}^2}{3c^3}.$$

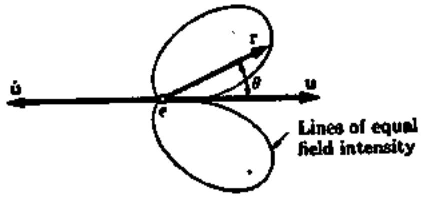
اس باب میں اور اس کے بعد والے ابواب میں شرح اشعاع کے سب مساوات اس طرح لکھے گئے ہیں کہ ان کو $\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)_{\text{mks}} = (e^2)_{\text{Gaussian}}$. رکھنے سے گاسی اکائیوں میں لایا جا سکتا ہے

u کے چھوٹے ہونے پر بھی اشعاعی میدان محض یہ ہوتے ہیں :

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3}\, \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}), \qquad (20\text{–}20a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3}\, \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}. \qquad (20\text{–}20b)$$

مساوات (20-20) کم رفتار کے الکٹران (ذوپول) والے مساوات (20-18) کی حالت سے صرف جزو $r^3/s^3 = [1 - (u/c)\cos\theta]^{-3}$ میں مختلف ہے۔ اس جز کا کیفی اثر اشعاعی توانائی کے اخراج کا آگے کی سمت میں اضافہ کرنا ہے جیسا شکل 20-3. میں دکھایا گیا ہے :



شکل 20-3. ایک الکٹران کے اشعاعی میدان کا خاکہ جس کا منفی اسراع حرکت کی سمت میں ہے۔ (u اہم ہے c کے -)

اشعاع کے ذریعہ خارج توانائی کی زاویائی تقسیم کا مقداری حساب کرنے کے لیے پہلے احتیاط سے یہ دیکھنا ہے کہ چارج کی "اشعاع کی شرح" کا کیا مطلب ہے۔ یہ توانائی کی وہ مقدار ہے جسے الکٹران سگنل کے اخراج کے دوران ایک وقتی وقفہ dt' میں کھوتا ہے یعنی خود الکٹران کی توانائی ضائع کرنے کی شرح dU/dt' ہے۔ ایک دیے ہوئے میدانی نقطے پر پوائنٹنگ ویکٹر N اکائی وقت میں توانائی کا وہ بہاؤ ظاہر کرتا ہے جو t پر ناپا گیا ہے۔ اس لیے مساوات (20-7) کا استعمال کرکے کسی دیے ہوئے ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں ہوکر الکٹران کی توانائی ضائع ہونے کی شرح اس سے ملتی ہے :

$$-\frac{dU(\theta)}{dt'}\, d\Omega = |\mathbf{N}|\frac{dt}{dt'}\, r^2\, d\Omega = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}|\frac{dt}{dt'}\, r^2\, d\Omega$$

$$= \epsilon_0 c E^2 r^2 \frac{dt}{dt'} d\Omega = \epsilon_0 c E^2 \frac{s}{r} r^2 d\Omega, \qquad (20\text{–}21)$$

اس لیے خسارہ توانائی کی سمتی شرح سرعتا کے الکٹران کے لیے ہوتی ہے :

$$-\frac{dU(\theta)}{dt'} = \frac{\dot{u}^2}{c^3}\left(\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{\sin^2\theta}{[1-(u/c)\cos\theta]^5}. \qquad (20\text{–}22)$$

تصحیح s/r کی طبیعیاتی نقطہ سے تفسیر اس طرح کی جاسکتی ہے۔ الکٹران سے وقت dt' میں خارج ہوئی توانائی دو کروں کے درمیانی حجم میں مقیم ہے جن میں سے ایک کا نقطہ $(x_0')_2$ کے گرد نیم قطر r ہے اور دوسرے کا ایک نقطہ $(x_0')_1$ کے گرد جو ماخذ کے دوسرے مقام سے فاصلہ $u\,dt'$ پر ہے، نیم قطر $r + c\,dt'$ ہے، جیسا شکل 20-4. میں دکھایا ہے۔ اس حجم کے ایک قطعہ dv پر غور کیجیے جو $(x_0')_2$. پر ایک ٹھوس زاویہ $d\Omega = dS/r^2$ گھیر رہا ہے — چونکہ

$$dr = c\,dt' - [(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})/r]\,dt',$$

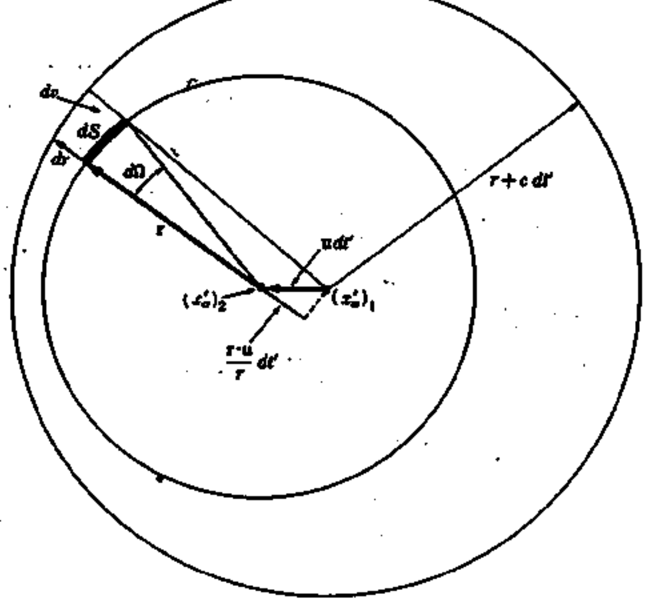
$$dv = dS\,dr = dS\left(c - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}{r}\right)dt' = \frac{cs}{r}\,dS\,dt'. \qquad (20\text{–}23)$$

اس لیے توانائی $dU\,d\Omega$، جو اس حجم میں ٹھوس زاویہ $d\Omega$ کے اندر واقع ہے یہ ہے :

$$dU\,d\Omega = \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2}\,\frac{cs}{r}\,dS\,dt' = \epsilon_0 E^2 \frac{cs}{r}\,dS\,dt' \qquad (20\text{–}24)$$

جو مساوات (20-21) سے اتفاق کرتی ہے۔

مساوات (20-20) اور (20-21) کا زیادہ تر اطلاق ایسے الکٹران سے خارج اشعاع کا حساب لگانے کے لیے کیا جاتا ہے جس کا اسراع منفی ہو۔ اس تخمینہ میں یہ مان لیا جاتا ہے کہ حرکت کی سمت نہیں بدلتی منفی اسراع کی اشعاع کو bremsstrahlung. کہا جاتا ہے۔ ایک درست کلاسکی حساب کے لیے یہ ضروری ہوگا کہ اس شے کی، جس سے الکٹران ٹکراتا ہے، روکنے کی قوت کا استعمال کرکے مساواتوں میں اسراع کی وقت کے



(شکل .20-4 ایک الکٹران سے $(x_e')_1$ سے $(x_e')_2$ تک حرکت کرنے کے دوران اشعاع کے ذریعہ خارج توانائی کا قیام)

ساتھ ہوئی، صحیح تبدیلی کو رکھا جائے۔ بحث کو آسان بنانے کے لیے آیئے ہم مان لیں کہ جب رفتار u_0 سے صفر تک گھٹتی ہے $\dot{u}$ مستقل رہتا ہے۔ یہ ایک حاصل پلس دیتا ہے جس میں اشعاع کی شکل میں خارج توانائی یہ ہے:

$$dU = \frac{-e^2 \sin^2 \theta\, \dot{u}}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \int_{u_0}^{0} \frac{\dot{u}\, dt}{(1 - u/c \cos\theta)^5}\, d\Omega,$$

$$-dU = \frac{e^2 \sin^2 \theta\, \dot{u}}{64\pi^2 \epsilon_0 c^2 \cos\theta} \left\{ \frac{1}{[1 - (u_0/c)\cos\theta]^4} - 1 \right\} d\Omega. \quad (20\text{-}25)$$

اس طرح پلس کی پوری زاویائی تقسیم بھی حرکت کی سمت میں آگے کو جھک جاتی ہے۔ اشعاع تقطیب شدہ ہوتی ہے جس میں برقی ویکٹر اس مستوا میں ہوتا ہے جس کا تعین نصف قطر ویکٹر اور منفی اسراع کی سمت

سے ہوتا ہے۔ مساوات (20-25) کا استعمال ایک کم وولٹ کے ایکسرے ٹیوب کی کلیہ کار پردازی کا تخمینہ کرنے کے لیے کیا جا سکتا ہے لیکن عمل میں باہر جانے والی اشعاع کی زاویائی تقسیم اور تقطیب دونوں میں نشانہ جسم کے اندر الکٹرانوں کے انتشار سے بہت ترمیم ہو جاتی ہے۔

اشعاعی میدان کے فوریر تجزیہ سے باہر نکلنے والی اشعاع کا تواتری اسپیکٹرم حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آئیے سہولت کے لیے یہ مان لیا جائے کہ ایک بہت چھوٹے وقت $\Delta t'$ میں رفتار کی تبدیلی Δu ہوتی ہے اور یہ کہ $u \ll c$. اگر اشعاع کا اخراج وقت t_0 پر ہوتا ہے تو اس چھوٹے وقت وقفہ کے دوران لہر کے میدان کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$E(t) = \frac{e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{\Delta u}{\Delta t'} = \frac{e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \Delta u \, \delta(t - t_0), \qquad (20\text{–}26)$$

جس میں ہم نے $\dot{u}$ کو ایک δ فنکشن کی شکل میں ظاہر کیا ہے:

$$\dot{u} = \delta(t - t_0)\, \Delta u, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}\, dt = \Delta u.$$

اگر ہم

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

رکھ دیں تو

$$E_\omega = \frac{1}{2\pi} \int E(t) e^{i\omega t}\, dt = \frac{e \sin \theta\, \Delta u}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2 r} e^{i\omega t_0}, \qquad (20\text{–}27)$$

جو فیز کو چھوڑ کر ω سے آزاد ہے۔ اب توانائی کا پورا خسارہ اس وقت کے دوران جس میں رفتار کی تبدیلی ہوتی ہے پوائنٹنگ ویکٹر کا اینٹگرل ایک کرے کی سطح پر لینے سے ملتا ہے۔ $u \ll c$ کے لیے:

$$-U = \int -\frac{dU}{dt'} dt' = \epsilon_0 c \iint_{-\infty}^{\infty} E^2\, dt\, dS. \qquad (20\text{–}28)$$

تب توانائی کے خسارے کا تواتر اس میدان کی مطابقت سے جس کے فوریر اجزا E_ω ہیں، سیکشن 14-4. کی طرح حاصل کیا جاتا ہے:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2\,dt = 4\pi \int_0^{\infty} |E_\omega|^2\,d\omega \qquad (20\text{-}29)$$

جو مساوات (14-45) سے آجاتا ہے، اس لیے ایک تواتری چوڑائی $d\omega$ کے لیے توانائی کا خسارہ یہ ہے

$$-U_\omega\,d\omega = 4\pi\epsilon_0 c \int_S |E_\omega|^2\,dS\,d\omega. \qquad (20\text{-}30)$$

ہمارے مخصوص اسپیکٹرم مساوات (20-27) کے لیے

$$-U_\omega\,d\omega = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (20\text{-}31)$$

مساوات (20-31) سے ظاہر ہوتا ہے کہ تابانی کا اسپیکٹرم ایک تواتری پیمانہ پر مستقل ہے۔ کسی نقطہ سے بھی اونچے ω کی طرف اسپیکٹرم کا پھیلاؤ صرف اس وجہ سے ہے کہ سہولت کے خیال سے تصادم کا وقت صفر مان لیا گیا ہے؛ ایک محدود تصادمی وقت کے لیے فوریر تجزیہ از خود بہت اونچے تواتروں والے اجزا کو خارج کر دے گا۔ واقعۃً اسپیکٹرم اس جگہ پر کٹ جائے گا جہاں الکٹران کی حرکی توانائی اشعاع کے ایک کوانٹم کے مساوی ہو جائے گی؛

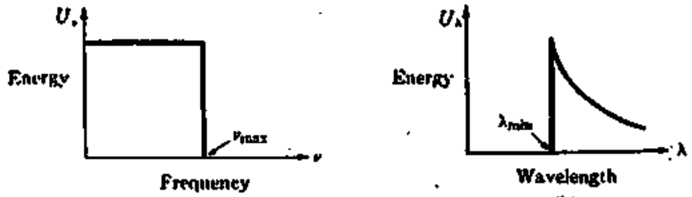
$$\text{K.E.} = \tfrac{1}{2}mu^2 = h\nu_{\max}. \qquad (20\text{-}32)$$

اس طرح کے کبری کے ساتھ مثالی اسپیکٹرم کو تواتر کے پیمانے پر اور پھر لہر لمبائی کے پیمانے پر شکل 20-5. میں دکھایا گیا ہے۔ پلینک کے مفروضہ کے ذریعے مساوات (20-31) کو ان کوانٹوں کی تعداد $dN = -U_\omega\,d\omega/\hbar\omega$, کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو رفتار کی تبدیلی کے دوران "جھٹک دیے"

جاتے" ہیں۔ اس سے ہمیں ملتا ہے :

$$dN_{\omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\,\frac{2}{3\pi}\left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{137}\,\frac{2}{3\pi}\left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{\omega}. \qquad (20\text{–}33)$$

اس طرح پر صفر توانائی کے کوانٹوں کی لا انتہا تعداد خارج ہوگی، اگرچہ کل توانائی محدود ہوتی ہے۔



(a) (b)

(شکل 20-5. bremsstrahlung کا مثالی اسپیکٹرم تواتر کے فنکشن کی شکل میں اور لہر لمبائی کے فنکشن کی شکل میں)

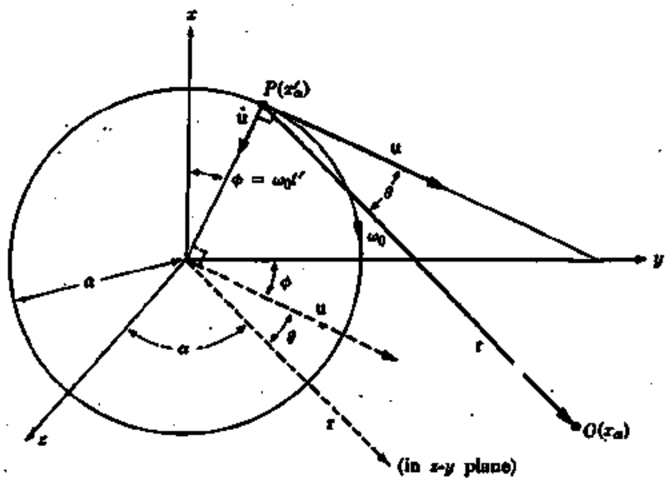
20-4 اسراع کا رفتار کے عمودی ہونے پر اشعاع

اس حالت کے اہم عملی اطلاق ہیں جس میں ایک (دائری مداروں سے اشعاع زیری) چارج مستقل زاویائی رفتار ω_0 سے نصف قطر a کے دائرے میں حرکت کرتا ہے جیسا شکل 20-6 میں ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں ہم نے دائری مدار کو xy مستوا میں دکھایا ہے اور z مدار کے عمودی ہے۔ مان لیجیے کہ مشاہدہ نقطہ O اس طرح چنا گیا ہے کہ ماخذ نقطہ $P(x_a')$ سے نقطہ $O(x_a)$ تک کا نصف قطر ویکٹر r : xy مستوا کے متوازی ہے۔ پہلے کی طرح مان لیجیے کہ u اور r کے درمیان زاویہ θ ہے۔ مان لیجیے کہ $\varphi = \omega_0 t$ وہ زاویہ ہے جو x محور اور اس نصف قطر ویکٹر کے درمیان ہے جو $\dot{u}$ کے متوازی ہے تو ویکٹر الجبرا بتاتا ہے کہ

$$u = a\omega_0, \qquad r_u = r - \frac{ur}{c},$$

$$\dot{u} = a\omega_0^2, \qquad u \cdot r = ur\cos\theta,$$

$$\dot{u} \cdot r = \dot{u} r \cos\theta \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$



[شکل 20-6. چارج $P(x_a')$ پر ہے اور اسراع اس کی رفتار سے زاویہ قائمہ بناتا ہے (حرکت نصف قطر a کے دائرے میں) ویکٹر u xy- مستوا میں ہے ویکٹر r xy- مستوا کے متوازی ہے (دیکھیے ٹوٹی لکیر)]

$$[\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_u \times \dot{\mathbf{u}})]^2 = -(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r})^2 r^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \dot{u}^2 r^4 \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{rc}\right)^2$$

$$= \dot{u}^2 r^4 \left[\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\tan^2\varphi\cos^2\theta\right], \tag{20-34}$$

اور اس لیے :-

$$-\frac{dU(\theta, \varphi)}{dt'}\, d\Omega$$

$$= \frac{e^2 \dot{u}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{[1 - (u/c)\cos\theta]^2 - [1 - (u^2/c)^2]\tan^2\varphi\cos^2\theta}{[1 - (u/c)\cos\theta]^5}\, d\Omega. \tag{20-35}$$

دھیان رکھیے کہ φ اور θ دونوں وقت کے لحاظ سے ذرّہ کی گردش کے ساتھ بدلتے ہیں اور θ ایک گردشی سمتی قدری نظام کی نسبت سے ہے۔ اگر ہم:

$$\cos\theta = \sin\alpha\cos\varphi. \tag{20-36}$$

رکھ دیں تو ہم مساوات (20-35) کو صرف ایک وقت کے ساتھ بدلنے والی مقدار $\varphi = \omega_0 t'$ کے لحاظ سے لکھ سکتے ہیں۔ یہاں شکل 20-6, کے مطابق α گردش کے محور (z محور) اور مشاہدہ کی سمت کے درمیان (مستقل) زاویہ ہے۔ اس متغیرہ کے لحاظ سے :

$$-\frac{dU}{dt'}\,d\Omega$$

$$= \frac{e^2\dot{u}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\,\frac{[1-(u/c)\sin\alpha\cos\varphi]^2-[1-(u^2/c^2)]\sin^2\varphi\sin^2\alpha}{[1-(u/c)\sin\alpha\cos\varphi]^5}\,d\Omega$$

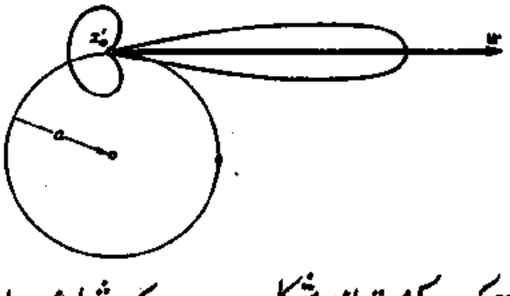
جو آسان کرنے کے بعد

$$= \frac{e^2\dot{u}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\,\frac{[1-(u^2/c^2)]\cos^2\alpha+[(u/c)-\sin\alpha\cos\varphi]^2}{[1-(u/c)\sin\alpha\cos\varphi]^5}\,d\Omega, \quad (20\text{-}37)$$

ہو جاتا ہے، اس طرح جو پیٹرن حاصل ہوتا ہے اس میں دائرہ کے مستوا میں ان مقامات پر صفر ملیں گے جہاں :

$$\theta = \cos^{-1}(u/c).$$

بڑی رفتاروں کے لیے اشعاع کی شدت اور سمتوں کے بہ نسبت آگے کی سمت میں کہیں زیادہ ہوگی جیسا شکل .20-7 میں دکھایا گیا ہے، جیسے جیسے u ، c کے قریب پہنچتا ہے اشعاع آگے کی سمت میں ایک تیز پتلی کرن بن جاتی ہے۔



شکل .20-7 حرکت کے مستوا میں شکل 20-6 کے اشعاع میدان کا خاکہ جس وقت $|u|$ ، c کے مقابلے کا ہے)

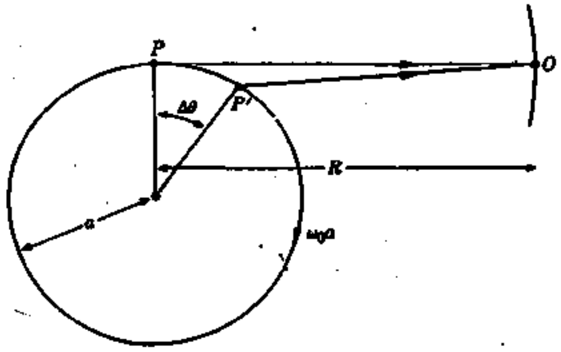
مساوات (20-37) کا اینٹگرل لینے سے ایک چارج e کی جو a نصف قطر کے دائرے میں مستقل زاویائی رفتار ω_0 سے حرکت کر رہا ہے اشعاع کی کل

شرح مل جاتی ہے؛

$$-\frac{dU}{dt'} = P = \frac{e^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\frac{1}{[1-(u^2/c^2)]^2}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{r_0}{c}\frac{a^2\omega_0^4}{c^2}\gamma^4(m_0c^2) = \frac{2}{3}\left(\frac{\omega_0^2r_0}{c}\right)\beta^2\gamma^4, \qquad (20\text{–}38)$$

جہاں $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0m_0c^2$ کو "الکٹران کا کلاسکی نصف قطر" کہتے ہیں (جس کی وجہ پر ہم باب 21 میں غور کریں گے) $\gamma = m/m_0$، اور $\beta = a\omega_0/c = u/c$.



(شکل 20-8)

اگر دائری حرکت ایک a نصف قطر کے دائری مدار میں ہوتی ہے جو مقناطیسی میدان B, کے عمود کی ہے تو $\omega_0 = eB/m_0\gamma$ [باب 18 مشق 5, میں مساوات (18-72) دیکھیے] اور اس طرح اشعاع کے ذریعہ خارج طاقت یہ ہوگی:

$$\frac{P}{m_0c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{eB}{m_0}\right)^2\left(\frac{r_0}{c}\right)(\beta\gamma)^2, \qquad (20\text{–}39)$$

اور میدان میں ہر گردش کے لیے خارج اشعاع توانائی ΔU یہ ہوگی:

$$\frac{\Delta U}{m_0c^2} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{r_0}{a}\right)\beta^3\gamma^4. \qquad (20\text{–}40)$$

آیئے اب ہم خارج ہوئی اشعاع میں تواتری تقسیم پر غور کریں۔ چونکہ بالکل صحیح حساب کرنا مشکل ہے اس لیے پہلے ہم شدید اضافیتی حالت کے لیے ($\gamma \gg 1$) تواتری اسپکٹرم کے کیفی پہلوؤں پر بحث کریں گے۔ مان لیجیے کہ ایک مشاہد O اشعاع کا پلس اس دوران میں موصول کرتا ہے جب کہ الکٹران ایک زاویہ $\Delta\theta$ سے حرکت کر لیتا ہے (شکل 20-8)۔ پلس ایک وقت $\Delta t' = \Delta\theta/\omega_0$ کے درمیان خارج ہوتا ہے لیکن اگر $\gamma \gg 1$ تو وقت وقفہ

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_0}\left(1 - \frac{u}{c}\right) \approx \frac{\Delta\theta}{2\omega_0\gamma^2} \qquad (20\text{–}41)$$

میں موصول ہوتا ہے۔ لیکن وہ زاویائی وقفہ $\Delta\theta$ جس میں اخراج مشاہد کو پہنچتا ہے خود $\Delta\theta = 1/\gamma$, کے درجے کا ہے (یہ بات اس پر دھیان دینے سے دیکھی جا سکتی ہے کہ مساوات (20-35) کے نسب نما (لینارڈ- ویشرٹ نسب نما) میں جز $[1 - (u/c) \cos\theta]$ ایک پاور رہے۔ اگر $\gamma \gg 1$, تو یہ جز تخمینا مندرجہ ذیل کے برابر رکھا جا سکتا ہے :

$$1 - \frac{u}{c}\cos\theta \sim \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{u}{c}\right) + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)\cdot \qquad (20\text{–}42)$$

اس لیے زاویائی تقسیم کی زاویائی چوڑائی درجہ γ^{-1}, کی ہے اور مشاہد کو پہنچنے والا وقتی پلس تقریباً اس لمبائی کا ہوگا (جب کہ عددی جز نہیں لکھے گئے ہیں)

$$\Delta t \approx 1/\omega_0\gamma^3. \qquad (20\text{–}43)$$

چونکہ پلس کی چوڑائی $\Delta\omega$ کا فوریر تجزیہ حسب ذیل رشتہ کی تعمیل کرتا ہے

$$\Delta\omega\, \Delta t \approx 1, \qquad (20\text{–}44)$$

ہم پاتے ہیں کہ

$$\Delta\omega = \gamma^3\omega_0. \qquad (20\text{–}45)$$

اس لیے خارج ہوئے تواتری اسپیکٹرم میں بنیادی تواتر سے γ^3 گنا تواتر کے ہارمونک موجود ہوں گے۔ آیئے اب ہم اشعاع کے تواتری اسپیکٹرم کو

معلوم کریں۔ مساوات (19-7) کے مطابق ویکٹر مضمر اس سے ملتا ہے :

$$\frac{4\pi\epsilon_0 c^2}{e}\mathbf{A}(x_\omega, t) = \frac{\mathbf{u}}{s}, \tag{20-46}$$

جبکہ

$$s = r[1 - (u/c)\sin\alpha\cos(\omega_0 t')]; \tag{20-47}$$

دھیان رہے کہ s اور $\mathbf{u}$ بطور t' کے فنکشنوں کے دیئے ہوئے ہیں۔ دونوں وقت t اور t', (20-8) میں دی ہوئی ابطائی شرط سے جڑے ہوئے ہیں :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{r}{s}\frac{\partial}{\partial t'} = \left[1 - \frac{u}{c}\sin\alpha\cos(\omega_0 t')\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial t'}; \tag{20-48}$$

اس لیے انٹیگرل مستقلہ کو شکل 20-8, کے مطابق چننے پر

$$t = t' - \left(\frac{u}{c\omega_0}\right)\sin\alpha\sin(\omega_0 t') + \left(\frac{R}{c}\right). \tag{20-49}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت کی ارتعاشی نوعیت کے سبب سے تواتری اسپیکٹرم $\omega = l\omega_0$, تواتروں کا ایک خطی اسپیکٹرم ہوگا جہاں l ہارمونک کا درجہ ہے۔ اس لیے ہر ہارمونک کی فوریر وسعت $\mathbf{A}_l (1 \le l < \infty)$ اس سے ملتی ہے[1]۔

$$\frac{4\pi\epsilon_0 c^2}{e}\mathbf{A}_l(x_\omega) = \frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0}\frac{\mathbf{u}(t')}{s}e^{+i\omega t}\,dt$$

$$= e^{ikR}\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0}\frac{\mathbf{u}(t')}{r}\exp\left\{i\omega\left[t' - \frac{u}{c\omega_0}\sin\alpha\sin(\omega t')\right]\right\}dt', \tag{20-50}$$

جہاں $k = \omega/c$. شکل 20-6, کے مطابق $\mathbf{u}$ کے دو اجزا ہیں۔

$$u_x = -u\sin(\omega_0 t') \quad \text{اور} \quad u_y = u\cos(\omega_0 t');$$

(1) سیکشن 14-2, میں دیے رواج کی مطابقت کی غرض سے فوریر جز کو نارمل کر لیا جاتا ہے یعنی اس طرح کہ :

$$\mathbf{A}(x_\omega, t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{A}_l\exp(-il\omega_0 t)\right].$$

اس لیے بڑے فاصلوں پر جہاں r کو اینٹیگریشن کی وسعت کے اوپر مستقل اور R کے برابر مانا جا سکتا ہے زاویہ φ کو ایک متغیرہ مان کر ہمیں یہ ملتا ہے :

$$A_{xl} = -\frac{eue^{ikR}}{4\pi^2\epsilon_0 c^2 R}\int_0^{2\pi} \exp\left[il\left(\varphi - \frac{u}{c}\sin\alpha\sin\varphi\right)\right]\sin(l\varphi)\, d\varphi.$$

$$A_{yl} = \frac{eue^{ikR}}{4\pi^2\epsilon_0 c^2 R}\int_0^{2\pi} \exp\left[il\left(\varphi - \frac{u}{c}\sin\alpha\sin\varphi\right)\right]\cos(l\varphi)\, d\varphi. \quad (20\text{–}51)$$

یہ اینٹیگرل مستند بیسیل فنکشن کی شکل میں ہیں اور انھیں اس طرح لکھا جا سکتا ہے :

$$A_{xl} = -\frac{ieue^{ikR}}{2\pi\epsilon_0 c^2 R} J_l'\left(\frac{lu}{c}\sin\alpha\right),$$

$$A_{yl} = l\frac{eue^{ikR}}{2\pi\epsilon_0 c^2 R}\left\{\left[J_l\left(\frac{lu}{c}\sin\alpha\right)\right]\Big/\left(\frac{lu}{c}\sin\alpha\right)\right\} \quad (20\text{–}52)$$

ویں ہارمونک کی مطابقت کے پوائنٹنگ فلکس کا وقتی اوسط یہ ہے :

$$\overline{N_l} = \frac{\epsilon_0 c^3}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

$$= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{ck^2}{2\pi}\right)\frac{1}{R^2}\left[\cot^2\alpha\, J_l^2\left(\frac{lu}{c}\sin\alpha\right) + \frac{u^2}{c^2}J_l'^2\left(\frac{lu}{c}\sin\alpha\right)\right]. \quad (20\text{–}53)$$

اس لیے وہ طاقت جو ایک ٹھوس زاویائی وقفہ $d\Omega = 2\pi\sin\alpha\, d\alpha$ میں ویں ہارمونک کے لیے بذریعہ اشعاع خارج ہو رہی ہے یہ ہے :-

$$\frac{dP_l}{d\Omega}d\Omega$$

$$= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\right)\left(l^2\omega_0^2\right)\left[\cot^2\alpha\, J_l^2\left(\frac{lu}{c}\sin\alpha\right) + \frac{u^2}{c^2}J_l'^2\left(\frac{lu}{c}\sin\alpha\right)\right]\sin\alpha\, d\alpha. \quad (20\text{–}54)$$

یہ خارج ہوئی اشعاع کی اسپیکٹرمی اور زاویائی تقسیم کے لیے عام عبارت ہے۔ مختلف تخمینوں کا استعمال کر کے یا عددی طریقوں کے ذریعے ایک ٹھوس زاویہ کے اوپر مساوات (20-54) کا اینٹیگرل نکالا جا سکتا ہے، یہ دکھایا جا سکتا

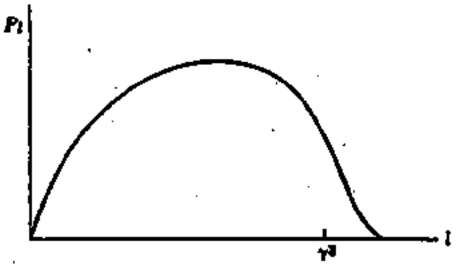
ہے[1] کہ اضافیتی انتہائی حالت میں ($(\gamma \gg 1)$) اینگریٹ کے اسپیکٹرم کی شکل یہ ہو جاتی ہے:

$$P_l = 0.52\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\right)\omega_0^2 l^{1/3}, \qquad 1 \ll l \ll \gamma^3,$$

$$P_l = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\right)\omega_0^2\left(\frac{l}{\gamma}\right)^{1/2} e^{(-2/3)(l/\gamma^3)}, \qquad l \gg \gamma^3. \qquad (20\text{–}55)$$

اسپیکٹرم کا خاکہ شکل 20-9. میں دکھایا گیا ہے۔ ملاحظہ کیجیے کہ اسپیکٹرم تقریباً γ^3 کے درجہ کے ہارمونک پر کٹ جاتا ہے جس کی اس سیکشن کے شروع کی بحث میں پیشین گوئی کی گئی تھی۔

اس سیکشن کے حسابات ایک دائرہ میں حرکت کرنے والے ایک اکیلے نقطہ چارج (عملی اطلاق میں الکٹران) سے خارج اشعاع کے لیے لاگو ہے



(شکل 20-9. دائرہ میں حرکت کرنے والے ایک اضافیتی الکٹران کی اشعاع کے اسپیکٹرم کا نمونہ۔ P_l کسی ہارمونک درجہ l پر خارج ہوئی طاقت ہے)

اگر ایک سے زیادہ چارج موجود ہے تو اشعاع کی وسعت [مثلاً ویکٹر مضمر مساوات (20-52)] کا انطباق کرنا ہوگا۔ وہ ہارمونک جن کے لیے ایک "گچھے" کے N الکٹرانوں کے درمیان فیزز کا فرق ناقابلِ لحاظ ہے، اشعاع ہم آہنگ

---

(1) دیکھیے مثال کے طور پر L. Landau and E. Lifshits, *The Classical Theory of Fields*, Addison- Wesley, 1951, pp. 216 ff.

ہوگی یعنی کل خارج اشعاع کی شدت ایک الکٹران سے خارج اشعاع کی N^2 گنا ہوگی؛ اس لیے فی الکٹران توانائی کا خسارہ بڑھ کر N۔ گنا ہو جائے گا۔ یہ اثر اونچی توانائی کے دائری الکٹران سرعت کاروں میں کافی اہم ہو سکتا ہے۔ ایک دلچسپ بات دھیان دینے کی یہ ہے کہ اگر چارج پورے دائرے میں برابر بنے رہیں تو مساوات (20-50) کا معائنہ ظاہر کرتا ہے کہ کل اشعاع میدان غائب ہو جائے گا اور ویکٹر مضمر میں صرف R^{-2} والی رقمیں رہ جائیں گی؛ اس کا مفہوم ہے کہ ایک مسلسل حلقہ نما کرنٹ سے تابانی خارج نہیں ہوگی؛ ایک دھات کے تار کا حلقہ جس میں مستقل کرنٹ بہہ رہی ہو اس زمرہ میں آتا ہے کیونکہ جالی کی برقناکونی قوتیں الکٹرانوں کی تقسیم کو یکساں بنائے رکھتی ہیں۔ دوسری طرف آزاد الکٹرانوں کا ایک دائری کرنٹ (جیسا کہ بیٹاٹران میں) اشعاع چارج کرے گا کیوں کہ دائرہ میں الکٹرانوں کے کثافت میں یکسانیت نہیں ہوتی ہے۔ اس طرح کے غیر مسلسل چارجوں کی شدت اشعاع ہم آہنگ حالت کی شدت اشعاع کے جذر کے تناسب میں ہوتی ہے یعنی $\sqrt{N^2} = N$, کے تناسب میں اور فیزوں میں کوئی باہمی رشتہ نہیں ہوتا، اس لیے آزاد الکٹرانوں کی دائری کرنٹ جو اشعاع کرتی ہیں اس کی شدت انفرادی الکٹرانوں سے خارج اشعاع کی شدتوں کے جوڑ کے برابر ہوتی ہے؛ اس لیے فی الکٹران اشعاع کے ذریعے اوسط خسارہ ایک الکٹران کے خسارہ کے برابر ہوتا ہے۔

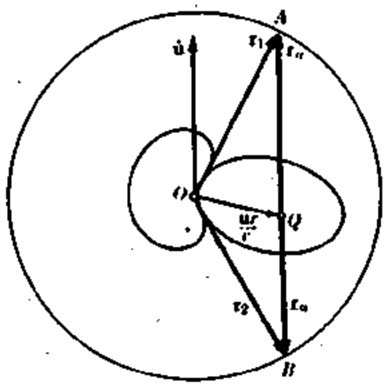
20-5 رفتار یا اسراع پر پابندی نہ ہونے کی حالت میں عام اشعاع میدان کے

مساوات (20-17) کو اشعاع کی شرح کی اس تصحیح کے ساتھ جس سے مساوات (20-21) پر پہنچتے ہیں، لینے پر اشعاع کے اخراج کی سمتی شرح کا عام اظہار حاصل ہوتا ہے:

$$-\frac{dU}{dt'}\,d\Omega = \frac{e^2 r}{16\pi^2\epsilon_0 s^5 c^3}\left[\mathbf{r}\times(\mathbf{r}_u\times\dot{\mathbf{u}})\right]^2 d\Omega. \qquad (20\text{-}56)$$

چونکہ اشعاع میدان اس حالت میں غائب ہو جاتے ہیں جب $\dot{\mathbf{u}}$, کے متوازی

$r_u = r - ur/c$ ہوتا ہے اس لیے عام طور سے دو نوڈل خط ہوں گے جیسا ہم نے مخصوص حالتوں میں دیکھا ہے۔ نوڈ کے مقام گرافی تعمیر سے حاصل کیے جا سکتے ہیں جیسا شکل 20-10 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج O کو مرکز مان کر ایک r نصف قطر کا دائرہ کھینچیے اور ایک خط $OQ = ur/c$ لمبائی کا بنائیے۔ ایک خط جو $\hat{u}$ کے متوازی ہے Q سے گزرتا ہوا بنایئے تب اس کے دائرے پر r_u کی دونوں قیمتیں سرہ نقطے A اور B ظاہر کرتے ہیں جن کے لیے میدان غائب ہو جاتے ہیں۔ اس لیے OA اور OB دو نوڈل خط ہیں جو ہمیشہ اس مستوا میں رہتے ہیں جس کا تعین u اور $\hat{u}$ کرتے ہیں۔



(شکل 20-10 اشعاع میدان کے نوڈل خطوں کی گراف کے ذریعہ تعمیر)

مساوات (20-57) کا پورے ٹھوس زاویہ پر اینٹگرل نکالنے کا طریقہ ابتدائی لیکن کسی قدر پیچیدہ ہے۔ شاید سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ u کی سمت کو قطبی محور مانا جائے اور پہلے سمتیہ اینٹگریشن کیا جائے۔ اینٹگریشن کا آخری نتیجہ یہ ہے:

$$-\frac{dU}{dt'} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,\frac{\dot{u}^2 - (u \times \dot{u})^2/c^2}{(1 - u^2/c^2)^3} \qquad (20\text{-}57)$$

جو اشعاع کی پوری شرح دیتا ہے۔ اس کی جانچ آسانی سے کی جا سکتی ہے کہ پہلے سیکشنوں میں دی گئی اشعاع کی شرحیں مساوات (20-56) کی خصوصی حالتیں

میں مسئلوں۔ مسئلوں میں یہ دکھایا گیا ہے کہ مساوات (20-57) کو مساوات (20-29) سے لارنٹز استحالہ کے ذریعہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

20-6 کولوم میدان میں بریم سٹرالن Bramsstrahlung کے لیے کلاسکی عرضی تراش

کم الکٹرانی توانائیوں کے لیے مساوات (20-25) "ملائم" ایکس کرنوں کی پیداوار کا تخمینہ دیتا ہے اگر u کی آزمائشی قیمتیں استعمال کی جائیں۔ اس حالت میں اول الکٹرانوں کا الکٹرانوں سے تصادم ہے۔ لیکن ایک سے e/m والے ذرّوں کے درمیان واحد تصادم میں برقی دو قطبی یا مقناطیسی دو قطبی اشعاع کا اخراج نہیں ہوتا کیونکہ چارج کے مرکز کا نقل یا گردش خطی و زاویائی تحرک کی برقراریت کے خلاف ہیں۔ (مثال کے لیے اس باب کے آخر کی مشق میں مسئلہ 4 دیکھیے) اس لیے کم توانائیوں کے لیے جہاں الکٹران - الکٹران تصادم کی غالب اکثریت ہوتی ہے۔ اشعاع کا حساب واقع ذرہ کو دھیما کرنے میں الکٹرانوں کے مجموعی اثرات سے کیا جائے گا، زیادہ اونچی توانائیوں پر اور خاص طور سے بھاری نشانوں کے لیے یہ سمجھنا ہوگا کہ ایکس کرنوں کی پیداوار کسی ایٹم کولوم میدان میں ہوئے انفراج کے دوران ظہور میں آتی ہے۔ الکٹرانوں کے ایٹموں کے ساتھ تصادموں میں دو قطبی اشعاع ممکن ہے اور ان حالات میں واحد تصادموں کے اثرات کا غلبہ رہتا ہے۔ ہم ایک سادہ غیر اضافیتی حساب لگا سکتے ہیں جو صرف عرضی اسراع پر مشتمل ہوگا اور جس میں ایک زیادہ تشریحی حساب کے خاص خاص طبیعیاتی پہلو آجاتے ہیں:

ایک u رفتار کے الکٹران پر جو ایک Ze چارج والے ایٹم سے فاصلہ b پر گزر رہا ہے، غور کیجیے، اگر قریب سے قریب پہنچنے کے وقت کو $t = 0$. مانا جائے تو قوت کی جسامت بطور t کے فنکشن کے یہ ہوگی۔

$$F = m\dot{u} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(b^2 + u^2t^2)}, \qquad (20\text{–}58)$$

جس کی وجہ سے ہوئے الکٹران کے اسراع کا (چھوٹا) عمودی جز تقریباً یہ ہے:

$$\dot{u} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{b}{(b^2 + u^2t^2)^{3/2}}. \qquad (20\text{-}59)$$

اشعاع کے خسارے اور اسپیکٹرمی تقسیم کا حساب کرنے کے لیے ہمیں $\dot{u}$ کا فوریہ تجزیہ کرنا ہوگا :

$$\dot{u}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(t)e^{+i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{2Ze^2b}{4\pi\epsilon_0 m}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega t\,dt}{(b^2 + u^2t^2)^{3/2}}. \qquad (20\text{-}60)$$

اب بیسل فنکشن $K_1(\omega b/v)$ کو اس اینٹگرل سے ظاہر کیا جاتا ہے :

$$K_1\left(\frac{\omega b}{u}\right) = \frac{b}{u\omega}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega t\,dt}{[(b/u)^2 + t^2]^{3/2}}, \qquad (20\text{-}61)$$

اور اس لیے

$$\dot{u}_\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{2\omega}{u^2}K_1\left(\frac{\omega b}{u}\right). \qquad (20\text{-}62)$$

فنکشن $K_1(\omega b/u)$ یہ وصف رکھتا ہے کہ $\omega b/u < 1,$ کے لیے $K_1(\omega b/u) \simeq u/\omega b$ اور دلیل کی بڑی قیمتوں کے لیے یہ ایکسپونینسی انداز سے گھٹتا ہے اس لیے ہم یہ رکھ سکتے ہیں :

$$\dot{u}_\omega = \frac{1}{\pi}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{ub}, \qquad \omega < u/b,$$

$$\dot{u}_\omega = 0, \qquad \omega > u/b. \qquad (20\text{-}63)$$

تب مساوات (20-30) میں $\dot{u}_\omega$ کی مطابقت کے اشعاعی میدان کی اشعاع رکھنے سے ہمیں زاویہ $d\Omega$ میں خارج ہوئی توانائی کے لیے یہ ملتا ہے :

$$-U_\omega\,d\omega\,d\Omega = \frac{Z^2e^2r_0^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\pi^2}\frac{c}{u^2b^2}\sin^2\theta\,d\omega\,d\Omega, \qquad (20\text{-}64)$$

جہاں $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$ الکٹران کا کلاسیکی نصف قطر ہے۔ فی تواتر وقفہ $d\omega$ کے لیے اشعاع کی کل توانائی ہے :

$$-U_\omega\,d\omega = \frac{2Z^2e^2r_0^2}{3\pi^2\epsilon_0}\frac{c}{u^2b^2}\,d\omega. \qquad (20\text{-}65)$$

ہم اگر سب ممکن فاصلوں b کا شمار کر لیں تو مساوات (20-65) کو توانائی $\hbar\omega,$ کے کوانٹموں کے اخراج کے عرضی تراش کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے ،

$$d\sigma = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{U_\omega\, d\omega}{\hbar\omega} 2\pi b\, db = \frac{4Z^2 r_0^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{c^2}{u^2} \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \frac{d\omega}{\omega}$$

$$= \frac{16\alpha}{3} \frac{Z^2 r_0^2}{u^2/c^2} \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \frac{d\omega}{\omega}, \qquad (20\text{–}66)$$

جس میں یہ خیال رکھنا ہے کہ $b_{max}\,\omega < u/b_{min}$. کی حد کا تعین ایٹم کو محیط کرنے والے ایٹمی الکٹرانوں کی ''آڑ'' کی وجہ سے کولوم میدان کی موثر حد سے ہوتا ہے۔ حد b_{min} دراصل الکٹران کی حرکی توانائی سے زیادہ قیمت کے $\hbar\omega$ کے واسطے اسپیکٹرم کے کٹ جانے کے مترادف ہے۔ مساوات (20-66) محض قریبی ہے، لیکن یہ $r_0, Z,$ اور $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ پر انحصار کو دکھاتی ہے جو کوانٹم میکانکی حساب میں بھی اسی طرح بنا رہتا ہے۔

20-7 سرنکوو اشعاع

ہم نے باب 19 میں اور پھر سیکشن 1-20 میں دیکھا ہے کہ کوئی چارج جو خلا میں یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے، اشعاع خارج نہیں کرتا۔ مساوات (20-16) کے ترغیبی میدانوں اور مساوات (20-15) میں دیے ہوئے متعلقہ مقناطیسی میدان کے مطابقت کا پوائنٹنگ ویکٹر بڑھتے r کے ساتھ اتنی تیزی سے کم ہوتا ہے کہ بڑے فاصلوں پر لیے گئے سطحی انٹیگرل کی قیمت صفر ہوتی ہے لیکن ایسے ڈائیلکٹرک وسیلوں میں جس کے لیے $\epsilon > \epsilon_0, \kappa > 1$. حالات مختلف ہو سکتے ہیں۔ آئیے ہم اس طرح کے ایک حاجز وسیلہ میں ایک متحرک چارج کے میدان پر غور کریں جہاں سہولت کے لیے ہم $\mu = \mu_0$. رکھیں گے۔ ڈالمبرٹ آپریٹر D' کی مساوات (14-6)، میں دی ہوئی زیادہ عام تعریف کا استعمال کرنے پر ویکٹر مضمر کا غیر متجانس مساوات صرف یہ ہے :

$$\Box \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}. \qquad (14\text{–}7)$$

حل وہی ہیں جو خلا کے لیے ہیں فرق یہ ہے کہ c کی جگہ $c/n,$ لے لیگا جبکہ انعطافی

انڈیکس $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{\kappa},$ اور اس طرح ابطا شدہ وقت $t' = t - rn/c.$ ہے کسی ذرہ کی رفتار پر اضافیتی پابندی $u < c,$ ہے لیکن اگر ایک الکٹران جس کی رفتار تقریباً c کے برابر ہے کسی ڈائیلکٹرک وسیلہ میں داخل ہوتا ہے تو اُس کی رفتار اُس وسیلہ میں روشنی کی رفتار سے زیادہ ہوسکتی ہے ان حالات میں ابطائی نسب نما غائب ہوسکتا ہے اور اُس سمت میں جس کے لیے $1 - un/c \cos\theta = 0$ میدانی شدتیں لا انتہا ہوتی ہیں۔ اس لیے ہم ایک ایسے مخروط میں اشعاع پانے کی توقع کرسکتے ہیں جس کا حرکت کی سمت سے تعین زاویہ $\theta = \cos^{-1}(c/nu)$ سے ہوتا ہے۔ اس طرح کی اشعاع کا مشاہدہ پہلے پہل سرنکو نے 1934. میں کیا تھا۔ دھیان رکھیے کہ اگر $u > c/n$ تو مساوات (14-7) کا ایک مرادف سکونی حل میں استحالہ جس پر سیکشن 19-2. میں بحث کی گئی تھی غیر ممکن ہے۔

سرنکو اشعاع کے ایک قدری تخمینہ کے لیے باب 14. کے فوریر حلوں کا استعمال آسان رہے گا۔ رفتار u سے حرکت کرنے والے چارج e کے مطابقت کی کرنٹ کثافت j اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے؛

$$\mathbf{j} = eu\,\delta(x' - ut)\,\delta(y')\,\delta(z'). \tag{20-67}$$

ظاہر ہے کہ یہ اظہار چارج کا مقام صحیح صحیح ماخذ (x', y', z') پر دیتا ہے۔ اور $\int \mathbf{j}\,dy'\,dz'\,dt = e\hat{\mathbf{x}},$ کر دیتا ہے جہاں $\hat{\mathbf{x}}$ حرکت کی سمت میں اکائی ویکٹر ہے۔ $\mathbf{j}$ کا فوریر بدل جس کی مساوات (14-52) میں رکھنے کی ضرورت ہوگی اس سے ملتا ہے۔

$$\mathbf{j}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{j}e^{i\omega t}\,dt = \frac{e}{2\pi}\,\delta(y')\,\delta(z')e^{i\omega x'/u}\hat{\mathbf{x}}. \tag{20-68}$$

چونکہ لہر کے علاقہ میں؛

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}\,|\mathbf{H}| = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,|\mathbf{H}|, \tag{20-69}$$

مساوات (14-52) کو n سے تقسیم کرنا ہوگا جس سے ڈائیلکٹرک میں خارج ہوئی

توانائی مل سکے۔ اگر ماخذ ویکٹر ξ کے اجزا کو x', y', z' مان لیں اور جیسا مساوات (11-59) میں تعریف کی گئی ہے $k = \omega n/c$ اور $\mathbf{k}$ اور $\mathbf{u}$ کے درمیان زاویہ θ ہو تو ایک تواتر پٹی $d\omega$ میں توانائی کا خسارہ U_ω اس سے ملتا ہے :-

$$U_\omega \, d\omega = \left[\int \frac{dU_\omega}{d\Omega} \, d\Omega\right] d\omega$$

$$= \frac{e^2\omega^2 n}{16\pi^3\epsilon_0 c^3}\left[\int \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(\omega x'/u) - kx'\cos\theta]} \, dx'\right|^2 \sin^2\theta \, d\Omega\right] d\omega \tag{20-70}$$

x' کے اوپر انٹیگرل درحقیقت ایک δ فنکشن $(1 - nu/c\cos\theta)\delta$ ہے جو چھسر سمت $\theta = \cos^{-1}(c/nu)$. میں لا انتہا میدانوں کو ظاہر کرتا ہے۔ لیکن اس شکل میں اس پر عمل آسان ہے ؛ الکٹران کے لیے ایک لامتناہی راستہ کھلا نہیں ہے اور انٹیگرل $-X$ سے X: تک لیا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-X}^{X} e^{i\omega[1-(nu/c)\cos\theta]x'/u} \, dx' = \frac{2\sin\{\omega[1 - (nu/c)\cos\theta]X/u\}}{\omega[1 - (nu/c)\cos\theta]/u}. \tag{20-71}$$

اس لیے

$$U_\omega = \frac{1}{2\pi^2}\frac{e^2 n\omega^2}{\epsilon_0 c^3}\int_{-1}^{+1} \sin^2\theta \, \frac{\sin^2\{[1 - (nu/c)\cos\theta]\omega X/u\}}{\omega^2[1 - (nu/c)\cos\theta]^2/u^2} \, d(\cos\theta). \tag{20-72}$$

اس نا ویائی انٹیگرل کے اب بھی کچھ اوصاف ایک δ فنکشن کے ہیں: اس میں $\cos\theta = c/nu.$ پر ایک تیز کبری ہے۔ اگر ہم θ کی اس قیمت کو آہستہ آہستہ بدلنے والے فنکشن $\sin^2\theta$, میں رکھیں اور یہ یاد رکھیں کہ حدوں سے کوئی فرق نہیں پڑتا جب تک ان میں ایک کبری شامل ہے تو ہم مساوات (20-72) میں آئے انٹیگرل کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\left(1 - \frac{c^2}{n^2u^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\{[1 - (nu/c)\cos\theta]\omega X/u\}}{\omega^2[1 - (nu/c)\cos\theta]^2/u^2} \, d(\cos\theta)$$

$$= \left(1 - \frac{c^2}{n^2u^2}\right)\frac{cX}{\omega n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx = \frac{cX\pi}{\omega n}\left(1 - \frac{c^2}{n^2u^2}\right) \tag{20-73}$$

تب تواتر وقفہ $d\omega$ میں اشعاع کی وجہ سے خسارہ یہ ہے :

$$U_\omega \, d\omega = \frac{e^2 X}{2\pi\epsilon_0 c^3}\left(1 - \frac{c^2}{n^2u^2}\right)\omega \, d\omega. \qquad (20\text{–}74)$$

راستہ کی ہر اکائی لمبائی کے لیے مطابقہ توانائی کا خسارہ یہ ہو جاتا ہے :-

$$\frac{\Delta U_\omega \, d\omega}{\Delta L} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(1 - \frac{c^2}{n^2u^2}\right)\omega \, d\omega, \qquad (20\text{–}75)$$

چونکہ پورا زیرِ غور راستہ $2X$. ہے اس لیے مساوات (20–75) توانائی کے کوانٹوں $\hbar\omega$, کے لحاظ سے یہ ہو جاتا ہے۔

$$\frac{\Delta N}{\Delta L}\, d\omega = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\left(1 - \frac{c^2}{n^2u^2}\right)\frac{d\omega}{c} = \alpha\left(1 - \frac{c^2}{n^2u^2}\right)\frac{d\omega}{c}, \qquad (20\text{–}76)$$

جو تواتر پر منحصر نہیں ہے۔ سوا اُس انحصار کے جو انعطافی انڈیکس کا تواتر پر ہے
چونکہ ایک ڈائیلکٹرک میں اونچے تواتروں کے لیے ترسیل کی رفتار اپنی خلائی قیمت
کے قریب پہنچ جاتی ہے ω, $n(\omega)$ کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے c/u سے چھوٹا ہو جائے گا
اور کوانٹوں کی کل تعداد محدود رہے گی۔

مجوّزہ حوالے

برقی حرکیات کی تقریباً سبھی کتابوں میں سرعتائے چارجوں سے خارج اشعاع
کا ذکر ہے۔ بہترین میں سے تین یہ ہیں ؛

R. Becker, *Theorie der Elektrizität*, Band II.
L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*.
A. Sommerfeld, *Electrodynamics*.

زیادہ مختصر بیان حسبِ ذیل میں ملیں گے :
اس میں زیادہ زور ریٹنا اور ایڈوانسڈ ترتیبوں پر دیا گیا ہے :

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*.

لیکن سرعتائے چارج کے میدانوں کو بھی اخذ کیا گیا ہے۔ ایک چارج کے اشعاعی

W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. XIV, میدان باب

میں دیے ہیں ساتھ میں مخصوص اضافیت بھی ہے سنکروٹران کے تذکرہ کے لیے دیکھیے :

Landau and Lifshitz, L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*

Electrodynamics of Continuous Media, Section 86.

مشق

1. مساوات (10-20) ایک موزوں فریم میں جائز ہے، دکھایئے کہ اس مساوات کے دونوں طرف کے لارنز استحالہ سے ہم مساوات (57-20) پر پہنچتے ہیں۔ دکھایئے کہ مساوات (38-20) کی ایک خاص حالت ہے۔ اشارہ۔ دھیان رکھیے کہ $dU/dt = dU^0/dt^0$ یعنی ایک اشعاعی نقطہ چارج کے لیے dU/dt ایک غیر متغیرہ ہے۔

2. ایک الکٹران سنکروٹران ایک $1.5 W/m^2$ کے مقناطیسی میدان میں کام کرتا ہے۔ الکٹران کی کسی توانائی کے لیے ہر چکر میں اوسط توانائی کا خسارہ اس کی اپنی توانائی کے برابر ہوگا۔

3. ایک الکٹران ایک یکساں میدان B میں ایک مرغولی مدار میں حرکت کر رہا ہے جس کی دھری B کی سمت میں ہے، دکھایئے کہ خارج ہوئی اشعاع کی قوت دائری مدار میں حرکت کرنے والے الکٹران کی اشعاع کے ذریعہ خارج طاقت کے مقابلے میں ایک جز $\cos^2 \delta$ سے کم ہوجاتی ہے جہاں δ مرغولہ کے "پیچ کا زاویہ" ہے (جس کی تعریف یہ ہے کہ $\tan \delta$ رفتار کے محوری جز سے اودی سمتہ جز کی نسبت ہے)۔

4. دکھایئے کہ جب ایک ذرّہ $e_1, m_1,$ دوسرے ذرّہ $e_2, m_2,$ کے پاس سے ایک اضافیتی رفتار $u \ll c,$ سے گزرتا ہے تو خارج ہوئی کل اشعاع کی زاویائی تقسیم اس سے ملتی ہے :

$$-\frac{dU}{d\Omega} = \frac{\text{const}}{b^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (4 - n_x^2 - 3n_y^2),$$

جہاں n_x اور n_y ایک اکائی ویکٹر $\mathbf{n}$ کے اجزا ہیں جس کی سمت اشعاع کی سمت میں ہے اور b تصادمی پیرامیٹر ہے جسے حرکت کے دوران مستقا

مان لیا گیا ہے۔ رفتار v سمت x میں ہے اور دونوں چارج xy مستوا میں واقع ہیں۔ مان لیجیے کہ حرکت تصادم کے دوران خطِ راست میں رہتی ہے۔

5. مان لیجیے کہ ایک چارج e ایک بھاری چارج Ze کے پاس سے تصادمی پیرامیٹر b کے ساتھ گزرتا ہے۔ ضروری نہیں ہے کہ رفتار کم ہو، یہ مان کر راستہ میں زاویائی تبدیلی کم ہے۔ چارج کو دیے گئے عرضی تحرک کا حساب لگائیے۔

6. مسئلہ 5 کے نتیجہ سے ایک چارج کے اوسط مربع انتشاری زاویہ کا حساب لگائیے جو ایک شے کی موٹائی t سے گزرتا ہے جس میں Ze مقدار والے N_0 چارج ہر اکائی حجم میں موجود ہیں۔ مان لیجیے کہ ممکن تصادمی پیرامیٹر b_1 سے b_2 تک ہیں۔

7. ایک الکٹران سے خارج اشعاع کے کلاسکی عرضی تراش کا (خارج ہوئی اشعاع کے فی اکائی توانائی وقفہ کے لیے) حساب لگائیے جو رفتار $v \ll c$ سے ایک انتہائی سخت کرہ سے تصادم کرتا ہے جس کا نصف قطر a ہے۔ مان لیجیے کہ کرہ اشعاع کے شفاف ہے۔

8. 1.9 انعطافی انڈکس والے شیشہ میں سے گزر رہے ایک 350 MeV نیوٹران سے نکلی سرنکوو اشعاع کی پیداوار کا حساب لگائیے۔ (نیوٹران سے متعلقہ کرنٹ اس کے مقناطیسی دوقطبی گردشہ کی وجہ سے ہے) اس جواب کا موازنہ انہیں حالات میں اسی توانائی کے ایک پروٹان سے نکلے سرنکوو تابانی سے کیجیے۔

اشارہ: مساوات (20-68) میں $j = \nabla \times M$ رکھیے اور ٹکڑوں میں اینٹگرل نکالیے۔

9. دکھایئے کہ ایک ذرہ کی جو ایک برقی میدان E کے سبب سرعت پذیر ہے، توانائی حاصل کرنے کی شرح کے مقابلے میں شعاع کے ذریعہ توانائی کا خسارہ ناقابلِ لحاظ ہے اگر اس کی رفتار v برابر E کے متوازی رہتی ہے۔ مان لیجیے کہ عملی وجوہات سے میدان E 10^6 volts/meter. کی حد کے اندر رہتا ہے۔

باب 21

اشعاع کا ردِ عمل اور برقی حرکیات کے برقراریت قوانین کی ہم متغیری تشکیل

باب 10 میں یہ دکھایا گیا تھا کہ تحرک کی برقراریت کے قانون کو درج ذیل شکل

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \qquad (21\text{-}1)$$

کے برقی تفاعل سے ہم اس حالت میں ہم آہنگ بنا سکتے ہیں جب برقی مقناطیسی

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{N}}{c^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} \qquad (21\text{-}2)$$

میدان کے لیے کثافت والے تحرک کو مان لیں۔ اسی طرح بند نظام جس میں مادہ اور اشعاع دونوں ہیں، توانائی کی برقراریت کے لیے ضروری ہے کہ برقی مقناطیسی میدان میں ایک توانائی کثافت

$$U_v = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}, \qquad (21\text{-}3)$$

ہو۔ آیئے ہم اُن کو ایک ہم متغیری شکل میں ظاہر کریں۔

21-1 خلائی برقی حرکیات کے برقراریت قوانین کی ہم متغیری تشکیل

سہ ابعادی ٹینسر کی زبان میں ہم باب 10 کے برقراریت قوانین کو اس طرح

لکھ سکتے ہیں :

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\alpha} + \rho E_\alpha u_\alpha + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(E^2 + c^2B^2)}{2}\right] = 0, \qquad (21\text{–}4)$$

$$\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times c\mathbf{B})_\alpha = \rho[E_\alpha + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_\alpha]. \qquad (21\text{–}5)$$

یہاں $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ پوائنٹنگ ویکٹر ہے اور $T^M_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E_\gamma D_\gamma + H_\gamma B_\gamma)$ میکسویل مزاحمتی زور ٹینسر ہے۔ مساوات (21–4) اشعاع کے ذریعہ توانائی کے خسارے کو میکانیکی اور حرکی کام کی شرح اور برقی مقناطیسی میدان کی توانائی کی وقت کے ساتھ بدلنے کی شرح سے متوازن کرتا ہے۔ مساوات (21–5) حجمی قوت کو کمیت اور مقناطیسی میدان کے تحرک کے بڑھنے کی شرح سے متوازن کرتا ہے، ان دونوں مساواتوں کو ملا کر واحد رشتہ حاصل ہو سکتا ہے اگر ہم مقناطیسی میدان کے توانائی تحرک ٹینسر کو داخل کریں جس کی رسمی تعریف حسب ذیل متشاکل میٹرکس، سے ہوتی ہے :

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} -T^M_{11} & -T^M_{12} & -T_{13} & cG_x \\ -T^M_{12} & -T^M_{22} & -T^M_{23} & cG_y \\ -T^M_{13} & -T^M_{23} & -T^M_{33} & cG_z \\ cG_x & cG_y & cG_z & W \end{pmatrix}, \qquad (21\text{–}6)$$

جہاں $\mathbf{G} = \mathbf{N}/c^2$ میدان کی تحرک کثافت[1] ہے اور

$$W = \tfrac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

توانائی کثافت ہے اگر T^{ij} اوپر دیے اجزا والا ٹینسر ہے تو برقراریت کے قوانین یعنی مساوات (21–4) اور (21–5) اس سادہ ہم متغیری رشتہ کے مساوی ہیں :

$$\partial T^{ij}/\partial x^j = -f^i, \qquad (21\text{–}7)$$

---

(1) رشتہ $\mathbf{G} = \mathbf{N}/c^2$ کو متشاکل ٹینسر $T^{ij} = T^{ji}$ کا نتیجہ مانا جاسکتا ہے۔

جہاں

$$(f^i) = \rho[(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),\quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}/c)] \qquad (21\text{-}8)$$

وہ چہار دیکٹر ہے جو فی اکائی حجم لارنز قوت اور چارجوں اور کرنٹوں پر برق مقناطیسی میدان کے فی اکائی حجم کام کی شرح ظاہر کرتا ہے۔

یہ دکھانے کے لیے کہ $T^{ij} = g^{ik}T^j_k$ درحقیقت ایک ٹینسر ہے ہم دیکھتے ہیں کہ T^i_j کو مساوات (17-32) کے F^{ij} سے درج ذیل ٹینسر عمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے

$$T^i_j = \epsilon_0[F^{ik}F_{kj} - \tfrac{1}{4}\delta^i_j(F^{kl}F_{kl})]. \qquad (21\text{-}9)$$

مساوات (21-9) کی الجبری صحت کی جانچ آسانی سے کی جا سکتی ہے۔ یہ دیکھا جائے گا کہ مساوات (21-9) کے داہنے طرف کی دوسری رقم صرف F^{kl} کا غیر متغیر "ٹریس" ہے، یعنی:

$$F^{kl}F_{kl} = 2(c^2B^2 - E^2). \qquad (21\text{-}10)$$

$(c^2B^2 - E^2)$ کا غیر تغیر ہونا ایک بار پھر دکھاتا ہے کہ فضا میں کسی مستوا برقی مقناطیسی لہر میں برق اور مقناطیسی میدانوں کے درمیان نسبت مستقل ہے۔

21-2 "آزاد" اشعاعی میدان کے استحالی خواص

میدانی مساواتوں کی طرح برقراریت قوانین بلا ترمیم اضافیتی نظریہ سے مطابقت رکھتی ہیں، اس کے علاوہ مساوات (21-6) کا لارنز استحالہ پھر دکھاتا ہے کہ توانائی کی ترسیل اور تحرک کا بہاؤ مساوی ہیں۔ ہم متغیر برقراریت قوانین اور توانائی تحرک ٹینسر کی شکل سے کئی ایک اور دلچسپ اور اہم نتائج نکالے جا سکتے ہیں:

I - اگر کسی نظام کی توازنی "حالت" کو ایک غیر متغیر وصف ہونا ہے تو ہمیں یہ نتیجہ نکالنا ہوگا کہ نہ صرف برق مقناطیسی قوت بلکہ توانائی اور تحرک وغیرہ کا بیان ایک $f^i = -\partial T^{ij}/\partial x^j$ شکل کے ٹینسر رشتہ کے ذریعہ کیا جا سکتا ہے بلکہ ان سب مقداروں کے کل مجموعہ کو بھی اسی شکل کے مساوات کی تعمیل کرنا ہوگی۔

اس لیے مثال کے طور پر مساوات (21-7) ایک الاسٹک مزاحمتی زور کے تحت وسیلہ کے اندر جائز مساوات ہوگی جس میں W کمیت کثافت (جس میں الاسٹک توانائی کی کثافت شامل ہے)، G میکانی تحرک کی کثافت اور T_{ab}^{M} الاسٹک مزاحمتی زور ہیں۔ اس تشکیل سے ان سب مقداروں کے لیے جو مسلسل وسیلوں کی میکانیات میں آتی ہیں تبادلی مساواتیں مل جاتی ہیں۔ اس بات پر خاص توجہ دیجیے کہ ایک مسلسل وسیلہ کی کمیت کثافت کو اسکیلر نہیں مانا جاسکتا، یا برقی چارج کثافت کی طرح ایک چہار ویکٹر کا جز بھی نہیں مانا جا سکتا، بلکہ یہ میکانکی توانائی تحرک ٹینسر کا (4, 4) جز ہے۔ مقدار $m = \int W\, dv$ وہی استحالی نوعیت رکھتی ہے جو ایک نقطہ کمیت۔ یہ حقیقت ایک بنیادی چارج اکائی کے وجود اور ایک بنیادی کمیت اکائی کے بظاہر عدم وجود سے ہم آہنگ ہیں کمیت کثافت کی ایک ٹینسر جز کی نوعیت عام اضافیتی نظریہ میں مادہ کے کششی عمل کی تشکیل میں اہمیت رکھتی ہے۔

2۔ آئیے ہم ایک حجم v پر غور کریں جس کے اندر پورے حجم میں صرف ایک مقدار آزاد برق مقناطیسی اشعاع کی ہے لیکن جس میں کوئی چارج یا کرنٹ نہیں ہے تب مساوات (21-6) کا توانائی ٹینسر برقراریت کے اس قانون کی تعمیل کرتا ہے،

$$\partial T^{ij}/\partial x^{i} = 0, \qquad (17\text{–}24)$$

اور اس لیے مساوات (17-25) کے مصدقہ کے مطابق:

$$G^{i} = \left(\int c\mathbf{G}\, dv, \int W\, dv\right) = \int T^{4i}\, dv \qquad (21\text{–}11)$$

ایک مخالف متغیر چہار ویکٹر ہے۔ اس لیے ایک اشعاع کے پلس کے تحرک اور توانائی جو مکمل طور پر ایک محدود حجم کے اندر رہیں وہی استحالی اوصاف رکھتے ہیں جو ایک مادی نقطہ ذرہ۔ ایک چارج کے کل میدان کے لیے یہ صحیح نہیں ہے کیونکہ مساوات (17-24) مطمئن نہیں ہوتا۔ ہم اس مسئلہ پر واپس آئیں گے۔ ایک مستوا برق مقناطیسی لہر کے لیے مندرجہ ذیل غیر متغیرہ:

$$G^{i}G_{i} = W^{2} - c^{2}G^{2} \qquad (21\text{–}12)$$

صفر ہوتا ہے اور اس لیے اس طرح کی لہر کے مساوی ذرّے کے اوصاف صفر سکونی کمیت سے مطابقت رکھتے ہیں۔ اس لیے اشعاع جس کی ترسیل رفتار c سے ہوتی ہے ذرّہ کے استحالی قوانین کی پابندی کر سکتی ہے اور پھر بھی محدود تحرک اور توانائی دے سکتی ہے جو کہ غیر ممکن ہوتا اگر سکونی کمیت صفر کے علاوہ کچھ اور ہوتی۔ یہ سب حقیقتیں "روشنی کے کوانٹم" کے تصور سے ہم آہنگ ہیں۔

3۔ ایک برق مقناطیسی لہر کے "فیز" کی تعریف حسب ذیل رشتہ سے ہوتی ہے:

$$E = E_0 e^{i\varphi} = E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad (21\text{-}13)$$

جہاں $\mathbf{k}$ لہری ترسیلی ویکٹر ہے اور ω زاویائی تواتر۔ ایک میدان کے صفر نقطہ کو ایک غیر متغیر طبیعیاتی حقیقت ہونا چاہیے اور اس لیے φ کا غیر متغیر ہونا متوقع ہے۔ اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\varphi = k_i x^i \qquad (21\text{-}14)$$

جب کہ

$$k_i = \left(\mathbf{k}, -\frac{\omega}{c}\right), \quad k^i = -\left(\mathbf{k}, \frac{\omega}{c}\right). \qquad (21\text{-}15)$$

چونکہ $k_i k^i = 0$, اس لیے k^i کا استحالہ ٹھیک اسی طرح ہوتا ہے جیسا ایک صفر سکونی کمیت کے ذرّے کے توانائی تحرک ویکٹر کا۔ اس سے یہ اشارہ ملتا ہے کہ ایک روشنی کے کوانٹم کے تحرک اور توانائی کو بالترتیب $\mathbf{k}$ اور ω کے متناسب بنا دیا جائے جیسا کوانٹم نظریہ میں کیا گیا ہے۔

$\mathbf{k}$ اور ω، کی استحالی نوعیت کی تعریف کرنے میں مساوات (21-15)، ڈاپلر شفٹ اور تارے کی روشنی کے فتور کے لیے اضافتی نقطہ سے درست اظہار حاصل کرنے کا ایک آسان طریقہ مہیا کرتی ہے۔ ایک ماخذ جس کو فریم Σ^0 میں سکونی مان لیجیے۔ x سمت میں اشعاع اس طرح بھیج رہا ہے کہ $k_x^0 = \omega^0/c$. ایک فریم Σ میں k^i پر لارنز استحالہ کا اطلاق کرنے پر ہم پاتے ہیں:

$$\omega = c\gamma\left(\frac{\omega^0}{c} - \beta k_x^0\right) = \frac{\omega^0(1-\beta)}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \omega^0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}. \qquad (21\text{-}16)$$

یہ ڈاپلر شفٹ کے لیے اضافیتی فارمولا ہے۔ اسی طرح فتور کے لیے اظہار k^i کے مکانی اجزا سے پایا جا سکتا ہے۔ فتوری زاویہ θ کے لیے رشتہ

$$\sin \theta = \beta \tag{21-17}$$

ملتا ہے جو مساوات (16-48) سے اتفاق کرتا ہے۔

21-3 مادّی وسیلوں میں برقی مقناطیسی توانائی تحرک ٹینسر

ہم نے دیکھا ہے کہ خلائی برقی حرکیات کے لیے برقراریت قوانین کی ہم متغیری تشکیل سیدھی ہے اور نتیجہ خیز بھی۔ لیکن مادّی وسیلوں میں میکرو میداوں کے لیے الگ سے تشکیل میں کچھ بظاہر مشکوک امر آجاتے ہیں۔ ہم اس مسئلہ پر صرف مختصر بحث کریں گے۔

خلائی برقی حرکیات کے برقراریت قوانین مساوات (21-7) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$-f^j = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = j_i F^{ji}. \tag{21-18}$$

جہاں j_i چہار ویکٹر کرنٹ کثافت ہے۔ اگر ہم یہ مان لیں کہ مادّی وسیلوں میں حجمی قوت f^j اسی طرح سے ملتا ہے جہاں j'_i سے مراد حقیقی (میکرو) کرنٹ اور چارج کی کثافت ہے جو مساوات (18-66) کو مطمئن کرتا ہے تو ہمیں ایک نیا توانائی تحرک ٹینسر داخل کرنا ہوگا، مساوات (21-18) کے مطابقت کا مساوات یہ ہو جاتا ہے:—

$$-f^j = \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i}, \tag{21-19}$$

جہاں

$$S^{ij} = g^{jk}(H^{il}F_{kl} - \tfrac{1}{4}\delta^i_k H^{ml}F_{ml}), \tag{21-20}$$

جب کہ H^{il} کی تعریف وہی ہے جو سیکشن 18-5. میں ہے۔ مساوات (21-19) ہم متغیری ہے کیونکہ مساوات (21-20) سے دیا ہوا S^{ij} ایک ٹینسر ہے اور الجبرا سے برقراریت قوانین صحیح صحیح ملتے ہیں۔ وہ واحد دلیل

جو اس توانائی تحرک ٹینسر کے صحیح ہونے کے خلاف ہے اس حقیقت پہ مبنی ہے کہ یہ متشاکل نہیں ہے، ڈائیلکٹرکوں اور سرایت پذیر اشیا کے لیے $S^{ki} \neq S^{ik}$ ایسا لگتا ہے کہ اگر میکسویل کے میکرو مساوات درحقیقت محض مائکرو خلائی مقداروں کے اوسط ہیں تو تشاکل کے اوصاف میں کوئی فرق نہیں ہو سکتا اور بہت برسوں تک ایک "تصحیح شدہ" (یعنی متشاکل کیا ہوا) توانائی تحرک ٹینسر کو زیادہ تر ماہر طبیعیات ترجیح دیتے تھے۔ لیکن حال میں اس بات پر توجہ دلائی گئی ہے ایک جزوی میدان کے لیے جو سب میکانکی اوصاف کو بھی دائرہ غور سے باہر رکھتا ہے، کوئی وجہ نہیں ہے کہ تشاکل کی شرط رکھی جائے، اور یہ کہ S^{ij} پر جو واحد جائز شرط ہونی چاہیے وہ یہ ہے کہ وہ ہر حالت میں صحیح حجمی لارنز قوت کی مطابقت میں ہونا چاہیے۔ اس مسئلہ پر مولر (دیکھیے حوالہ) نے پوری بحث کی ہے اور دکھایا ہے کہ ثبوت کا جھکاؤ مساوات (21-20) کی تشکیل کی طرف ہے جیسے پہلے پہل منکاوسکی نے حاصل کیا تھا۔ کل توانائی تحرک ٹینسر جس میں میکانکی اور برقی دونوں مقداریں شامل ہیں بے شک بند نظام ہونے سے متشاکل ہے۔ یہ نتیجہ اس لیے ملتا ہے کیونکہ رشتہ $G = N/c^2$ کی تعمیل نظام کے پورے میکانکی اوصاف کے لیے ہونی چاہیے۔

21-4 **برق مقناطیسی کمیت** سیکشن 21-2 میں ہم نے "آزاد" برق مقناطیسی میدان کے توانائی تحرک ٹینسر پر غور کیا اور یہ نتیجہ نکالا کہ ایک محدود فضائی خطہ کے اوپر اس کے اینٹگرل ایک صفر سکونی کمیت کے ایک توانائی تحرک ویکٹر کی تعریف کرتے ہیں۔ اس نتیجہ کے واسطے ایک ضروری شرط یہ تھی کہ ایسی محدود حدیں مل سکیں کہ میدان اور اس لیے توانائی تحرک ٹینسر کے اجزا حدوں پہ غائب ہوں۔ "آزاد اشعاعی میدان" کے لیے یہ شرط پوری کی جا سکتی ہے لیکن ایک برقی چارج کے پورے میدان کے لیے نہیں۔ کسی حد تک تواریخی وجوہات کے سبب سے ہم اس مسئلہ پر دو حصوں میں غور کریں گے جس سے مختلف مشمول سوالات الگ کیے جا سکیں: اس سیکشن میں ہم اپنے کو غیر اضافیتی حالت ($c \gg u$) کے لیے محدود رکھیں گے اور اس کے

علاوہ صرف برق متناطیسی قوتوں پر غور کریں گے۔ سیکشن 9-21 سے لے کر 21-12 تک زیادہ عام حالت پر غور کیا گیا ہے اپنی اس بحث سے ہم ایک نقطہ چارج کی حرکت کے پورے اضافیتی مساوات پر سیکشن 21-13 میں پہنچیں گے۔

ایک ایسے چارج پر غور کیجیے جسے سہولت کے لیے اپنے سکونی فریم میں کروی متشاکل مان لیا گیا ہے اور مان لیجیے کہ یہ کسی عام فریم میں ایک چھوٹی رفتار u سے x سمت میں حرکت کر رہا ہے۔ سکونی فریم Σ^0 میں توانائی تحرک کے اجزا یہ ہیں:۔

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} -(T^M_{\alpha\beta})^0 & 0 \\ 0 & W_0 \end{pmatrix}, \qquad (21\text{–}21)$$

جہاں W_0 برق سکونی میدان کی توانائی کثافت ہے۔ اگر ہم صرف انہیں رقموں کو لیں جو $\beta = u/c,$ میں پہلے درجہ کی ہیں تو ہمیں مناسب تبادل سے (عام فریم Σ میں Σ^0 کو ایک مثبت رفتار دینے پر) ملتا ہے:

$$T^{14} = \beta[W_0 - (T^M_{11})^0], \qquad (21\text{–}22)$$

$$T^{44} = W_0. \qquad (21\text{–}23)$$

اگر ہم صرف انہیں رقموں کو رکھیں جو $u/c,$ میں خطی ہیں تو فریم Σ^0 میں میدانوں کا کروی تشاکل $\Sigma,$ میں برقرار رہے گا اور اس درجے کے اندر فضا کے اوپر انٹگریشن Σ اور $\Sigma^0.$ میں مختلف قیمتوں پر پھیلا ہوا نہیں ہوگا، لہٰذا میدان کی تحرک اور توانائی مندرجہ ذیل عبارات سے ملیں گے۔

$$cG_x = \int T^{14}\,dv = \beta \int [W_0 - (T^M_{11})^0]\,dv, \qquad (21\text{–}24)$$

$$U = \int T^{44}\,dv = \int W_0\,dv. \qquad (21\text{–}25)$$

لیکن اگر Σ^0 میں کل برق سکونی میدانی توانائی U_0 ہے تو

$$\int W_0\,dv = U_0, \qquad (21\text{–}26)$$

اور

$$\int (T_{11}^{M})^0 \, dv = \epsilon_0 \int (E_{x0}^2 - \tfrac{1}{2}E_0^2)\, dv$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{6} \int E_0^2 \, dv = -\frac{U_0}{3}, \qquad (21\text{–}27)$$

جہاں ہم نے اس حقیقت کا استعمال کیا ہے کہ $E_x^2 = E^2/3$ اگر ایک کروی تشاکل کے میدان پر اوسط لیا جائے۔ ظاہر ہے کہ $G_y = G_z = 0.$ لہٰذا

$$\mathbf{G} = \left(\frac{4}{3}\,\frac{U_0}{c^2}\right)\mathbf{u}, \qquad (21\text{–}28)$$

اور

$$U = U_0. \qquad (21\text{–}29)$$

مساوات (21-28) کی مطابقت ایک "کمیت" سے ہے جو $4U_0/3c^2$, کے برابر ہے جب کہ معمولی اضافیتی رشتہ (17-42) میں جزو 4/3. نہیں آتا۔ اس لیے کسی چارج کے پورے برق مقناطیسی میدان کو محض ایک میکانکی شئے نہیں سمجھا جا سکتا۔ اس کے برخلاف ایک آزاد برق مقناطیسی لہر کے برق مقناطیسی میدان کو ایسا سمجھا جا سکتا ہے۔ دھیان رکھیے کہ یہ نتیجہ پورے میدان کی توانائی کے لیے لاگو ہے جس میں کولوم میدان اور اشعاعی میدان دونوں شامل ہیں۔ اگلے سیکشن میں یہ مان کر کہ اب بھی $u \ll c$ ہم اسی مسئلے پر غور کریں گے لیکن اتنے رسمی طور پر نہیں۔

21-5 برق مقناطیسی کمیت پر کیفی غور

اگر ہم کسی الکٹران کے میدانوں کی توانائی اور تحرک کے توازن پر غور کریں تو ہم فوراً حسب ذیل کیفی نتائج پر پہنچتے ہیں:

1. اگر ایک الکٹران یکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے تو اس کے میدان کا تحرک میں حصہ ہوگا کیوں کہ رفتار میں ایک قلیل خیالی تبدیلی سے ذرہ اور میدان دونوں کے تحرک ایک ساتھ تبدیل ہوں گے۔

2. اگر کسی خارجی قوت کی وجہ سے پیدا ہوئے اسراع کے سبب سے کوئی الکٹران اشعاع خارج کرتا ہے تو خارجی قوت میدان کی تبدیلیوں

کے لیے درکار توانائی تحرک دونوں مہیا کرے گی۔ ایسا صرف ایک ردِ عملی قوت کے ذریعہ ہو سکتا ہے جو اشعاعی میدان کے خود الکٹران پر عمل سے پیدا ہوگا۔

کسی قدر زیادہ مقداری نتائج پر پہنچنے کے لیے آئیے ہم پہلے الکٹران کو رفتار $u \ll c$ سے یکساں حرکت میں مان لیں۔ اگر رفتار ایک مقدار δu، سے بدلتی ہے تو ویکٹر مضمر میں تبدیلی یہ ہوگی:۔

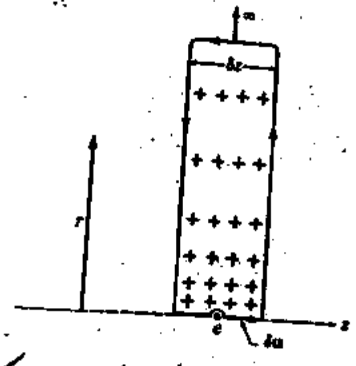
$$\delta \mathbf{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r}\,\delta \mathbf{u}. \qquad (21\text{–}30)$$

اس مقناطیسی فلکس پر غور کیجیے جو ایک پتلی پٹی کے رقبہ میں سے گزرتی ہے جو δu کے عمودی ہے اور الکٹران سے لے کر لامتناہیہ تک گئی ہے جیسا شکل 21-1. میں دکھایا ہے۔ پٹی کے شکل میں دکھائے رقبہ میں جانے والے فلکس میں تبدیلی یہ ہے:

$$\delta \Phi = \oint \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \qquad (21\text{–}31)$$

فلکس کی یہ تبدیلی الکٹران کے مقام پر ایک برقی میدان پیدا کرے گی جس کی سمت ایسی ہوگی کہ رفتار کی تبدیلی کی مخالفت کرے، خصوصاً ایک ردِ عملی قوت $\mathbf{F}$ پیدا ہوگا جو اس طرح ملے گا:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} = -e\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 e^2}{4\pi r_0}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{r_0 c^2}\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \qquad (21\text{–}32)$$



(شکل 21-1. رفتار میں ایک قلیل تبدیلی کے لیے الکٹران کے ردِ عمل کا کیفی حساب کرنے کے لیے انتظامِ ترسیم کا راستہ)

جہاں r_0 ، r کی وہ کمترین قیمت ہے جس پر مان لیا جاتا ہے کہ مساوات (21-30) سے ملا دیکیٹر مصنر الکٹران کی اپنی بناوٹ کی وجہ سے جائز نہیں رہتا۔ (اگر ایک نقطہ الکٹران مان لیا جائے تو ردِ عمل لا انتہا ہوگا)۔ اس لیے کسی برقی سرکٹ کے "مخالف برقی محرک قوت" کی ٹھیک مشابہت میں یہ عمل ایک "استمراری ردِ عمل" پیدا کرتا ہے۔

$$\mathbf{F} = -m\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \qquad (21\text{-}33)$$

جہاں m ایک موثر کمیت ہے جسے،

$$m \simeq \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{r_0c^2}, \qquad (21\text{-}34)$$

سے بتایا جاسکتا ہے، یا گاس کی اکائیوں میں $m \simeq e/r_0c^2$.

برق مقناطیسی نوعیت کی "استمراری کمیت" کے واسطے مساوات (21-34) مقناطیسی ترغیبی میدان کے الکٹران پر ردِ عمل کو خیال میں رکھ کر حاصل کیا گیا تھا اسی طرح کا ایک تخمینہ یہ دھیان میں رکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے کہ چارج e کے ایک کروی تقسیم چارج کی جس کا نصف قطر r_0 ہے برق سکونی توانائی،

$$U_0 = \tfrac{1}{2}\int \epsilon_0 E^2\, dv \qquad (21\text{-}35)$$

کا درجہ ہے؛

$$U_0 \simeq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_0}, \qquad (21\text{-}36)$$

جس کی تصدیق باب 1 میں ہو چکی ہے۔ اس لیے مساوات (17-42) کا اضافیتی کمیت، توانائی رشتہ پھر کمیت کا وہی تخمینہ دیتا ہے جو مساوات (21-34) سے ملا تھا۔

دھیان رکھیے کہ اس تفتیش سے صرف کمیت کے تخمینے ملے ہیں کیوں کہ r_0 صرف کسی ممکن ماڈل کے ابعاد کو ظاہر کرتا ہے لیکن U_0 اور m کے درمیان رشتہ ایسے طریقے سے دریافت کیا جاسکتا ہے جو کسی ماڈل پر منحصر

نہیں ہے اگر ہم باب 10 کے تحرک کثافت کے عام بیان $\mathbf{g} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2$ کا استعمال
کریں۔ تب میدان کا کل تحرک یہ ہوگا :

$$\mathbf{G} = \int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}\, dv. \tag{21-37}$$

اگر ہم پھر میدان کو ایک نقطہ چارج کا میدان لیں تو اینٹگرل توسیعی ہو جائے گا
اس لیے ایک نیچی حد جو الکٹران کے ایک محدود نصف قطر r_0 سے مطابقت رکھتی
ہے داخل کرنی ہوگی۔ کم رفتاروں کے لیے یہ اینٹگریشن تقریبی سکونی میدانوں
کا استعمال کرکے بہت آسانی سے کیا جا سکتا ہے جن کے لیے :

$$\mathbf{H} = \epsilon_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E}. \tag{21-38}$$

ایک متشاکل تقسیم چارج کے لیے تحرک

$$\mathbf{G} = \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E})}{c^2}\, dv = \epsilon_0 \int \frac{\mathbf{u}E^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}}{c^2}\, dv, \tag{21-39}$$

رفتار کی سمت کے گرد محوری تشاکل رکھتا ہے اور یہ صاف ہے کہ $\mathbf{G}$ خود $\mathbf{u}$,
کی سمت میں ہے جسے ہم x- سمت لے سکتے ہیں۔ اس لیے اینٹگرینڈ کی دوسری
رقم محض $\mathbf{u}E_x^2$. ہے کم رفتاروں کے لیے $\mathbf{E}$ کروی تشاکل رکھتا ہے اور اگر ہم
مساوات (21-35) کا استعمال کریں تو

$$\mathbf{G} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 (E_y^2 + E_z^2)\mathbf{u}\, dv}{c^2} = \frac{2\mathbf{u}}{3} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2\, dv}{c^2} = \frac{4}{3}\, \frac{U_0}{c^2}, \tag{21-40}$$

اس لیے مساوات (21-40), جو بالکل وہی ہے جو مساوات (21-28) کیفی طور
پر مساوات (21-34) میں دیے ہوئے برق مقناطیسی کمیت سے اتفاق کرتا ہے
لیکن کمیت توانائی کے صحیح رشتہ کی خلاف ورزی کرتا ہے۔ ایک زائد کمیت
$-U_0/3c^2$, کی جو برق مقناطیسی نوعیت کی نہیں ہے ضرورت ہے۔ اس لیے
کہ مشاہدہ میں پائے گئے کمیت سے جو صحیح اضافیتی مساواتوں کی پابندی کرتا
ہے مطابقت ہو سکے۔ ایسا مانا جا سکتا ہے کہ یہ زائد کمیت (یا توانائی) وہ
غیر برق مقناطیسی بندش ظاہر کرتی ہے جس کی موجودگی الکٹرانی چارج کے

نظام کے استحکام کے لیے ضروری ہے ۔ اس کی ضرورت پر لورینز نے توجہ دلائی تھی۔

21-6 ردِ عمل جو اشعاع کے ذریعہ خارج توانائی کی برقراریت کے لیے ضروری ہے

ہم نے دیکھا ہے کہ میدان کے تحرک سے متعلقہ کمیت ایک ردِ عمل کی وجہ سے ہے جو اس ہر چیز پر کام کرتا ہے جو یکساں حرکت کرنے والے الکٹران کی رفتار کو بدلنے کی کوشش کرتا ہے۔ آئیے اب ہم اس ردِ عمل قوت کو دریافت کریں جو الکٹران میں اسراع ہونے پر موجود ہونا چاہیے اور جس سے غیر اضافیتی رفتاروں کے لیے حسب ذیل خسارۂ توانائی ہوتا ہے۔

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{e^2\dot{u}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \qquad (20\text{-}19)$$

توانائی کو برقرار رکھنے کے لیے ردِ عمل قوت F کو اس شرط کی پابندی کرنا چاہیے:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\dot{u}^2}{c^3} = 0. \qquad (21\text{-}41)$$

ظاہر ہے کہ اس مساوات سے F کا کوئی ایسا حل نہیں مل سکتا جو ہمیشہ وقت کے ہر لمحہ پر صحیح ہو کیوں کہ u اور $\dot{u}$ بنیادی طور پر ایک دوسرے پر غیر منحصر ہیں۔ ہمیں ایسے حل پر اکتفا کرنا ہوگی جو وقت کے کافی بڑے وقفہ کے اوپر اوسط ظاہر کرتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ قوت اور اشعاعی میدان کے درمیان توانائی کا صرف ایک اوسطی توازن ہے اور ایک زائد آتار چڑھاؤ ملے گا جو ترغیبی میدان میں جمع رہے گا۔ اس دلیل کے مطابق مساوات (21-41) یہ ہو جاتا ہے:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,\dot{u}^2\,dt = 0. \qquad (21\text{-}42)$$

ٹکڑوں میں انٹگرل نکالنے پر یہ ملتا ہے:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F} - \frac{e^2\ddot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3}\right)\cdot\mathbf{u}\,dt + \left[\frac{e^2\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3}\right]_{t_1}^{t_2} = 0. \qquad (21\text{-}43)$$

اینٹگریٹ کی ہوئی رقم اُس "اُتار چڑھاؤ" کو ظاہر کرتی ہے جس کا اوپر ذکر کیا گیا ہے از اینٹگریشن سے حاصل توانائی کے توازن پر اس کا کوئی اثر اس حالت میں نہیں ہوگا جب الکٹران کی حرکت ارتعاشی ہے یا اس کا اسراع تھوڑے وقت کے لیے ہوتا ہے۔ اوسطاً توانائی برقرار رہے گی اگر ہم تابانی کی ردّ عمل قوت کے لیے یہ رکھیں

$$F_{react} = \frac{e^2 \ddot{u}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{21-44}$$

یہ ردِّ عمل اُس کے علاوہ ہے جس کی مانگ تحرک کی برقراریت کرتی ہے۔ تب خود الکٹران پر کل برق مقناطیسی ردِّ عمل یہ ہوگا :

$$F = \frac{e^2 \ddot{u}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - m_{el.\,mag.}\,\dot{u}, \tag{21-45}$$

جہاں $m_{el.\,mag.}$ وہ برق مقناطیسی کیست ہے جو مساوات (21-40) سے ملتی ہے ؛

$$m_{el.\,mag.} = \frac{4}{3}\,\frac{U_0}{c^2}. \tag{21-46}$$

21-7 مسطح میدانوں سے اشعاعی ردِّ عمل کا سیدھا حساب

مساوات (21-45) کو الکٹران کے ایک حصّے کے اشعاعی میدان کے دوسرے حصّوں کے ساتھ تفاعل کے سیدھے اینٹگریشن سے حاصل کرنا سبق آموز ہے۔ یہ حساب جیسے پہلے پہل لارنز نے لگایا تھا، نظریے کی خامیوں کو بہت صاف ظاہر کرتا ہے۔ اس حساب کے لیے ہم مندرجہ ذیل باتیں مان لیں گے :

(1) ہم ایک فریم ایسا لیں گے کہ الکٹران کا کوئی قطعہ de جس پر دوسرا قطعہ de کام کرتا ہے ساکن ہے ؛ $u(t)_{de} = 0.$

(2) اتنے وقت کے اندر جو ایک برق مقناطیسی سگنل کو الکٹران کو پار کرنے میں لگتا ہے $u, \dot{u}, \ddot{u},$ وغیرہ میں سے کوئی مقدار بہت زیادہ

نہیں بدلتی۔ یہ ان شرائط کے مترادف ہے کہ $u \ll c,\ \dot{u} \ll c^2/r_0,\ \ddot{u} \ll \dot{u}c/r_0$
وغیرہ حل دراصل آپریٹر $\partial/\partial t$ $\tau_0 = r_0/c = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^3$ گنے میں ایک قوتی سلسلہ
ہے۔

(3) میدانوں کو مبطی لینا رڈ۔ ویشرٹ مضمروں کے ذریعہ اخذ کیا جائے گا۔ (سیکشن (21-12) سے موازنہ کیجیے)۔

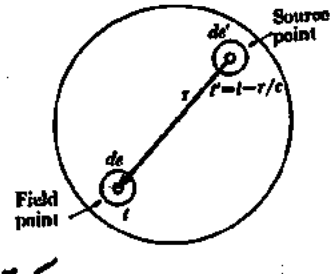
(4) صرف انہیں رقموں کی کوئی طبیعیاتی اہمیت سمجھی جائے گی جن میں صریحی طور پر r_0 شامل نہیں ہے۔

(5) الکٹران کے تقسیم چارج میں ایک کرّوی تشاکل ہے۔

x_e پر مقیم ایک قطعہ چارج de پر غور کیجیے جس $x_{e'}$ پر مقیم ایک قطعہ چارج de' اثر انداز ہے جیسا شکل 21-2 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات (20-13) سے de' کی وجہ سے x_e پر برقی میدان یہ ہے:

$$4\pi\epsilon_0\, d\mathbf{E}(t) = \frac{de'}{s^3}\left\{\frac{1}{c^2}\mathbf{r}\times\left[\left(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{u}(t')r}{c}\right)\times\dot{\mathbf{u}}(t')\right] + \left[1-\left(\frac{u(t')}{c}\right)^2\right]\left(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{u}(t')r}{c}\right)\right\}. \qquad (21\text{-}47)$$

چونکہ میدان کو الکٹران کی t' پر حالت کے لحاظ سے ظاہر کیا گیا ہے اس لیے اگر ہم کہنی من چاہی حرکتوں کی اجازت دیں تو الکٹران کے پورے مادّہ کے متعلق جانکاری کے بغیر مسئلہ کا حل غیر ممکن ہے۔



(شکل 21-2. الکٹران کے ایک حصّہ کے دوسرے حصوں کے تئیں تفاعل کا حساب لگانے کیلئے)

صرف اوپر نمبر z پر دی گئی پابندی کے ذریعہ مسئلہ کا حساب ممکن بنایا جاسکتا ہے۔ حرکت پر ان پابندیوں کے ہونے سے یہ ممکن ہے کہ سب رفتاروں اور اسراع کا جو وقت t پر سگنل پیدا کرنے میں حوالہ وقت t کے لحاظ سے جب سگنل de پر پہنچتے ہیں دیا جاسکے۔ کل خود۔ قوت معلوم کرنے کے لیے انٹیگریشن متقل وقت t' پر کرنا ہوگا اور اس لیے وقت t پر کرنا ہوگا جو الکٹرانی ترتیب کے اوپر ایک سا نہیں ہے۔ t سے t' میں تبدیلی $t' = t - r/c$ کے فنکشنوں کو r/c کی قوتوں میں پھیلا کر حاصل کی جاسکتی ہے۔ ساتھ میں یہ یاد رکھنا ہوگا کہ مفروضہ (1) کے مطابق $\mathbf{u}(t) = 0$,

$$\dot{\mathbf{u}}(t') = \dot{\mathbf{u}}(t) - \frac{r}{c}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \cdots, \qquad (21\text{–}48)$$

$$\mathbf{u}(t') = -\frac{\dot{\mathbf{u}}(t)r}{c} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}(t)}{2}\left(\frac{r}{c}\right)^2 - \cdots, \qquad (21\text{–}49)$$

$$s^{-3} = r^{-3}\left[1 - \frac{3\dot{\mathbf{u}}(t)\cdot\mathbf{r}}{c^2} + \frac{3r}{2}\left(\frac{\ddot{\mathbf{u}}(t)\cdot\mathbf{r}}{c^3}\right)\cdots\right]. \qquad (21\text{–}50)$$

آیئے ہم وہی رقمیں رکھیں جو $(r/c)^3$؛ درجہ تک ہوں؛ اس لیے $[\mathbf{u}(t')/c]^2$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے، اور اس طرح جو عبارت حاصل ہوگی وہ بہت سادہ ہو جائے گی۔ تب مساوات (21-47)، t کے لحاظ سے یہ ہو جاتا ہے؛

$$4\pi\epsilon_0\, d\mathbf{E} = de'\left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{u}})}{r^3c^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}}{rc^2} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{u}})}{r^2c^3} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{c^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right.$$
$$\left. - \frac{3\mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r})}{r^3c^2} + \frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}}{r^2c^3}(\ddot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r}) + \frac{\dot{\mathbf{u}}}{rc^2} - \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{2c^3}\right]$$
$$= de'\left[-\frac{2\mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r})}{r^3c^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{r}(\ddot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r})}{r^2c^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{2c^3}\right]. \qquad (21\text{–}51)$$

اگر ہم مساوات (21-51) کو ٹینسر نوٹیشن میں لکھیں تو کروی تشاکل کے مفروضہ کا فائدہ اٹھانا زیادہ آسان ہوگا:

$$dE_\alpha = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2r_\alpha(\dot{u}_\beta r_\beta)}{r^3c^2} + \frac{1}{2}\,\frac{r_\alpha(\ddot{u}_\beta r_\beta)}{r^2c^3} + \frac{r_\alpha}{r^3} + \frac{\ddot{u}_\alpha}{2c^3}\right]. \qquad (21\text{–}52)$$

اب ایک کروی تشاکل والے خطّے کے اوپر r_a کا اوسط صفر ہے، اور $r_a r_\beta$ کا اوسط محض $\frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}$ ہے اس لیے مساوات (21-52) کی تیسری رقم کا حصّہ آخری اینٹگرل میں کچھ نہیں ہوگا، اور ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\overline{dE_a} = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{2}{3}\,\frac{\dot{u}_a}{c^2 r} + \frac{2}{3}\,\frac{\ddot{u}_a}{c^3}\right). \qquad (21\text{-}53)$$

de' اور de کے اوپر اینٹگرل لینے پر ہمیں ردِّ عمل قوت کے لیے یہ ملتا ہے:

$$\mathbf{F} = \iint de\, d\mathbf{E} = \frac{e^2 \ddot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - m_{\text{el. mag.}}\, \dot{\mathbf{u}}, \qquad (21\text{-}54)$$

جہاں

$$m_{\text{el. mag.}} = \frac{4}{3c^2} \iint \frac{de\, de'}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{4}{3c^2}\, U_0, \qquad (21\text{-}55)$$

جہاں U_0 پھر الکٹران کی برق سکونی توانائی خود اپنے میدان میں ظاہر کرتا ہے۔ یہ مساوات (21-46) سے پورا اتفاق کرتا ہے جو برقراریت توانین کے مطابق لازمی ہے۔

مساوات (21-54) میں جو رقم $\ddot{\mathbf{u}}$ کے نسبت والی ہے: الکٹران کی وسعت پر غیر منحصر ہے اور اس لیے مانا جا سکتا ہے کہ الکٹران کی تفصیلی بناوٹ سے بھی بے تعلق ہے۔ بے شک کمیت والی کڑی بناوٹ پر منحصر ہے لیکن اس کا برق سکونی توانائی سے رشتہ اس پر منحصر نہیں ہے۔ اگر ہم حساب کو r/c کے زیادہ اونچے درجوں تک لے جاتے تو مزید رقمیں ایک چڑھتے r_0 کا سلسلہ بناتیں جسے ہمارے مفروضہ 4_1 کے مطابق کسی طبیعیاتی اہمیت کا نہیں مانا جا سکتا۔

21-8 حرکت مساوات کے خواص

آیئے ہم ایک چارج شدہ ذرّے پر غور کریں جو مساوات (21-45) سے ملے خود۔ قوت $\mathbf{F}$ کے علاوہ ایک خارجی قوت $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ کے زیرِ اثر ہے۔ تب مساواتِ حرکت یہ ہوتا ہے:

$$\mathbf{F}_{ext} - \frac{e^2\ddot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - m_{el.\,mag.}\dot{\mathbf{u}} = m_{non\text{-}el.\,mag.}\dot{\mathbf{u}}, \qquad (21\text{–}56)$$

جہاں $m_{non\text{-}el.\,mag.}$ ذرّہ کی وہ کمیت ہے جو اُس کے برقی مقناطیسی میدان سے تعلق نہیں رکھتی۔ کمیت کا برق مقناطیسی اور غیر برق مقناطیسی حصّوں میں الگ کرنا بامعنی نہیں مانا جاسکتا اور اس لیے ہم مساوات (21–56) کو اس طرح لکھتے ہیں

$$m_0\dot{\mathbf{u}} - \frac{e^2\ddot{\mathbf{u}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \mathbf{F}_{ext}, \qquad (21\text{–}57)$$

جہاں m_0 تجربی سکونی کمیت ہے۔ ہم پہلے مساوات (21–57) کے نتائج کا مطالعہ کریں گے جس میں ہم پھر اپنی توجہ غیر اضافیتی رفتاروں $u \ll c$. تک محدود رکھیں گے۔

مساوات (21–57) کے تکمیلی حلوں میں ایسی رقمیں ہیں جن کا وقت پر انحصار مندرجہ ذیل سے ملتا ہے:

$$e^{+3t/2\tau_0}, \qquad (21\text{–}58)$$

جہاں $\tau_0 = r_0/c = e^2/4\pi\epsilon_0 m_0 c^3 = 10^{-23}$ سیکنڈ (جو ایک فراری الیکٹران بناتا ہے) ظاہر ہے کہ طبیعیاتی لحاظ سے ناقابلِ قبول نہیں، اس لیے یا تو ہمیں مساوات (21–57) کی صحت پر شک کرنا ہوگا یا اس کے ساتھ من ملنے ڈھنگ سے ایسی شرطیں جوڑنی ہوں گی جو ایسے فراری حلوں کو خارج کر دیں جس حد تک کلاسکی نظریے کا اطلاق ہوتا ہے مساوات (21–57). کی صحت پر شبہ کرنا مشکل سے معقول سمجھا جاسکتا ہے کیونکہ دوسری رقم کسی خاص ماڈل سے بے تعلق ہے اور کیوں کہ تجربہ سے حاصل ہوئی کمیت کا استعمال اس کی نظریاتی بنیاد کی بابت ہماری بے علمی کو سامنے نہیں لاتا۔

اس لیے آیئے ہم ان شرائط کا امتحان لیں جن کے تحت مساوات 21-57 کے فراری حلوں کو بچایا جاسکتا ہے۔ اگر ہم اینٹگریٹ کرنے والے جز exp $(-3t/2\tau_0)$ سے ضرب کرنے کے بعد اینٹگرل نکالیں تو ہمیں یہ ملتا ہے:

$$e^{-3t/2\tau_0}\dot{\mathbf{u}}(t) = e^{-3t_0/2\tau_0}\dot{\mathbf{u}}(t_0) - \frac{3}{2\tau_0}\int_{t_0}^{t}\frac{\mathbf{F}(t')}{m_0}e^{-3t'/2\tau_0}dt', \qquad (21\text{–}59)$$

یا :

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = e^{(3/2\tau_0)(t-t_0)}\hat{\mathbf{u}}(t_0) - \frac{3}{2\tau_0}\int_{t_0}^{t}\frac{\mathbf{F}(t')}{m_0}e^{-3(t'-t)/2\tau_0}\,dt', \quad (21\text{-}60)$$

جہاں t_0 کوئی ایک مستقلہ ہے۔ مساوات (21-60) کا معائنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ فراری حلوں کو صرف اُس حالت میں بچایا جا سکتا ہے اگر ہم $t_0 = \infty$, چن لیں، کیونکہ تب جیسے $t \to \infty$. ویسے $(-3t/2\tau_0)] \to 0$ اس مفروضہ کے تحت

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \frac{3}{2\tau_0}\int_{t}^{\infty}\frac{\mathbf{F}(t')}{m_0}e^{-3(t'-t)/2\tau_0}\,dt'. \quad (21\text{-}61)$$

اس لیے ایک وقت t پر ذرّہ کے اسراع کا تعین سرعت پیدا کرنے والی قوت $\mathbf{F}$ سے ہوتا ہے جو وقت t کے بعد کے ایک 10^{-23}sec کے درجہ کے وقفہ پر لیا گیا ہے۔ آیا یہ نتیجہ جو بظاہر سببیتی رشتہ کی ایک 10^{-23} sec. کے وقفہ کے اوپر خلاف ورزی کرتا ہے۔ مساوات (21-61) کی طرح کے نتائج کو ناقابل قبول بنا دیتا ہے، ایک ایسا سوال ہے جسے کھلا چھوڑنا ہوگا، کیونکہ کلاسکی طریقہ خیال عام طور سے ایسے قلیل وقتی وقفوں پر لاگو نہیں ہوتے۔ یہ مشورہ دیا گیا ہے کہ مساوات (21-61) کو مساوات (21-57). سے زیادہ بنیادی خیال کرنا چاہیے۔*

21-9 چارج کی وجہ سے برق مقناطیسی میدان کے میکانکی خواص کا ہم متغیری بیان

اس سے پہلے کے سیکشنوں میں ہم نے ایک چارج کے برق مقناطیسی میدان کی کم رفتاری نظریے پر غور کیا اور ایسا کرنے میں کئی دقتیں ہمارے سامنے آئیں۔ یہ دقتیں دو طرح کی ہیں: (a) ایک نقطہ چارج کی توانائی کے انٹگرلوں

* F. Rohrlich, "The Classical Electron," in Brittin and Downs, eds., *Lectures Delivered at the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1959*, Vol. 2 of *Lectures in Theoretical Physics*, Interscience Publishers, *Am. J. Phys.* 28, 639 (1960).
اس کے علاوہ دیکھیے

کا وسعتی ہونا اور (b) برق مقناطیسی میدان کی توانائی اور تحرک کے تبادلی اوصاف کا اضافیتی لحاظ سے صحیح نہ ہونا۔ پہلی دقت بنیادی طور پر چارج کی واقعی بناوٹ کے بارے میں ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے اور اس نے اس طرح بچا جا سکتا ہے کہ وسعتی اینٹگرلوں اور ساتھ میں شامل کمیت کے غیر برق مقناطیسی ماٰخذ کی جگہ عملی طور پر تجرباتی کمیت کی قیمتوں کو رکھ دیا جائے۔

دوسری دشواری اس امر کی وجہ سے پیش آتی ہے کہ عبارت (21-11)

$$G^i = \int T^{4i}\, dv, \qquad (21\text{-}62)$$

بنیادی طور پر ہم متغیر نہیں ہے جب تک کہ میدان سیکشن 21-4 کے معنی میں "آزاد" نہ ہو۔ اس مقدار کی میدان کے توانائی تحرک ویکٹر شناخت سیکشن 10-5 اور 10-6 میں ہوئی بحث پر مبنی ہے جس میں توانائی اور تحرک کا سہ ابعادی فضا کے کسی من مانے حجم میں "میدان" اور "مادّہ" کے درمیان توازن کیا گیا تھا۔ گو کہ اس قسم کا اظہار صحیح میکرو برقراریت قوانین دیتا ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مادّہ اور میدان کے درمیان فرق کے تعین کا طریقہ نہیں ہے۔ اس لیے یہ سوال مناسب معلوم ہوتا ہے کہ آیا ہم کسی پورے طور سے ہم متغیر اظہار کو مساوات (21-62) کی جگہ رکھ سکتے ہیں جو بذاتِ خود برق مقناطیسی میدان کے میکانکی پہلوؤں کے لیے صحیح اضافیتی تبادلی اوصاف دے۔ ایک سہ ابعادی حجم dv کا چہارہ فضا میں ہم متغیری تقسیم ایک ہائپر سطح ہے جس کا ایک چہار ویکٹر $d\sigma$ کی شکل میں اظہار ہو سکتا ہے۔ یہ ویکٹر مانندِ وقت ہونا چاہیے اور ایک ایسے فریم میں جس کے لیے زیرِ بیان حجم سکونی ہے، اس کی قیمت یہ ہو جائے گی۔

$$dJ^i = (0, dv) \qquad (21\text{-}63)$$

اس لیے:

$$dJ^i = u^i\, dv^0. \qquad (21\text{-}64)$$

رکھتے ہیں جہاں u^i معمولی چہار۔رفتار ہے اور اس لیے dv^0

"موزوں" حجمی قطعہ ہے، لہذا ایک غیر متغیرہ ہے۔

مساوات (21-62) کی ایک ہم متغیرّی تعمیم جس میں سہ ابعادی قطعہ کی جگہ ہم متغیرّی ہائپر سطح لے لیتی ہے یہ ہے :

$$G_e^i = \int T^{ji}\, dJ_j = \int u_j T^{ji}\, dv^0. \tag{21-65}$$

ایسے چارج کے لیے جو ساکن فریم میں کرّوی تشاکل رکھتا ہے اس انٹیگرل کی قیمت آسانی سے نکالی جاسکتی ہے سیکشن 21-4, کے نوٹیشن میں ہم یہ پاتے ہیں :

$$\begin{aligned} G_e^4 &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int T^{44}\, dv^0 + \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int T^{41}\, dv^0 \\ &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int \left\{ \frac{W_0 - \beta^2 (T_{11}^M)^0}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 [W_0 - (T_{11}^M)^0]}{1-\beta^2} \right\} dv^0 \\ &= (1-\beta^2)^{-1/2} \int W_0\, dv^0 = \gamma U_0, \end{aligned} \tag{21-66}$$

اور

$$\begin{aligned} G_e^1 &= -\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int T^{11}\, dv^0 + \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int T^{14}\, dv^0 \\ &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int \left\{ -\beta \frac{[-(T_{11}^M)^0 + \beta^2 W_0]}{1-\beta^2} + \frac{\beta [W_0 - (T_{11}^M)^0]}{1-\beta^2} \right\} dv^0 \\ &= \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \int W_0\, dv^0 = \beta\gamma U_0. \end{aligned} \tag{21-67}$$

اس لیے حسب توقع ہم پاتے ہیں :

$$G_e^i = (\beta\gamma U_0, \gamma U_0), \tag{21-68}$$

جو کہ اضافیتی استحالی قوانین سے اتفاق کرتا ہے کیونکہ تعریف کے مطابق سکونی فریم میں

$$G_e^{i0} = (0, U_0). \tag{21-69}$$

اس لیے اگر ہم میدان کی تحرک اور توانائی کی تعریف مساوات (21-65) سے کریں تو ایک مکمل طور سے اضافیتی نظریہ حاصل ہوتا ہے۔

دھیان رکھیے کہ برقی قوتوں کے تحت کسی چارج کے استحکام کے مسئلہ میں اس تشکیل سے براہِ راست کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ سکونی فریم میں میکسوئل

مزاحمتی زوروں کا حجمی اینٹگرل صفر سے مختلف رہتا ہے یعنی

$$\int (T_{11}^{M})^{0}\, dv = -U_0/3, \qquad (21\text{–}70)$$

اور جیسا سیکشن 21-4 کے آخر میں بتایا گیا تھا اکائی چارج کو مستحکم بنانے کے لیے
اب بھی "پوانکیر بندشی قوت" کی ضرورت ہے۔ لیکن توانائی تحرک ویکٹر کی
ہم متغیری تشکیل سے یہ ممکن ہو سکا ہے کہ برقی مقناطیسی اور غیر برقی مقناطیسی
میکانکی اوصاف کے درمیان ایک ہم متغیری طریقہ سے تمیز کی جاسکے۔
آیئے ہم ایک ہم متغیری مساوات لکھیں

21-10 اضافیتی حرکت مساوات

جو موزوں فریم میں مساوات (21-57)
بن جائے ایسے مساوات کی عام شکل یہ ہونی چاہیے۔

$$m_0 c^2 \frac{du^i}{ds} - F^i_{react} = F^i_{ext}, \qquad (21\text{–}71)$$

جہاں F^i_{ext} ایک خارجی منکاوسکی چہار قوت ہے (دیکھیے سیکشن 17-5)
اور F^i_{react}

$$\frac{e^2 \ddot{u}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \qquad (21\text{–}72)$$

کی ہم متغیری تعمیم ہے۔ یہ تعمیم ضروری نہیں ہے کہ صرف
$(e^2/6\pi\epsilon_0)(d^2u^i/ds^2)$;

$$F^i_{react} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + Su^i\right), \qquad (21\text{–}73)$$

ہوسکتی ہے جہاں S کوئی اسکیلر ہے۔ (دھیان رکھیے کہ پہلے کی طرح u^i
غیر ابعادی ہے اور ds موزوں وقت قطعہ ہے جسے c سے ضرب دیا گیا
ہے) قوت F^i_{react} کا یہ وصف ہونا چاہیے کہ ردِ عمل اور خسارۂ توانائی
سب فریموں میں برقرار ہو۔ یہ اس شرط سے مطابقت رکھتا ہے کہ

$$F^i_{react}\, u_i = 0. \qquad (21\text{–}74)$$

اس لیے

$$S = -u_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(u_i \frac{du^i}{ds}\right) + \frac{du_i}{ds}\frac{du^i}{ds}. \qquad (21\text{–}75)$$

چونکہ $u^i u_i = 1$ اس لیے مساوات (21-75) کے داہنے طرف کی پہلی رقم غائب ہو جاتی ہے:

$$u_i\,(du^i/ds) = d(u^i u_i)/ds = 0,$$

اس لیے حرکت کا پورا اہم متغیر مساوات یہ ہے:

$$m_0c^2\frac{du^i}{ds} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + u^i \cdot \frac{du_j}{ds}\frac{du^j}{ds}\right) = F^i_{\text{ext}}. \qquad (21\text{–}76)$$

اسے عام طور سے ڈیراک* کا اشعاعی ردِّ عمل کا مساوات کہتے ہیں۔ اس پر توجہ دیجیے کہ بائیں طرف کی آخری رقم محض

$$u^iP/c, \qquad (21\text{–}77)$$

ہے جہاں

$$P = -\frac{e^2c}{6\pi\epsilon_0}\left(\frac{du^i}{ds}\frac{du_i}{ds}\right) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0c^3}(\dot{u}^0)^2 \qquad (21\text{–}78)$$

چارج سے توانائی کے اخراج کی (غیر متغیر) شرح ہے [جو مساوات (20-19) سے ملتی ہے]۔ مساوات (21-76) کو مساوات (21-75) کا استعمال کرکے نیچے دی ہوئی متشاکل شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$m_0c^2\frac{du^i}{ds} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0}u^j\left(u_j\frac{d^2u^i}{ds^2} - u^i\frac{d^2u_j}{ds^2}\right) = F^i_{\text{ext}}. \qquad (21\text{–}79)$$

سیکشن 21-12 میں ہم اس مساوات کو زیادہ بنیادی طریقہ سے سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

---

* P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London) A167, 148 (1938).

21-11 اضافیتی حرکت مساوات کا اینٹگریشن

ہم متغیری مساوات (21-76) میں غیر اضافیتی مساوات (21-57) سے متعلق یہ دشواری کہ "فراری" حلوں کو بچانے کی خاطر حرکت کے اینٹگرلوں کے لیے مخصوص حدی شرائط کی ضرورت ہوتی ہے، بنی رہتی ہے اور پھر ان حدی شرائط کے نتیجہ میں ایسا اینٹگرل حاصل ہوتا ہے جو بظاہر ایک τ_0 کے درجہ کے وقت کے لیے سببیت کی خلاف ورزی کرتا ہے۔ اس کے علاوہ یہ اینٹگرل غیر اضافیتی حل (21-61) کے مقابلہ میں (جو ایک سادہ کوادڑیچر بن جاتا ہے) اپنا سادہ پن کھو دیتا ہے اس کا حل ایک اینٹگرل مساوات بن جاتا ہے۔

$$m_0c^2\frac{du^i}{ds} = \frac{3}{2r_0c}\int_s^\infty \left[F^i_{ext}(s') - \left(\frac{u^iP}{c}\right)\right] e^{-(s'-s)/(2r_0c/3)}\,ds', \quad (21\text{-}80)$$

جہاں P شرحِ اخراج اشعاع (21-78). ہے۔ سیدھے تفرق سے اس کی تصدیق کی جاسکتی ہے کہ اینٹگرلی مساوات (21-80) تفرقی مساوات (21-76); کو مطمئن کرتا ہے؛ اس کے علاوہ فراری حل بچا دیے جاتے ہیں۔

دھیان رکھیے کہ اینٹگرلی مساوات میں ایک ردِّ عملی چہار قوت u^iP خارجی قوت میں سے گھٹایا ہوا ہے؛ ورنہ یہ مساوات (21-61). سے مطابقت رکھتا ہے۔ اِس قسم کی ردِّ عمل قوت صرف اُس وقت کے دوران کام کرتی ہے جب توانائی کا خسارہ اشعاع کے ذریعہ ہو رہا ہوتا ہے۔ اس لیے مساوات (21-80) اشعاع ردِّ عمل کی ایک زیادہ مدلل شکل دیتا ہے بہ نسبت معمولی اظہار کے جس میں رفتار کا دوسرا تفرقی اخذ شامل ہے۔

21-12 غیر مرکزی کمیتی اینٹگرلوں کو خارج کرنے کی غرض سے اشعاع کے نظریہ میں ترمیم۔

اقدامی مضمر

اس سے پہلے کے سیکشنوں میں ہم نے برق مقناطیسی کمیت کو (جس کا ایک اطمینان بخش طریقہ سے حساب نہیں لگایا جاسکا تھا) ایک (اتنے ہی ناقابلِ حساب) غیر برق مقناطیسی کمیت کے ساتھ ملا کر برق

مقناطیسی کمیت کے معنی سوال کو ایک طرف ڈال دیا تھا، اس جوڑ کو مساواتوں میں تجربی کمیت کے نام سے داخل کیا گیا تھا۔

اس عمل کے ذریعہ ہمیں ایسے مساواتِ حرکت دستیاب ہوئے جو اوپر کی بحث کے مطابق چنی گئی ابتدائی شرائط کی ایک بار پابندی ہوجانے پر اطمینان بخش ثابت ہوئے۔

آیئے اب ہم اس مسئلہ پر ایک دوسرے زاویہ سے (جو آخر میں وہی مساواتِ حرکت دے گا) غور کریں جو ایک نقطہ الکٹران کے لیے بھی محدود نتائج دیتا ہے لیکن ایسا ہونے پر بھی میکسویل کی مساوات کے ڈھانچے کے اندر رہتا ہے۔ یہ متضاد پروگرام اس بات پر توجہ دینے سے حاصل ہوسکتا ہے کہ باب 14 [مساوات (14-23)] میں ہمیں "اقدامی" اور "مبطی"، دونوں مضمری حل ملے تھے جو میدانی مساوات کو مطمئن کرتے تھے؛ ہم نے "منطقی" وجوہات کی بنا پر اقدامی حلوں کو چھوڑ دیا تھا کیوں کہ وہ تجربے کے خلاف تھے۔ آیئے ہم اس مسئلہ کا ایک مدلل امتحان کریں۔ ہم مندرجہ ذیل باتیں کہنا چاہیں گے۔*

(1) اگر ہم تنہا الگ تھلگ اشعاع کے ماخذ A کے میدان پر غور کریں تو بلاشبہ اس کا صحیح بیان مبطی کے ذریعہ حل ہوتا ہے جسے ہم F^A_{ret} کہیں گے ماخذ اشعاع سے معقول فاصلوں پر صرف یہی میدان تجربے کے ساتھ موافقت رکھتا ہے اور سببیت کے ہمارے بنیادی خیالات کے مطابق ہے اگر ایک مرتبہ وقت کی سمت کو زیادہ پیچیدہ نظاموں کے رویہ کے مشاہدہ کے ذریعے مسلم کرلیا جائے۔

(2) اگر ہم لارنز کے طریقہ سیکشن 21-7 سے خود قوت کا حساب کریں جس میں مبطی میدانوں F_{ret} کی جگہ

$$F_{react} = \tfrac{1}{2}(F_{ret} - F_{adv}), \tag{21-81}$$

رکھ دیں تو مساواتوں (21-48) (21-49) اور (21-50) کی سب رقمیں

* بعد کی بحث میں ہم F کا استعمال میدانی ٹینسر $F^{\mu\nu}$ کو ظاہر کرنے کے لیے کریں گے۔

جو r میں طاق ہیں غائب ہو جائیں گی اور اس طرح مساوات (21-54) کی کمیت والی رقم نہیں رہ جائے گی۔ مساوات (21-54) میں فرق شعاعی ردِ عمل والی رقم

$$e^2\ddot{u}/6\pi\epsilon_0 c^3 \qquad (21\text{-}82)$$

باقی رہے گی۔ اس لیے اس نسخہ کے تحت ایک نقطہ الکٹران کے لیے بھی ردِ عمل قوت محدود رہتی ہے۔ (21-81) کے میدانوں کے خطی مجموعہ کو اگر ایک نقطہ چارج کے مقام پر بھی نکالا جائے تو یہ محدود بنا رہتا ہے، ہم اس محدود نتیجہ کی وجہ کو یہ دھیان میں رکھ کر سمجھ سکتے ہیں کہ ایک لہری عدد k کے مطابقت کا بنیادی مضمر مساوات (14-19) کے مطابق یہ ہے:

$$G_{\text{ret}} = \frac{1}{4\pi r} e^{+ikr},$$

$$G_{\text{adv}} = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}, \qquad (21\text{-}83)$$

اس لیے

$$\frac{G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}}{2} = \frac{1}{4\pi r} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(kr)}{r}, \qquad (21\text{-}84)$$

جو محدود حد $k/4\pi$ کی طرف مائل ہوتا ہے جیسے جیسے r صفر کی طرف جاتا ہے۔

(3) کلاسیکی میکانیات کے بنیادی تفرقی مساوات وقت کی سمت اُلٹنے پر متشاکل رہتے ہیں۔ خصوصاً صرف ایک ذرّہ کی حرکت کا مشاہدہ وقت کی سمت کے بارے میں کوئی معلومات نہیں دے سکتا۔ صرف آزادی کے درجوں کی ایک بڑی تعداد رکھنے والے نظاموں کا شماریاتی رویہ وقت کی سمت بتا سکتا ہے۔ اسی طرح برقی حرکیات میں میدانی مساوات بنیادی طور پر وقت کے لحاظ سے متشاکل ہوتے ہیں اور غیر متشاکل صرف ہمارے من مانے ڈھنگ سے اقدامی حل کو رد کرنے کی وجہ سے داخل ہو جاتا ہے۔ وقت کے گزرنے کی سمت کا تعین کیے بغیر اس حل کو رد کرنے کی کوئی معقول بنیاد نہیں ہے۔ یہ مانا جا سکتا ہے کہ اس تعین کے لیے کسی پیچیدہ نظام کی شماریاتی بے ترتیبی کے بڑھنے کی سمت کو استعمال کیا جائے گا۔ ایک وقتی تشاکل رکھنے والے حل کی شکل یہ ہوگی:-

$$F_{sym} = \frac{1}{2}(F_{ret} + F_{adv}). \qquad (21\text{-}85)$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ برقی حرکیات کی ایک پورے طور سے ہم متغیری "دوری عمل" نظریے کی تشکیل میدانوں کے اس متشاکل ترکیب کے لحاظ سے کی جا سکتی ہے۔ منطقی لحاظ سے بہتر ہوتا اگر واقعی میدانی حل متشاکل شکل (21-85) کے ہوتے ہیں لیکن ایک تنہا اشعاع کار کے وقتی لحاظ سے بظاہر غیر متشاکل۔ لیکن بلاشبہ صحیح میدان F^A_{ret} کو (21-85) کے متشاکل میدان کے ذریعہ A کے میدان پر بہت سے دور افتادہ جاذبوں کے میدانوں کا انطباق کر کے مرتب کیا جا سکتا ہے۔ اس تصویر کے پیش نظر اشعاع کے اخراج کے تعین میں ایک دور پر مقیم جاذب کا ایک ضروری کردار ہے ذ ایک تنہا سر عتائے الکٹران کی اشعاع متشاکل میدان (21-85) کے ساتھ توانائی زائل نہیں کرے گی۔

اس نتیجے پر پہنچنے کے لیے کہ بظاہر متضاد بیانات (1)، (2) اور (3) فی الواقعی ہم آہنگ ہیں ایک بظاہر قابلِ یقین دلیل دی جا سکتی ہے۔ ہم ایک سادے ماڈل* کا استعمال کریں گے جس میں چارج A جس سے ہمیں مطلب ہے ایک بڑے جاذب سے گھرا ہوا ہے جو $n - 1$ الگ الگ چارجوں پر مشتمل ہے۔ یعنی پورے نظام میں A پر مقیم (شکل 21-3.) چارج کو ملا کر n چارج ہیں۔ آیئے ہم یہ بنیادی مفروضہ مان لیں کہ ابتدائی میدان وقتی تشاکلی حل مساوات (21-85) سے ملتے ہیں یا یعنی

$$F_{actual} = \frac{1}{2}(F_{adv} + F_{ret}). \qquad (21\text{-}86)$$

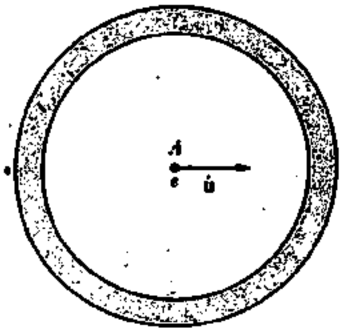
آیئے ہم ابھی بلا ثبوت کے یہ مان لیں کہ باہری بادل اشعاعی میدانوں کے لیے ایک مکمل جاذب ہو سکتا ہے یعنی مان لیجیے کہ جاذب کے باہر:-

---

* اس ماڈل کے ایک مشترح بیان کے لیے دیکھیے:

J. A. Wheeler and R. P Feynman, *Revs. Modern Phys.* 17, 157 (1945).

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(F_{i_{adv}}+F_{i_{ret}})=0 \quad \text{outside of absorber.} \qquad (21\text{-}87)$$



(شکل .21-3 جاذب سے گھرا ہوا تنہا چارج)

چونکہ اقدامی اور مبطی میدانوں کے الگ الگ جوڑ ترتیب سے اندر آنے والی اور باہر جانے والی لہروں کو ظاہر کرتے ہیں جو ایک دوسرے سے سب جگہوں پر تخریبی مداخلت نہیں کر سکتیں اس لیے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جاذب کے باہر الگ الگ جوڑ غائب ہو جاتے ہیں اور اس وجہ سے جاذب کے باہر۔

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(F_{i_{adv}}-F_{i_{ret}})=0 \quad \text{outside of absorber.} \qquad (21\text{-}88)$$

ہم نے دیکھا ہے [اوپر کا ذکر (2) دیکھیے] کہ مجموعہ $F_{adv}-F_{ret}$ n نقطہ چارجوں میں سے ہر ایک کے لیے غیر نادر ہے؛ اس لیے مساوات (21-88) کے مطابق جوڑ

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(F_{i_{adv}}-F_{i_{ret}}) \qquad (21\text{-}89)$$

غیر نادر ہے اور ایک بند گھیرے پر غائب ہو جاتا ہے؛ اس لیے ہمارے عام مصدقوں کے مطابق S ہر جگہ غائب ہو جاتا ہے۔ لہٰذا ہم S کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$0=S=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(F_{i_{adv}}-F_{i_{ret}})$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq A}}^{n-1} [\tfrac{1}{2}(F_{i_{adv}} + F_{i_{ret}}) - F_{i_{ret}}] + \tfrac{1}{2}(F^{A}_{i_{adv}} - F^{A}_{i_{ret}}), \qquad (21\text{–}90)$$

جہاں ہم نے A. کے میدان کو دوسرے چارجوں کے میدان سے الگ کر دیا ہے۔ اب اگر ہم مساوات (21-81) اور (21-86) کا استعمال کر کے مساوات (21-90) کی رقموں کی نقطہ A پر قیمت نکالیں تو ہمیں یہ ملتا ہے۔

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq A}}^{n-1} F_{i_{actual}} = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq A}}^{n-1} F_{i_{ret}} + F^{A}_{react}. \qquad (21\text{–}91)$$

طبیعیاتی لحاظ سے اس مساوات کا مطلب ہے کہ A پر فی اکائی چارج کام کرنے والی واقعی قوت (وقتی متشاکل تشکیل کا استعمال کر کے) جاذب سے خارج ہوئی اشعاع میدان (معمولی مبطی میدان تشکیل کا استعمال کر کے) اور مساوات (21-81) سے حاصل ہوئی غیر نادر اشعاعی ردّعمل والی رقم کے جوڑ کے برابر ہے۔ اس لیے ایسا مانا جا سکتا ہے کہ اشعاعی میدانوں کے ہمارے سب پچھلے حسابات (جن میں مبطی مضمرون کا استعمال کیا گیا تھا) جہاں تک ایک خارجی میدان میں ایک "پرکھ چارج" کے رویّہ کا سوال ہے لاگو رہیں گے لیکن کم رفتاری تخمینہ میں صحیح اشعاعی ردّعمل (21-82) ہے جس کا حساب مبطی اور اقدامی میدانوں کے درمیان غیر مجوزہ فرق سے لگایا گیا ہے؛ یہ مانا جا سکتا ہے کہ مساوات (21-79) حرکت کی مساوات کا صحیح اضافیتی اظہار دیتا ہے۔ اس طرح (1), (2) اور (3) کے تذکروں کے درمیان تضاد رفع ہو جاتا ہے۔

اشعاعی ردِعمل کا حساب لگانے کے لیے (21-81) کے استعمال کا نسخہ جو جاذب ماڈل کی بحث سے جائز قرار پاتا ہے، موثر طریقے سے وسعتی کمیتی رقموں کو تفریق کے ذریعہ خارج کر دیتا ہے۔ اس طرح کا طرزِ عمل جسے کمیت کی "مکرر" تصحیح کہتے ہیں، یہ اجازت دیتا ہے کہ ہم تجربی کمیت کا استعمال اس کی نوعیت کے مسئلہ کے بلالحاظ کر سکتے ہیں۔

21-13 اضافیتی اشعاعی ردِ عمل کا سیدھا حساب

سیکشن 21-12 کے مطابق ہم مساوات

(21-81) سے اشعاعی ردِّ عمل کا حساب، نقطہ الکٹران کی حالت میں بھی بغیر تساعی مسئلوں سے دوچار ہوئے، نکال سکتے ہیں۔ بالخصوص ہم متغیری اشعاعی ردِ عمل کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں :

$$F^{i}_{\text{react}} = \frac{eu_j}{2}\left(F^{ij}_{\text{ret}} - F^{ij}_{\text{adv}}\right), \tag{21-92}$$

جہاں F^{ij} چارج کے میدان میں جنھیں چارج کے عالمی نقطہ پر معلوم کیا گیا ہے مساوات (18-19) سے لینا رٹرڈ ویشرٹ مضمر یہ ہیں :

$$\varphi^{i} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{u^{i}}{u^{j}R_j}, \tag{18-19}$$

جہاں

$$R_jR^{j} = 0; \quad R_j = x_j - x'_j(s). \tag{21-93}$$

زودرجی مساوات (21-93) کے دو جذر ہوں گے جو اس بات کا تعین کریں گے کہ ہمارا حل مبطی ہے یا اقدامی اگر ہم مساوات (21-93) کا تفرّق کریں تو ہم پاتے ہیں :

$$(dx_j - u_j\,ds)(x^{j} - x'^{j}) = 0, \tag{21-94}$$

یا

$$ds = \frac{dx_jR^{j}}{u_kR^{k}}. \tag{21-95}$$

میدانوں کو پانے کے لیے ہمیں مساوات (18-19) کے تفرّقی اخذ دریافت کرتا ہوں گے۔ مثال کے طور پر

$$\frac{\partial\varphi^{i}}{\partial x^{l}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_l}{(u_kR^{k})}\frac{d}{ds}\left[\frac{u^{i}}{u_jR^{j}}\right] \tag{21-96}$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_l}{(u_kR^{k})^{2}}\left\{\frac{du^{i}}{ds} - \frac{u^{i}[1 + R^{j}(du_j/ds)]}{(u_kR^{k})}\right\}; \tag{21-97}$$

$$\therefore F^{il} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(u_kR^{k})^{3}}\left\{\left(R^{l}\frac{du^{i}}{ds} - R^{i}\frac{du^{l}}{ds}\right)(u_kR^{k}) - (R^{l}u^{i} - R^{i}u^{l})\left[1 + R^{j}\frac{du_j}{ds}\right]\right\}. \tag{21-98}$$

یہ عبارت مبطی اور اقدامی دونوں حلوں کے لیے جائز ہے اگر R^j کا مناسب چناؤ کیا جائے ; R^j مندرجہ ذیل سے ملتا ہے :

$$R^j = (\mathbf{r}, \pm r) \text{ اور } u^j R_j = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\pm r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c}\right), \qquad (21\text{-}99)$$

جہاں + سے مبطی حل اور − سے اقدامی حل ملتا ہے ۔ $R^j = 0$; پر مساوات (21-98) مجوبہ ہو جاتا ہے جیسا کہ متوقع ہے اگر مبطی اور اقدامی حلوں کی قیمت الگ الگ نکالی جائے تو دونوں کا فرق لینے سے ندرت نکل جاتی ہے جس کی وجہ سے حد $R_j \to 0$ محدود بنی رہتی ہے ۔ اس کی حد قیمت مساوات (21-98) R_j کے اجزا کی قوتوں میں پھیلا کر اور تب اجزا کو مبطی اور اقدامی حلوں کو گھٹانے کے بعد صفر بنا کر حاصل کی جا سکتی ہے ۔ یہ پھیلاؤ سیدھا ہے لیکن اس پر کئی منزلوں سے ہو کر پہنچنا ہوتا ہے ۔* نتیجہ یہ ہے :

$$F^{ij}_{\text{react}} = \frac{F^{ij}_{\text{ret}} - F^{ij}_{\text{adv}}}{2} = \frac{e}{6\pi\epsilon_0}\left(u^i \frac{d^2u^j}{ds^2} - u^j \frac{d^2u^i}{ds^2}\right). \qquad (21\text{-}100)$$

مساوات (21-100) ہو بہو حرکت کے مساوات (21-79). کے مطابق ہے ۔ اس لیے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ یہ مساواتِ حرکت ، فراری حلوں کو بچانے کے لیے حدودی شرائط کے تحت نقطہ چارج کی کلاسیکی حرکت کا ایک صحیح بیان ہے ۔

مجوزہ حوالے

C. Møller, *The Theory of Relativity.*

اس تصنیف میں بند نظاموں میں برقراریت قوانین پیا ور میکرو برقی حرکیات کے جزوی میدانوں پر ان کے اطلاق سے پیدا ہونے والے مسئلوں پر عمدہ تفصیلی بحث ہے ۔

R. Becker, *Theorie der Elektrizität.*

---

* الجبری تفصیلات کے لیے دیکھیے : P. A. M. Dirac, *loc. cit.*, pp. 163 ff.

اس تصنیف میں میکرو میدانی ٹینسر کی مستند تشکیل کے علاوہ ابراہم کا متشاکل توانائی تحرک ٹینسر بھی پیش کیا گیا ہے جو اس واسطے ہے کہ اُس غیر متشاکل تشکیل کی جگہ لے جو منکاوسکی نے برق مقناطیسی وسیلوں کے لیے اخذ کیا تھا۔

H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons.*

جس ماڈل پر سیکشن 21-7. میں غور کیا گیا ہے اُس پر تفصیلی بحث ہے۔

L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fieldo.*

باب 9 میں اشعاعی ردِّ عمل پر مختصر بحث ہے۔

A. Sommerfeld, *Electrodynamics.*

سیکشن 37 میں اشعاعی ردِّ عمل پر ہم متغیری شکل میں بحث کی گئی ہے

J. A. Wheeler and R. P. Feynman. I. *Revs. Modern Phys.* 17, 157 (1945).

II. *Revs. Modern Phys.* 21, 425 (1949).

پہلے مضمون میں اشعاع کار کو گھیرنے والے جاذب کا میدانوں کی نوعیت کے تعین میں کیا حصّہ ہے۔ اس پر بہت تفصیل سے بحث کی گئی ہے (دیکھیے سیکشن (21-12)
دوسرے مضمون میں یہ دکھایا ہے کہ اگر پیش اور پس میدانوں کے متشاکل ترکیب کا استعمال کیا جائے تو کس طرح ایک دوری پر عمل" تھیوری کی ہم آہنگ طریقے سے تشکیل ہو سکتی ہے۔

F. Rohrlich, *Lectures on Classical Electrodynamics.*

میدان کی توانائی تحرک کی ہم متغیرّی تشکیل پر بحث کی گئی ہے۔ اس کے علاوہ دیکھیے:

Am. J. Phys. 28, 639 (1960)

G. Plass, *Revs. Modern Phys.* 33, 37 (1961).

اشعاعی ردِّ عمل کے ساتھ حرکت کی مکمل اضافیتی مساوات کے حلوں پر بحث کی گئی ہے
برق مقناطیسی کمیت کے تصور پر اس سے پہلے کی بحثیں مندرجہ ذیل میں ملیں گی:

R. Becker, *Theorie der Elektricität*, Band II.

J. H. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.*

M. Mason and W. Weaver, *The Electromagnetic Field.*

مشق

1 ۔ مساوات .(21-8) کے ٹینسر سے اخذ کیے گئے برقراریت کے قوانین کی الجبری صحت کا امتحان لیجیے۔

2 ۔ ثابت کیجیے کہ مساوات (21-8) میں مقدار $F^{ik}F^{i}_{k}$ ، i اور j میں تشاکل ہے۔

3 ۔ دکھائیے کہ $T^{i}_{i} = 0$.

4 ۔ ایک الکٹران اشعاعی پر ردِ عمل کی قوت کو دریافت کیجیے جس کا اسراع ایک بیٹا ٹران میں ہو رہا ہے (یعنی جب وہ ایک مستقل نصف قطر کے دائرے میں حرکت کر رہا ہے) ردِ عملی قوت کا ذرہ کی توانائی پر انحصار کس طرح ہے ؟

5 ۔ ایک الکٹران ابتدا میں ایک پروٹان کے گرد a نصف قطر کے دائرے میں حرکت کر رہا ہے۔ اگر توانائی کا خسارہ کلاسیکی قانون کے مطابق ہو تو کیا ہوگا ؟ نظام کتنے عرصہ تک بنا رہے گا ؟

6 ۔ دو قطبی انٹینا جن کا فضا میں فاصلہ چوتھائی لہر لمبائی ہے سائنسی طرز میں مستقل ہیں اور ان کا فیوز کا فرق $90°$ ہے۔ اینٹینا پر کل ملا کر اثر انداز قوت نکالیے۔ دو قطبہ کے محوروں کو ان کے آپسی فاصلہ کے متوازی لیجیے۔

7 ۔ دکھائیے کہ کسی من مانے فریم میں ڈیریک کا اضافیتی مساوات یہ ہو جاتا ہے۔

$$m_0\frac{du}{dt} - \frac{2}{3}\tau_0 m_0\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{\tau_0 m_0 u\,(du/dt)^2}{u^2+c^2} = \left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}F(\tau),$$

جب کہ حرکت ایک البعادی ہے اور ایک قوت $F(\tau)$ کے تحت ہے جو ذرے کے فریم میں موزوں وقت τ کے فنکشن کی شکل میں دیا گیا ہے۔

8 ۔ دکھائیے کہ مشق 7 کے تفرقی مساوات کا رفتار u کے لیے

ایک اینٹگرل اس سے ملتا ہے:

$$\frac{u}{c} = \sinh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{u_0}{c}\right) + \frac{1}{m_0 c} \times \left\{\int_0^{\tau} F(\tau')\,d\tau' + \int_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{3}{2}\frac{\tau'}{\tau_0}\right)\right][F(\tau+\tau') - F(\tau')]\,d\tau'\right\}\right)$$

باب 17. مشق 8, کے نتیجے سے موازنہ کیجیے۔

(اشارہ:۔ تفرقی مساوات کو $u(\tau)$ کی جگہ ایک نئے متغیرہ $w(\tau)$, میں $u(\tau)/c = \sinh[w(\tau)/c]$.) رکھ کر تبدیل کریجیے)

باب 22

اشعاع، انتشار اور انکسار

ہم نے باب 21 میں دیکھا ہے کہ غیر اضافیتی حالت میں مساوات (21-57) اور اضافیتی حالت میں مساوات (21-76) حرکت کی صحیح تفرقی مساوات ہیں۔ ہم ان مساواتوں پر مختلف راستوں سے پہنچے، پہلا سیکشن 21-7 کا حساب جو لارنز کے کروی متشاکل ماڈل کی بنیاد پر ہے، حرکتی مقداروں کے بدلنے کی شرح پر پابندیاں عائد کرتا ہے۔ سیکشن 21-12 کی زیادہ عام بحث سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ حرکت کے مساواتوں کا اطلاق زیادہ عام ہے، شرط یہ ہے کہ انٹیگریشن کے معاون متغیلوں پر ایسی پابندی رہے جس سے "فراری" حل بچائے جا سکیں۔ اِس سیکشن میں ہم مساواتِ حرکت کے مختلف نتائج کا جائزہ لیں گے۔

22-1 چارج شدہ ہارمونک اہتزاز کار کی اشعاعی تقصیر

ایک الکٹران پر غور کیجیے جو ایک ہارمونک قوت $F = -kx,$ سے بندھا ہے اور جس کا مطابقہ قدرتی تواتر $\omega_0 = \sqrt{k/m}.$ ہے۔ تب مساواتِ حرکت جس میں الکٹران کی خود قوت شامل ہے یہ ہے:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e^2 \dddot{x}}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} = \frac{2}{3}\tau_0 \dddot{x}. \qquad (22\text{-}1)$$

ہم نے مان لیا ہے کہ حرکت صرف غیر اضافیتی ہے؛ m تجربہ سے حاصل کی گئی کمیت ہے۔ ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مساوات (22-1) کا داہنا حصہ باندھنے

والی رقم کے مقابلہ میں چھوٹا ہے جس کی وجہ سے ہم یہ تخمینہ لے سکتے ہیں :

$$\dddot{x} \simeq -\omega_0^2 \dot{x}. \qquad (22\text{-}2)$$

اگر سہولت کے لیے ہم

$$\gamma = \frac{2}{3}\tau_0\omega_0^2 = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m}, \qquad (22\text{-}3)$$

رکھ دیں[1] تو مساوات (22-1) یہ ہو جاتا ہے ۔

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (22\text{-}4)$$

مساوات (22-1)، کا چھوٹے γ، کے لیے جائز حل یہ ہے :

$$x = Ae^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma t/2}. \qquad (22\text{-}5)$$

اس لیے اہتزار کار کی مضمر توانائی اور حرکی توانائی $e^{-\gamma t}$ کی نسبت سے کم ہوتی جاتی ہے :

$$U \simeq \frac{mA^2\omega_0^2}{2}e^{-\gamma t}, \qquad (22\text{-}6)$$

اور

$$-\frac{dU}{dt} = \gamma U = \frac{e^2\omega_0^4 A^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}e^{-\gamma t}. \qquad (22\text{-}7)$$

لیکن مساوات (22-7) محض اشعاع کے اخراج کی ایک سائکل کے لیے اوسط شرح ہے اس لیے ہمارے $F_{rad.}$ کے پہلے اخذ کے مطابق توانائی برقرار رہتی ہے ۔ مساوات (22-7) ایک مقصور لہری سلسلہ سے مطابقت رکھتا ہے جس میں پہلے ایک باہری جھٹکے سے ایک وسعت A مشتعل ہوئی ہے ۔ مساوات (22-7) سے ظاہر ہے کہ $1/\gamma$ خارج ہوئے اشعاعی پلس کی اوسط دورانی ہے جب کہ اس کا اوسط توانائی پر لیا گیا ہے ۔ یہ وہ کلاسکی مقدار ہے جو ایک خارجی جھٹکے کی وجہ سے پیدا ہوئی مشتعل حالت کو کوانٹم میکانکی "مدتِ حیات" کے ہم پلہ ہے ، اس شرط کی وجہ سے کہ $\gamma \ll \omega_0$ تواتر پر لگی پابندی ،

---

(1) اسے پہلے ابواب میں آئے $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ سے خلط ملط نہیں کرنا چاہیے ۔

اونچی توانائی کی ۷۰ کرنوں کو چھوڑ کر کوئی اہمیت نہیں رکھتی۔ باہر جانے والی اشعاع کی کوانٹم توانائی کے لحاظ سے یہ غیر مساویت مندرجہ ذیل ہو جاتی ہے۔

$$\hbar\omega_0 \ll \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{e^2} mc^2 = 137mc^2 \simeq 70 \text{ Mev.} \qquad (22\text{–}8)$$

اشعاعی تقصیر کی وجہ سے اہتزازکار سے خارج ہوئی توانائی یک تواتری نہیں ہوگی۔ میدانوں کا جو مساوات (22-5) کے متناسب ہیں، فوریر تجزیہ کرنے سے خطی چوڑائی حاصل ہو سکتی ہے، اگر:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega\, e^{-i\omega t}\, d\omega = E_0\, e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2}, \qquad (22\text{–}9)$$

تو

$$E_\omega = \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2} e^{i\omega t}\, dt$$

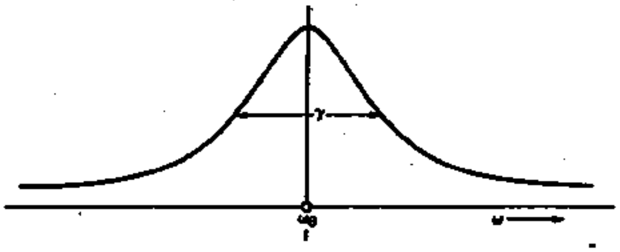
$$= \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{i(\omega - \omega_0) - \gamma/2}. \qquad (22\text{–}10)$$

مساوات (22-10) مندرجہ ذیل شدتِ اشعاع سے مطابقت رکھتا ہے (دیکھیے شکل (22-1))

$$I_\omega = \frac{I_0 \gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \qquad (22\text{–}11)$$

جس کی نارمل کاری اس طرح پر کی گئی ہے کہ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_\omega\, d\omega = I_0. \qquad (22\text{–}12)$$



(شکل 22-1. شدتِ اشعاع کا تواتر کے خلاف گراف بمطابق مساوات 22-11)

اس لیے آدھی شدت پر پوری تواتری چوڑائی یہ ہے:-

$$\Delta\omega \simeq \gamma = \tfrac{2}{3}\tau_0\omega_0^2. \qquad (22\text{-}13)$$

اس کے مطابقت کی لہر لمبائی میں ظاہر کی گئی چوڑائی ہے

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi\,\Delta\omega c}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3}c\tau_0 = \frac{4\pi}{3}r_0 \simeq 10^{-12}\ \text{cm}, \qquad (22\text{-}14)$$

جو مستقلہ ہے اور اہتزاز کار کے تواتر سے آزاد ہے۔ عمل میں اشعاعی تقصیر بلاشبہ ایک اسپکٹرمی خط کی چوڑائی کا واحد سبب نہیں ہے: ایٹمی تصادموں کی وجہ سے لہری سلسلہ کا ٹوٹنا اور ڈاپلر انحراف بھی خطی چوڑائی میں حصہ رکھتے ہیں۔ مساوات (22-13) سے ملی خطی چوڑائی اور اوسط عمر کے درمیان رشتہ یعنی $\Delta\omega\gamma^{-1} = 1$, مندرجہ ذیل رشتہ کے مرادف ہے:

$$\Delta E\,\Delta t \sim \hbar, \qquad (22\text{-}15)$$

جہاں $\Delta E = \hbar\,\Delta\omega.$ مساوات (22-15) کسی حالت کے مدت حیات اور توانائی کی چوڑائی کے درمیان کوانٹم میکانکی رشتہ ہے۔

22-2 جبری ارتعاش

اس سے پہلے کے سیکشن میں ایک بندھے الکٹران کی حرکت اور اس سے ایک لمحاتی اضطرابی پلس کے ذریعہ پیدا شدہ اشعاع پر بحث کی ہے ز یہ اسپیکٹرمی اخراج کی کلاسکی نظریہ ہے آیئے اب ہم ایک ہارمونکی بندھے الکٹران کے حرکت کی مستقل حالت پر غور کریں جو ایک خارجی برق مقناطیسی لہر کے زیر اثر ارتعاش پر مجبور ہے۔ روشنی کے انتشار جذب اور انکسار کے کلاسکی نظریے اسی قسم کے خیالات پر مبنی ہیں مگر نئی تواتروں کے حساب کے لیے اور ملایم ایکس کرنوں کے لیے بھی ہم یہ مان سکتے ہیں کہ الکٹران کی رفتار اور روشنی کی رفتار سے کافی کم ہے اور اس لیے اندر آنے والی اشعاع میں مقناطیسی ویکٹر کے اثر کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ تب ایک بندھے الکٹران کا مساوات حرکت ایک خارجی (قطبی) ہموار لہر کے میدان $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ میں یہ ہوتا ہے:

$$\ddot{\mathbf{x}} - \frac{3}{2}\tau_0\dddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\, e^{-i\omega t}, \qquad (22\text{-}16)$$

جب کہ τ_0 وہی ہے جس کی تعریف مساوات (22-1) سے کی گئی ہے۔ ہماری دلچسپی مستقل حالت کے حل میں ہے جو $e^{-i\omega t}$ کے تناسب میں ہے، اور اس لیے

ہم رکھ سکتے ہیں:

$$\ddot{x} \simeq -\omega^2 x. \qquad (22\text{–}17)$$

ہم γ کی تعریف یوں کرسکتے ہیں:

$$\gamma = \tfrac{2}{3}\tau_0\,\omega^2, \qquad (22\text{–}18)$$

گو کہ کوئی خاص فرق نہیں پڑتا چاہے ہم مساوات (22-18) استعمال کریں یا مساوات (22-4)؛ τ_0 کافی چھوٹا ہے جس کی وجہ سے یہ رقم صرف اس وقت اہم ہوتی ہے جب $\omega \sim \omega_0$، یعنی صرف گمک کے قریب ایسا ہوتا ہے۔
مساوات (22-16) کا مستقل حالت حل تب اس سے ملتا ہے:

$$x = E_0\,\frac{e}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\right)e^{-i\omega t}. \qquad (22\text{–}19)$$

خارجی میدان کے لحاظ سے چارج کے اسراع

$$\ddot{x} = \frac{e}{m}\left(\frac{-\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\right)E, \qquad (22\text{–}20)$$

دو قطبی اشعاعی میدانوں کے مساواتوں (19-20) میں رکھنے پر منتشر ہوئی تابانی ملتی ہے۔ ہم مساوات (22-20) کے کئی اطلاقوں پر تفصیل سے غور کریں گے۔

22-3 ایک منفرد آزاد الکٹران سے انتشار

ایک غیر بندشی اور کم اسراع کے الکٹران کے لیے، $\omega_0 \simeq 0$، $\gamma \simeq 0$ لہٰذا:

$$\ddot{x} = \frac{e}{m}E. \qquad (22\text{–}21)$$

اس اسراع کی وجہ سے ایک شعاعی میدان پیدا ہوتا ہے جس کی جسامت:

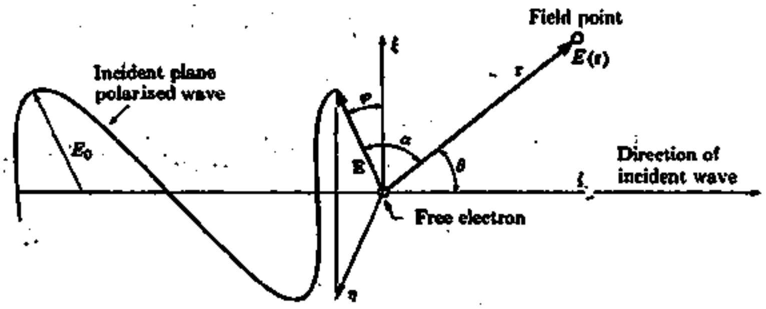
$$E(r) = \frac{e\,(\sin\alpha)\ddot{x}}{4\pi\epsilon_0 r c^2}, \qquad (22\text{–}22)$$

جہاں E اور r کے درمیان زاویہ α ہے جیسا شکل 22-2 میں دکھایا ہے
جس شرح سے مکرر تابانی کے ذریعہ خارج توانائی اکائی رقبہ کو پار کرتی ہے یہ ہے:-

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\left[\frac{e\,(\sin\alpha)\ddot{x}}{4\pi\epsilon_0 r c^2}\right]^2, \qquad (22\text{–}23)$$

$$|\mathbf{N}| = r_0^2 \sin^2\alpha \left(\frac{I_0}{r^2}\right), \qquad (22\text{–}24)$$

جہاں $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$ کلاسیکی الکٹرانی نصف قطر ہے اور



(شکل 22-2. ایک ہموار لہر جو ایک الکٹران سے منتشر ہو رہی ہے قطبیتی اور
انتشاری زاویے دکھائے گئے ہیں)

$$I_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,E^2 \qquad (22\text{–}25)$$

اوّل شدت ہے، تب

$$-\frac{dU}{dt} = \int r^2 N\, d\Omega = \frac{8\pi I_0 r_0^2}{3}. \qquad (22\text{–}26)$$

اگر ہم مساوات (22-26) کو I_0، سے تقسیم کریں جو اندر آنے والی شعاع کی شدت ہے تو ہم فی الکٹران موثر انتشاری عرضی تراش پاتے ہیں :

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \qquad (22\text{–}27)$$

مساوات (22-26) تھومسن کا انتشاری فارمولا کہلاتی ہے اور مساوات (22-27) کو تھامسن انتشار کی عرضی تراش کی عرضی تراش کہتے ہیں۔ دونوں مستقل ہیں اور آورتن سے بے تعلق۔

اگر ہم مساوات (22-24) کو انتشاری زاویہ θ اور قطبیتی زاویہ

φ کے لحاظ سے ظاہر کریں جو شکل 22-2. میں دکھائے گئے ہیں تو تجربات سے موازنہ کرنا آسان رہے گا۔ زاویوں θ, α, اور φ کا آپسی رشتہ یہ ہے:

$$\cos\alpha = \cos\varphi \sin\theta,$$

یعنی

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\varphi(1 - \cos^2\theta)$$

اگر اولی لہر قطبیتی ہے یعنی اگر اس کی قطبیت غیر مخصوص ہے تو ہمیں φ کے اوپر اوسط لینا ہوگا اور اس طرح ہم پاتے ہیں:

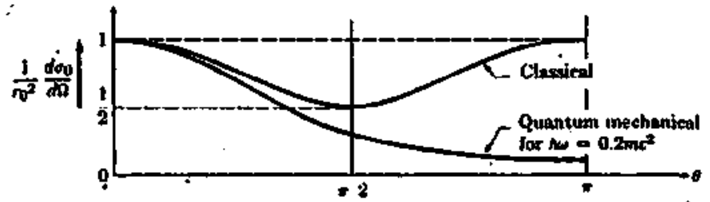
$$\overline{\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos^2\theta),$$

چونکہ $\cos^2\varphi$ کا اوسط $\frac{1}{2}$ ہے۔ θ کے لحاظ سے کل انتشاری توانائی کی شرح ہے

$$-\frac{dU}{dt} = I_0 r_0^2 \int \frac{(1 + \cos^2\theta)}{2}\, d\Omega = \frac{8\pi I_0 r_0^2}{3}. \qquad (22\text{-}28)$$

اور فی اکائی ٹھوس زاویہ تفرقی انتشاری عرضی تراش اس سے ملتا ہے،

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{r_0^2(1 + \cos^2\theta)}{2}. \qquad (22\text{-}29)$$



(شکل 22-3. تفرقی انتشاری عرضی تراش بطور انتشاری زاویہ کے فنکشن کے۔ اس میں قدرے اونچے تواتروں کے لیے تھامسن انتشار سے انحراف دکھائے گئے ہیں)

شکل 22-3. میں اس عرضی تراش کو گراف میں انتشاری زاویہ کے فنکشن کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ انتشاری اشعاع کا کوانٹم میکانکی فارمولا مساوات (22-29) کے قریب ہوتا جاتا ہے جیسے جیسے تواتر صفر کی طرف جاتا ہے لیکن انتشاری شدت متناسب نہیں ہوتی ہے عام طور سے منتشر توانائی

آگے کی سمت میں زیادہ گھنی ہوتی ہے جیسا کہ اس خم سے ظاہر ہوتا ہے جو 100 کلو۔ الکٹران۔ وولٹ کی ابتدائی توانائی کے لیے ہے۔

تھامسن انتشار کا ایک اور پہلو ہے جس میں کوانٹم خیالات کی وجہ سے ترمیم ہو جاتی ہے، کلاسیکی نقطہ سے منتشر اشعاع کا تواتر وہی ہوتا ہے جو اندر آنے والی لہر کا ہوتا ہے۔ ایک ترمیم کرنی ہوگی؛ واقع شعاعوں میں سے تحرک اور توانائی بھی نکل جاتی ہے اور منتشر اشعاع کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہ تحرک الکٹران کو دیا جاتا ہے۔ یہ آنے والی شعاع کی سمت میں ایک اوسط قوت کے مساوی ہے جو $(I_0/c)\sigma_0$, کے برابر ہے اور جو الکٹران کو سب ملا کر ایک رفتار دیدیتی ہے۔ واقعتاً اس کا مشاہدہ نہیں کیا جاتا، اس کی جگہ ہوتا یہ ہے کہ اشعاع کا ہر کوانٹم اپنی توانائی اور تحرک کا کچھ حصہ الکٹران کو دیتا ہے اور منتشر ہوئے کوانٹم کا تواتر انتشاری زاویہ پر منحصر ہوتا ہے۔ کامپٹن انتشار پر اور کلین نشینا فارمولے پر ایک بحث کے لیے دیکھیے مثال کے لیے W. Heitler, کی The Quantum Theory of Radiation, third edition, pp. 211–224.

22-4 ایک بندھے الکٹران سے انتشار

ایک ہارمونک ڈھنگ سے بندھے الکٹران کی حالت میں کسی مخصوص سمت میں بذریعہ مکرر اشعاع خارج ہوئی فی اکائی رقبہ توانائی کو معلوم کرنے کے لیے مساوات (22-20) سے ملے اسراع کو مساوات (22-23) میں استعمال کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے پر انتشار کے لیے پورا عرض تراش یہ ہو جاتا ہے

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \qquad (22\text{–}30)$$

جہاں σ_0 مساوات (22-27). میں دیا ہوا ٹامسن عرضی تراش ہے، زاویائی تقسیم وہی ہے جو آزاد الکٹران کی حالت میں ہے۔

مساوات (22-30) کی بیش ترین قیمت اس وقت ہوتی ہے جب یعنی گمگی انتشار کے لیے ایسی حالت میں انتشاری عرضی تراش بہت زیادہ ہو سکتا ہے: عرضی تراش۔

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2 \simeq 6\pi\lambda_0^2 \qquad (22\text{-}31)$$

الکٹران کے کلاسکی رقبہ سے کہیں زیادہ ہے۔
مضبوط بندش کے لیے $\omega \ll \omega_0,\ \gamma \ll \omega_0,$ اور مساوات (22-30)
یہ ہوجاتا ہے۔

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4, \qquad (22\text{-}32)$$

اس طرح ملاعرضی تراش واقع لہرلمبائی کی چوتھی قوت کے مقلوب پر منحصر ہے۔ باب 13 میں ہم نے ایک چالک کرہ سے انتشار نکالا تھا جس کا اس حالت میں جب کرے کے ابعاد کے مقابلہ میں چھوٹے ہوں، اسی طرح کا رویہ تھا، اور یہ پایا گیا ہے کہ ایک چھوٹا ڈائیلکٹرک کرہ اشعاع کو اسی تواتری انحصار کے مطابق منتشر کرتا ہے۔ مقلوب چوتھی قوت کا قانون پہلے پہل ریلے نے اپنی آسمان کے نیلے پن کی تفتیش میں اخذ کیا تھا۔ اس نے یہ مان لیا تھا کہ انفرادی مالیکیول مکمل بے ترتیبی سے منتشر کرتے ہیں جس کی وجہ سے فیوز بے ترتیب ہوتے ہیں اور شدتیں جڑ جاتی ہیں۔ مساوات (22-32) نہ صرف نیلے رنگ کی وجہ بتاتا ہے بلکہ ω_0 کی اوسط تجرباتی قیمتیں رکھنے پر یہ مقداری لحاظ سے ہوائی کرہ کے مشاہدہ سے ملے انتشار سے کل مقدار اور تقطیب دونوں کے لحاظ سے اچھی مطابقت رکھتا ہے۔ سیکشن 22-8. میں فیوزوں کی بے ترتیبی کے مفروضہ پر بحث کی گئی ہے۔

22-5 اہتزازکار کا اشعاع کو جذب کرنا

مساوات (22-19) کے نتائج پر ابھی تک کی بحث زیادہ تر اس خیال سے کی گئی ہے کہ ایک بندھے الکٹران کا برق مقناطیسی شعاع کی ترسیل اور انتشار پر کیا اثر ہوتا ہے۔ ایک دوسرا بنیادی دلچسپی کا سوال اس توانائی سے تعلق رکھتا ہے جو لہر میں سے نکل جاتی ہے اور بندھے ہوئے الکٹرانی نظام کی توانائی میں تبدیل ہوجاتی ہے۔

واحد تواتری ہموار لہر سے کسی قدر زیادہ پیچیدہ حالت پر غور کیجیے۔ مان لیجیے کہ E_ω ایک عام وقت پر منحصر $E(t)$، یعنی $E = \int E_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega$، کے فوریر جُزر کو ظاہر کرتا ہے اور مان لیجیے کہ x_ω ماحصل انحراف $x(t)$ کا فوریر جزر ہے۔ ظاہر ہے کہ

$$x_\omega = \frac{eE_\omega}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \qquad (22\text{–}33)$$

جیسا کہ یک تواتری لہر کی حالت میں ہوتا ہے۔ آئیے اب ہم برقی میدان کے ذریعے الکٹران پر کیے گئے کام پر غور کریں اور اس کام کا وقتی اینٹگرل نکالیں۔ اس حساب کو نکالنے کے لیے ہم کو مساوات (14–46) کے مصدقہ کا استعمال کرنا ہوگا۔ اس مصدقہ کے ساتھ مساوات (22–33) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توانائی ΔU جسے الکٹران برقی میدان پلس کے گذرنے سے جذب کرتا ہے یہ ہے :

$$\Delta U = \int_{-\infty}^{\infty} eE(t)\dot{x}(t)\, dt = \frac{2\pi e^2}{m}\int_0^{\infty} |E_\omega|^2 \frac{2\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\, d\omega. \qquad (22\text{–}34)$$

اس اینٹگرل کی قیمت اس مفروضہ کے تحت نکالی جاسکتی ہے کہ خارجی میدان کی تواتری تقسیم کی نسبت سے گمکی رقم تیز نوک والی ہوتی ہے۔ اس حالت میں :

$$\Delta U = \frac{2\pi e^2}{m}|E_{\omega_0}|^2 2\omega_0^2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(2\omega_0\xi)^2 + \omega_0^2\gamma^2}, \qquad (22\text{–}35)$$

جہاں $\xi = \omega - \omega_0$۔ اگر ہم نچلی حد کی جگہ $-\infty$ رکھ دیں تو یہ سادہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے :

$$\Delta U = \frac{2\pi^2 e^2}{m}|E_{\omega_0}|^2. \qquad (22\text{–}36)$$

دھیان رکھیے کہ نتیجہ γ پر منحصر نہیں ہے ؛ اس لیے ایک واقع میدان سے جذب کی گئی توانائی خطی چوڑائی پر منحصر نہیں ہوتی چاہے اس چوڑائی کی طبعیاتی وجہ کچھ بھی ہو۔

مساوات (22–36) میں بتایا گیا نتیجہ ایک مختلف شکل میں لایا جاسکتا ہے۔

مان لیجیے کہ واقع شعاع میں توانائی کا بہاؤ فی اکائی رقبہ S ہے جو مساوات (14-49) کے مطابق اس سے ملتا ہے :

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 c E^2 \, dt = 4\pi\epsilon_0 c \int_0^{\infty} |E_\omega|^2 \, d\omega, \qquad (22\text{-}37)$$

اس لیے اگر ہم S_ω کی تعریف اس طرح کریں کہ :

$$S = \int_0^{\infty} S_\omega \, d\omega, \qquad (22\text{-}38)$$

تو کلاسکی الکٹران نصف قطر r_0 کے لحاظ سے مساوات (22-36) صرف یہ ہو جاتا ہے :

$$\Delta U = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0}. \qquad (22\text{-}39)$$

تب چونکہ ΔU اس توانائی کو ظاہر کرتا ہے جو ایک دیے ہوئے فی اکائی کے بہاؤ S سے نکل گئی ہے اس لیے ہم مساوات (22-39) کو تواتر پر جذبی عرضی تراش کے ایک اینٹگرل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں :

$$\int_0^{\infty} \sigma(\omega) \, d\omega = 2\pi^2 r_0 c. \qquad (22\text{-}40)$$

یہ کلاسکی "جوڑ کا قاعدہ" ہے جو تواتر پر اینٹگریٹ کی ہوئی پوری جذبی عرضی تراش دیتا ہے۔ ایک واحد چارج کے لیے ایک سے زیادہ بندشی تواتر کی موجودگی سے مساوات (22-40) میں کوئی فرق نہیں آئے گا۔

یہاں کچھ اور باتیں کہہ دینا مناسب ہوگا۔ مساوات (22-40) صرف "دو قطبی جاذبیت" کے لیے اینٹگریٹ کی ہوئی عرضی تراش دیتا ہے کیونکہ اہتزار کار کے "حیطۂ ارتعاش" x کو لہر لمبائی کے مقابلے میں چھوٹا مانا گیا ہے۔ یہ بھی دھیان رکھیے کہ ہم نے نقل x کو E کے متوازی مانا ہے۔ یہ اس حالت میں ہوگا جب کہ واقع اشعاع تقطیب شدہ ہے اور ایک ابعادی اہتزار کار پر سیدھی گر رہی ہے جس سے x, E کے متوازی ہے یا جب کوئی من مانا لہر گروہ ایک سہ ابعادی اہتزار کار پر گر رہا ہے۔ جب کوئی غیر مخصوص والا تقطیب شدہ میدان

کسی ایک ابعادی اہتزاز کار پر گرتا ہے، تو مساوات ,(22-38)، .(22-39) اور (22-40) کو 3 سے تقسیم کرنا ہوگا کیونکہ تب مساوات (22-34) میں ایک جز $\cos^2\theta$, شامل ہوجائے گا جہاں x اور E_x کے درمیان کا زاویہ θ ہے، اور $\cos^2\theta$ کی ایک کرہ کے اوپر لی گئی اوسط قیمت $\frac{1}{3}$ ہے۔ مساوات (22-40) کو عام کرکے برقی دوقطبی جاذبیت کے کسی میکینزم پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔ لیکن ہمیں یہ یاد رکھنا ہوگا کہ اگر اس مساوات کو ایسے نظام پر لاگو کیا جاتا ہے جہاں چارج شدہ ذرات نظام کی کل کمیت کے مقابلے میں ہلکے نہیں ہیں تو e کی جگہ $e_{effective}$ کا استعمال کرنا ہوگا جہاں m جاذب نظام کی ترمیم شدہ "کمیت بن جاتا ہے اور

$$\frac{\text{چارج کا کمیتی مرکز کی نسبت سے نقل}}{\text{چارج کا مطلق نقل}} \qquad (22\text{-}41)$$

اگر ایک سے زیادہ چارج شدہ ذرّہ موجود ہے تو جوڑ کے قاعدے کو عام بناکر یہ کردیا جاسکتا ہے کہ

$$\int_0^\infty \sigma(\omega)\, d\omega = 2\pi^2 c \sum_i \frac{e^2_{i\,eff}}{4\pi\epsilon_0 m_i c^2}. \qquad (22\text{-}42)$$

22-6: ایک اہتزاز کار اور اشعاعی میدان کے درمیان تعادل

اس سے پہلے کے سیکشن میں ہم نے اُس توانائی کی عبارت حاصل کی جسے ایک الاسٹک طریقہ سے بندھا الکٹران اشعاع کی ایک خارجی توانائی فلکس S میں جس کی اسپکٹرمی تقسیم $S_\omega\, d\omega$. ہے جذب کرتا ہے۔ اب ہم ایک خطی اہتزار کار پر غور کرتے ہیں جو ایسے اشعاعی میدان میں واقع ہے جس کی سمت اور تقطیب بے ترتیب ہیں اور جس کی توانائی کثافت کی کی اسپکٹرمی تقسیم یہ ہے ؛

$$U_v = \int_0^\infty U_{v\omega}\, d\omega. \qquad (22\text{-}43)$$

اب مان لیجیے کہ وقت Δt. میں جذب ہوئی توانائی ΔU ہے۔ ظاہر ہے :

$$U_{v\omega} = S_\omega / c\, \Delta t,$$

اور مساوات (22-39) کا استعمال کرسکنے کے لیے ہم داہنے طرف کو 3 سے تقسیم کردیں گے، جس کی وجہ پر ہم اوپر بحث کرچکے ہیں۔ اس لیے

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{2\pi^2}{3} r_0 c^2 U_\omega. \qquad (22\text{-}44)$$

مساوات (20-19) سے ہم جانتے ہیں کہ ایسے اہتزار کار سے وقت Δt میں اشعاع کے ذریعے خارج ہوئی توانائی یہ ہے،

$$\frac{\Delta U_{rad}}{\Delta t} = \frac{2}{3} r_0 \frac{m\ddot{u}^2}{c}. \qquad (22\text{-}45)$$

اہتزار کی ایک سائکل پر اوسط لینے پر مساوات (22-45) یہ ہوجاتا ہے:

$$\overline{\frac{\Delta U_{rad}}{\Delta t}} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega^2}{c} U, \qquad (22\text{-}46)$$

چونکہ $m\overline{\dot{u}^2} = m\overline{\dot{u}_0^2}/2 = \omega^2 U,$ جہاں $\dot{u}$ کی فراز قیمت $\dot{u}_0$ ہے اور جہاں U اہتزاز کار کی توانائی ہے۔ اب مان لیجیے کہ اہتزار کار ایک دیوار سے گھرا ہے (جو اسی ٹمپریچر پر ہے جو اہتزار کار کا ہے) جو خارج ہوئی توانائی کو جذب کرلیتی ہے اور اسے پھر بلا کسی ترتیب کے خارج کرتی ہے۔ ان حالات میں اہتزار کار اپنے ماحول سے تعادل قائم کرلے گا اور اس لیے مساوات (22-46) اور (22-44) برابر رکھے جاسکتے ہیں۔ لہٰذا:

$$U_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} U. \qquad (22\text{-}47)$$

کسی "مطلق سیاہ" دیواروں والے جوف میں برق مقناطیسی اشعاع کی توانائی کثافت کی تواتری تقسیم اس رشتہ کے تابع ہے، یہ تقسیم کسی مخصوص ٹمپریچر پر اہتزار کار کے شماریاتی رویّہ پر منحصر ہوتی ہے۔ اگر اہتزار کار پر کلاسیکی شماریاتی میکانیات عائد کی جائے یعنی اگر ہم $U = kT.$ رکھیں تو یہی نتیجہ ہمیں سیدھے جینس تابانی تضادی اسپکٹرمی تقسیم پر پہنچاتا ہے جو ریلے جین نے حاصل کی تھی ظاہر ہے کہ دیے ہوئے ٹمپریچر پر ایک مخصوص تواتر کے لیے توانائی کثافت تواتر

بڑھنے کے ساتھ بے حساب نہیں بڑھ سکتی۔

مساوات (22-47) کا تقسیمی قانون ایک بالکل مختلف طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ باب 24 میں یہ دکھایا جائے گا کہ ایک محدود اشعاعی میدان کے میدانی مساواتوں کا اس طرح تبادل کیا جا سکتا ہے کہ وہ سادہ ہارمونک اہتزاز کاروں کے مرادف ہو جاتے ہیں۔ درحقیقت مرادف اہتزاز کاروں میں اور گھیرے کے اندر کے میدان کے نارمل طرزوں میں ایک کے ساتھ ایک مطابقت ہوتی ہے۔ تب مساوات (22-47) میں ضربیہ ω^2/π^2c^3 فی اکائی دائری تواتر وقفہ کے لیے نارمل طرزوں کی تعداد بتاتا ہے (باب 13 کے آخر میں دی ہوئی مشقوں میں مسئلہ 8 کے جواب سے ملائیے)

22-7، ایک حجم میں پھیلے انتشار کاروں کا اثر

اگر ہمارے پاس فی اکائی حجم N الکٹرانی انتشار کار ہیں تو ان میں سے ہر ایک آنے والی ہموار لہر کو مساوات (22-30) کے مطابق منتشر کرے گا۔ عام طور سے منتشر ہوئی اشعاع باہری میدان کے ساتھ مربوط طور پر مل جائے گی۔ اور اس طرح سے لہر کی موثر رفتار میں ترمیم کر دے گی۔ انتشار کاروں کی ایک بہت بڑی تعداد کے اثر کو، چاہے الکٹران ہوں یا مالیکیول، منتشر ہوئی لہروں کے انطباق کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ لیکن انعطاف کے مطالعہ کے لیے ریاضیاتی لحاظ سے زیادہ آسان یہ ہوگا کہ منکسر اشعاع کو منفرد الکٹرانوں کے نقل کی ترکیب سمجھنے کی بجائے ایک پورے حجمی قطعہ کی برقی تقطیب کی وجہ سے سمجھا جائے۔ تقطیب کا انفرادی الکٹرانوں کے نقل سے حسب ذیل رشتہ ہے۔

$$\mathbf{P} = Ne\mathbf{x}. \qquad (22\text{–}48)$$

حجمی تقطیب کا اثر یہ ہے کہ وہ تقطیبی کرنٹ $\partial \mathbf{P}/\partial t$ کا اضافہ خلائی نقل کرنٹ $\epsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t$ میں مقناطیسی میدان کے ایک گردشی ماخذ کے طور پر کر دیتا ہے۔ مساوات (9-6)(4) یہ ہو جاتا ہے۔

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right). \qquad (22\text{–}49)$$

اس مساوات کو حسب معمول $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ کے ساتھ ملانے پر متجانس لہر مساوات ملتے ہیں۔

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (22\text{-}50)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0,$$

جہاں :

$$n = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{P}|}{\epsilon_0 |\mathbf{E}|}} = \sqrt{\kappa} \qquad (22\text{-}51)$$

انعطافی انڈیکس ہے۔

ہلکے نظاموں کے لیے جس میں واقع شعاع کی توانائی کے مقابلے میں منتشر ہوئی توانائی بہت کم ہوتی ہے یہ ایک عمدہ تخمینہ ہوگا، اگر انتشار کار پر مقامی میدان کو آنے والی شعاع ہی کا میدان مان لیا جائے۔ اس لیے مساوات (22-19) سے

$$n^2 = \kappa = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \qquad (22\text{-}52)$$

مساوات (22-52) الکٹرانوں کی ایک ہلکی گیس کے لیے جن کا صرف ایک بندشی تواتر ہے۔ انکسار فارمولہ ہے۔ اگر $\omega < \omega_0$, ہو تو ہمیں وہ حالت ملتی ہے جسے "نارمل انکسار" کہتے ہیں جس میں انعطافی انڈیکس لہر لمبائی کے بڑھنے کے ساتھ کم ہوتا جاتا ہے۔ $\omega \simeq \omega_0$ پر ایک جاذبی پٹی ہوتی ہے جس پر n کا خیالی حصہ قابل لحاظ ہوتا ہے۔ گمکی تواتر سے کم لہر لمبائی کی طرف $n < 1,$ لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ c/n فیز رفتار ہے؛ گروہ رفتار $d\omega/dk,$ گمکی تواتر کے دونوں طرف c سے کم ہے۔ ان تواتروں کے لیے جو ω_0 کے بالکل قریب ہیں ترسیل کا سوال زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے اور ہم اس پر بعد میں غور کریں گے۔ ایک واحد تواتری ہموار لہر حل کی شکل یہ ہوگی،

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp[i\omega t - n(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})], \qquad (22\text{-}53)$$

جہاں $\mathbf{k}$ ترسیل کی سمت میں لہر ویکٹر ہے۔ اس لیے اگر n میں ایک خیالی

حصہ ہے تو E میں ایک ایسا جز شامل ہوگا جس کے مطابق جاذبیت ایکسپونشی ڈھنگ سے ہوگی۔

اگر وسیلہ ہلکا نہیں ہے تو مقامی میدان خارجی میدان کے برابر نہیں ہوتا ہے لیکن اس کا تخمینہ مساوات (2-36)

$$E_{eff} = E + (P/3\epsilon_0).$$

سے مل سکتا ہے۔ تطبیت کو جس کی تعریف مساوات (22-9) میں کی گئی ہے معلوم کرنے کے اس میدان کو مساوات (22-48) میں رکھنا ہوگا۔ میدانوں کو خارج کر دینے پر ہمیں مساوات (2-39) کے کلاسیس میسوٹی رشتہ کا ہم پلہ ملتا ہے۔

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \qquad (22\text{–}54)$$

مساوات (2-39) سے مشابہت اور زیادہ قریب ہو جاتی ہے اگر ہم مساوات (22-54) کو کلاسیکی الکٹران نصف قطر r_0، اور لہر اعداد $\Gamma = \gamma/c;$ $k = \omega/c, k_0 = \omega_0/c,$ کے لحاظ سے ظاہر کریں اور N کو کثافت ρ_m، مالیکیولی وزن M، اور اوگیڈرو عدد N_0 کے لحاظ سے $\rho_m N_0/M$ کے برابر رکھ دیں :

$$\frac{3M}{\rho_m}\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) = N_0\alpha = \frac{4\pi N_0 r_0}{k_0^2 - k^2 - ik\Gamma}. \qquad (22\text{–}55)$$

کسی مخصوص تواتر پر مساوات (22-55) کا داہنا حصہ شے کی ایٹمی خصوصیات پر ہی منحصر ہوتا ہے اور اس لیے کثافت سے بے تعلق ہوتا ہے۔ بائیں طرف کی مقدار چونکہ ایک گرام مالیکیول کے لحاظ سے ہے اس لیے اسے "مولی انعطاف" کہتے ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ فی گرام مالیکیول تقطیب پذیری کے برابر ہے۔

اس امر کو بھی دائرۂ شمار میں لانے کے لیے کہ سب الکٹرانوں کی بندشی توانائی ایک نہ ہو ہم مساوات (22-52)، (22-54) اور (22-55) کی تعمیم کر سکتے ہیں۔ اگر الکٹرانوں کے ایک حصہ f_i تواتر ω_{0i} ہو اور تقصیری

جو ٹرائی γ_i ہو تو مثال کے طور پر مساوات (22-54) یہ ہو جاتا ہے۔

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m}\sum_i \frac{f_i}{\omega_{0_i}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_i} \qquad (22\text{-}56)$$

ایسی حالت کی جس میں حجمی تقسیم آزاد الکٹرانوں پر مشتمل ہوئی ایک عملی مثالیں ہیں: آیونی کرہ سے برق مقناطیسی لہروں کا انعطاف؛ برقی ڈسچارج میں پلازما سے مکرر اشعاع کا اخراج، اور x- کرنوں کا انعطاف بھی کیونکہ ہلکے ایٹموں میں الکٹرانوں کے گمکی تواتر x- کرنوں کے تواتروں کے مقابلے میں اتنے چھوٹے ہوتے ہیں کہ الکٹرانوں کو آزاد مانا جا سکتا ہے۔ ان آزاد الکٹرانوں والے نظاموں میں جو ہلکے ہیں مساوات (22-52) یہ ہو جاتا ہے۔

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}. \qquad (22\text{-}57)$$

مساوات (22-57) کو مندرجہ ذیل طرح سے لکھا جا سکتا ہے اگر اسے تخفیف شدہ آزاد فضائی لہر لمبائی $\lambda = c/\omega$, کے لحاظ سے اور کلاسکی الکٹران نصف قطر $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$, کے لحاظ سے ظاہر کیا جائے۔

$$n^2 = 1 - 4\pi N r_0 \lambda^2. \qquad (22\text{-}58)$$

آزاد الکٹرانوں کی حجمی تقسیم کے لیے انعطافی انڈیکس ہمیشہ اکائی سے کم رہتا ہے اگرچہ گروہ رفتار c سے کم ہوتی ہے، لیکن ان لہر لمبائیوں کے لیے جو ایک مخصوص لہر لمبائی $(4\pi N r_0)^{-1/2}$, $\lambda >$ سے زیادہ ہیں n^2 منفی ہوتا ہے اور انعطافی انڈیکس خالص خیالی۔ ان تواتروں کے لیے آزاد الکٹرانی وسیلے ہر زاویہ کے لیے مکمل انعکاس دکھائیں گے اور خاتم تواتر سے نیچے کے تواتروں کے لیے ایک لہر گائڈ کا سا رویہ رکھیں گے۔

سیکشن 11-8 میں ہم نے فیز اور گروہ رفتار کے تصور کا تذکرہ کیا تھا۔ چونکہ انڈیکس n فیز رفتار کی ایک ناپ ہے اور چونکہ ہم اوپر اس کے تواتر پر انحصار پر بحث کر چکے ہیں لہٰذا مساوات (11-69) سے ہم گروہ رفتار کا حساب لگا سکتے ہیں اگر فیز رفتار تواتر کا آہستہ آہستہ بدلنے والا فنکشن ہے تو ایک ملیں

بلا کسی خاص تبدیلی کے ایک انکساری وسیلہ میں سفر کر سکتا ہے اور گروہ رفتار جس کی تعریف اس کے بیش ترین وسعت والے تواتر سے کی جاتی ہے، توانائی کی ترسیل کی شرح سے ہوتا ہے۔ لیکن بے ضابطہ انکسار کے خطہ میں dn/dλ مثبت ہوتا ہے اور گروہ گر رفتار آسانی سے c سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ کسی خاص تواتر کے لیے زیادہ معقول یہ ہوگا کہ ترسیل توانائی کی اوسط رفتار کی تعریف اس نسبت سے کی جائے جو پوائنٹنگ ویکٹر کے وقتی اوسط کے درمیان ہے۔ یہ رفتار جسے رفتار توانائی کہتے ہیں۔ فی الواقع ω₀ پر ایک صغرا رکھتی ہے۔

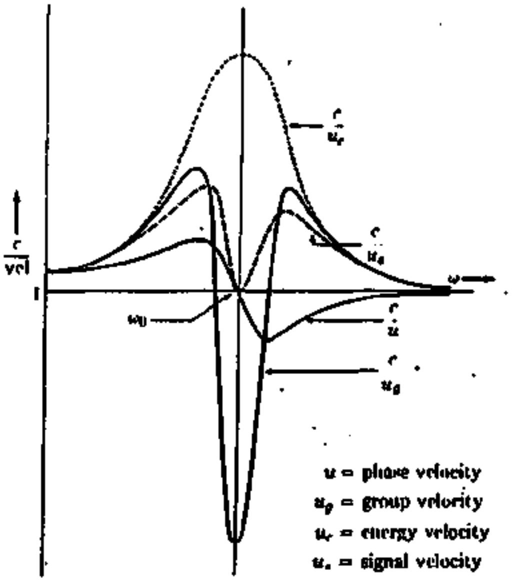
وہ عملی دشواری جو ایک سگنل کی بے ضابطہ انکسار کے خطہ میں ترسیل کے بیان میں پیش آتی ہے اس وجہ سے ہے کہ گروہ یا پیکٹ بے حد بدشکل ہو جاتا ہے جس کی وجہ سے گروہ رفتار کا تصور جس کی تعریف سیکشن 8-11 میں کی گئی تھی اس حالت میں جائز نہیں رہ جاتا۔ ایک ہموار لہر سے متعلقہ مسئلہ کو جو ایک خاص وقت پر ایک وسیلہ میں چلنا شروع کرتی ہے سومرفلڈ نے اور بریلوئن نے حل کیا ہے اور جس کی تفصیلات II *Congrès International d'Electricité*, Paris, 1932.* میں مل سکتی ہیں۔ سگنل کی رفتار کی تعریف پلس کی نوعیت پر اور سگنل پکڑنے والے آلے دونوں پر منحصر ہوتی ہے لیکن پر احتیاط تجزیہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ یہ کبھی c سے زیادہ نہیں ہوتی۔ شکل 22-4 میں ایک جاذبی تواتر کے قریب میں چاروں رفتاروں کا رویہ دکھایا گیا ہے۔

22-8 حجمی تقسیم کے انتشار۔ ریلے انتشار

منتشر ہوئی اشعاع کے اس حصہ کا حساب جو آنے والی لہر سے مربوط ہے اور اسی کی سمت میں ہے کامیابی کے ساتھ مجموعہ کی کل تقطیب کے ذریعہ کیا جا چکا ہے۔ کسی اور زاویہ پر انتشار کے لیے عام طور سے یہ ضروری ہوگا کہ منفرد لہرچوں کا ان کے صحیح فیزوں کے ساتھ انطباق کیا جائے۔

---

* The method is to make a Fourier analysis of the incident pulse, let each component be propagated with the phase velocity $u(\omega)$, and resynthesize the pulse.



[شکل .22-4 مختلف رفتاروں کا ایک گمگی تواتر کے قریب رویہ (بریلوئن کے مطابق)]

اگر الکٹران بالکل بے ترتیبی سے بٹے ہوئے ہیں تو یہ مانا جا سکتا ہے کہ فیروزروں کے فرق جتنی بار مثبت ہوں گے اتنی ہی بار منفی اور اس طرح اوسط میں ختم ہو جائیں گے لہٰذا پوری منتشر شدت صرف انفرادی منتشر شدتوں کا جوڑ ہوتی ہے۔ اگر انتشار کار کسی ترتیب میں واقع ہیں جیسے کسی رویے میں تو اس حالت میں یہ صحیح نہیں ہوگا اور اثر ٹھیک وہی ہوگا جو ایک سہ۔ ابعادی انعراجی گریٹنگ کا ہوتا ہے۔ ایسی جس سمت میں ہمسایہ انتشاری مرکزوں سے لہریں یکے بعد دیگرے فیز میں ہوں گی اس سمت میں شدت بیش ترین ہوگی۔ معمولی رووں میں x کرنوں کے لیے ایسی بہت سی سمتیں ہوسکتی ہیں جن سے براگ انعراف پیدا ہوتا ہے[1] لیکن اگر ہمسایوں کے درمیان

---

[1] دراصل ایک روا "گریٹنگ" کی سہ ابعادی نوعیت کا نتیجہ یہ ہے کہ صرف ایک خاص لہرلمبائی اور ایک خاص زاویہ کے لیے ستونوں کے کسی جٹ سے تعمیری مداخلت مل سکتی ہے جس میں انتشار کار برابر برابر دوریوں پر رکھے ہوں۔ لہٰذا ایک مفرد روے کو یک تواتری x کرنوں میں رکھنے کے دوران گھمانا ضروری ہے

(باقی اگلے صفحہ پر)

فاصلہ کے مقابلے میں لہر لمبائی بڑی ہے تو سوا آگے کی سمت کے بیش ترین ہونے کی شرط کسی اور سمت میں پوری نہیں ہوگی ٹھیک اسی طرح جیسے ایک ایک ابعادی انصرافی گریٹنگ کوئی پیٹرن نہیں بناتی اگر گریٹنگ فاصلہ λ سے بہت چھوٹا ہو۔

اس آخری نقطہ سے متعلق ایک سوال بے ترتیب انتشار کاروں کی بابت پیدا ہوتا ہے۔ ایک مکعب حجم پر غور کیجیے جس کا کنارہ آدھی لہر لمبائی کا ہے اور جس میں بہت سے ایٹم یا مالیکیول ہیں۔ گو مکعب کے اندر الکٹران بے ترتیبی سے بٹے ہوئے ہیں پھر بھی اس کی اشعاع ایسے ہی ہمسایہ حجم کی اشعاع سے جو مشاہدہ کی سمت میں شعاع کے عمودی واقع ہے۔ اوسط میں فیز میں مختلف ہوگی۔ لہٰذا ایسے ہی بہت سے حجموں کا جو مجموعی انتشار مشاہدہ میں آئے گا وہ کسی بھی زاویہ کے لیے بے شک سیدھی سمت کو چھوڑ کر، صفر ہونا چاہیے۔ اب مرئی روشنی کے ہوائی کرّہ کے ذریعہ انتشار میں بالکل یہی حالات پائے جاتے ہیں۔ تو پھر ریلے کا نتیجہ کیوں مشاہدہ سے اتفاق کرتا ہے؟

اس سوال کا جواب آئن اسٹائن اور سمالوچوسکی نے ہوائی کرّے میں کثافت کی تبدیلیوں کے مطالعہ کی بنا پر دیا ہے۔ ہر "خانہ" میں یا $\lambda/2$، ابعاد والے ہر مکعب میں انتشار کاروں کی تعداد صرف اوسط میں مستقل ہوتی ہے، اور اس تعداد میں اتار چڑھاؤ انتشار کے لیے ذمّہ دار ہیں۔ اگر ہر خانے میں انتشاری الکٹرانوں کی تعداد N_i ہے اور δN_i واقعی تعداد کا اوسط

(باقی حاشیہ صفحہ گزشتہ) جس سے انصرافی نمونے میں ساری ترتیبیں ظاہر ہو جائیں۔ کسی ایک ابعادی یا دو ابعادی گریٹنگ میں اگر لہر لمبائی کافی کم ہے تو ہمیشہ ایسا زاویہ ضرور ملے گا جس پر کسی مخصوص لہر لمبائی کے لیے تعمیری مداخلت حاصل ہو۔

فرق ہے تو انتشار کی شدت مندرجہ ذیل کے متناسب ہوگی۔

$$\left|\sum_j e^{i\varphi_j}\,\delta N_j\right|^2 = \sum_j (\delta N_j)^2 + \sum_{j\neq k} e^{i(\varphi_j-\varphi_k)}\,\delta N_j\,\delta N_k, \qquad (22\text{-}59)$$

جہاں φ_j ویں خانے کا فیز ہے۔ مشاہدہ سے موازنہ کرنے کے لیے ہم کو مساوات (22-59) کا اوسط لینا ہوگا۔ ہلکی گیسوں میں مختلف خانوں میں اُتار چڑھاؤ ایک دوسرے سے آزاد ہوتے ہیں اور چونکہ تعریف کے مطابق δN_j کا اوسط صفر ہے لہذا داہنے طرف کی دوسری رقم ختم ہوجائے گی اگر تبدیلیاں چھوٹی ہیں تو "انکسار" (مربع کو احتمالی نظریہ میں جذر وسط۔ مربع انحراف کہتے ہیں) یہ ہے:

$$\overline{(\delta N_j)^2} = N_j. \qquad (22\text{-}60)$$

اس لیے مکمل انتشار محض $\Sigma N_j = N,$ کے متناسب ہوتا ہے جو انتشاری مرکزوں کی کل تعداد ہے۔ یہ ریلے کے مفروضہ سے اتفاق کرتا ہے۔ زیادہ کثافت کے وسیلوں کے لیے مساوات (22-59) کے اوسط کی قیمت نکالنا زیادہ پیچیدہ ہے اور ایک کیمیاوی فیز تبدیلی کے قرب میں یہ تبدیلیاں وہ حالت پیدا کر دیتی ہیں جسے انقلابی دودھیاپن کہتے ہیں۔

22-9 انکساری رشتہ (انعطاف اور جاذبیت کے درمیان یعنی ڈائلکٹرک مستقلہ کے حقیقی اور خیالی حصوں کے درمیان)

ایک عام رشتہ اخذ کیا جا سکتا ہے اگر خارجی میدان کی وجہ سے پیدا ہوئی تقطیب کے فوریر تجزیہ پر غور کیا جائے جس میں تقطیب پذیری کو تواتر پر ایک نامعلوم ڈھنگ سے منحصر رکھا جائے۔ اس رشتہ کو پہلے پہل کریمرس[1] نے کلاسکی نظریہ سے اخذ کیا تھا جب کہ پہلے اس کا اشارہ کوانٹم نظریاتی خیالات کے ساتھ مشابہت سے ملا تھا۔

ڈائلکٹرک مستقلہ کے حقیقی اور خیالی حصّوں کے لحاظ سے یہ ثبوت بالکل سیدھا ہے۔ مان لیجیے کہ:

$$\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2, \qquad (22\text{-}61)$$

جہاں κ_1 اور κ_2 حقیقی ہیں۔ فرض کر لیجیے کہ کوئی خاص مالیکیول یا دوسرے ذرّہ پر ایک میدان

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega. \qquad (22\text{-}62)$$

جب t منفی ہو تو انٹگریشن کے راستے کو بڑھا کر ایک لامتناہی نصف دائرہ کیا جاسکتا ہے جس کے اندر اوپری نصف مستوا آجاتا ہے کیونکہ حقیقی منفی ایکسپونینسی مخلوط مستوا کے اوپری نصف میں ایک لامتناہی دائری راستے کے اوپر انٹگرینڈ کو غائب کردے گا۔ چونکہ یہ t کی سب منفی قیمتوں کے لیے صحیح ہے اس لیے اوپری نصف مستوا میں فنکشن $(\kappa_1 + i\kappa_2 - 1)e^{-i\omega t}$ کے باقی ماندہ کے جزر غائب ہوجائیں گے اور اس لیے سارے نصف مستوا میں $(\kappa_1 + i\kappa_2 - 1)$ تجزیاتی ہے۔ اس نتیجہ کا پختہ ثبوت ٹشمارش[*] نے دیا ہے۔ اور جوق اور رورلک [†] نے اس پر بحث کی ہے۔ انھیں حوالوں میں ڈائلکٹرک مستقلہ کے اسپٹوری رویہ پر بھی جو اس اخذ کے جائز ہونے کے لیے لازمی ہے۔ ایک بحث ملے گی، مساوات (22-52) سے حاصل ہوئے ڈائلکٹرک مستقلہ کا واقعی رویہ ان شرائط کو مطلق کرتا ہے۔

آیئے ہم ω کی ایک حقیقی مثبت قیمت لیں اور سہولت کے لیے انٹگریشن کے متغیرہ کو ω' کہیں۔ اگر فنکشن $[\kappa_1(\omega') + i\kappa_2(\omega') - 1]$ تجزیاتی ہے تو کاشی کے مصدقہ سے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ

---

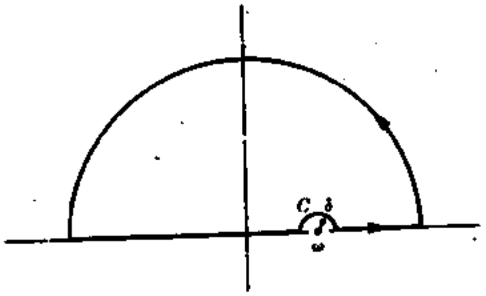
[*] H. A. Kramers, *Atti. Congr. Internat. Fisici, Como* 2, 545–557 (1927); or *Collected Scientific Papers*, Amsterdam, North Holland Pub. Co., 1956.

$$\oint \frac{\kappa_1 + i\kappa_2 - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \qquad (22\text{-}67)$$

اگر کنٹور میں نقطہ $\omega' = \omega$. شامل نہیں ہے۔ اگر ہم شکل 22-5 کا کنٹور چنیں تو صاف ظاہر ہے کہ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \qquad (22\text{-}67')$$

جہاں $-\infty$ سے $+\infty$ تک انٹگرل حقیقی محور کے سمت میں ہے سوا نصف قطر δ کے اس نصف دائرہ کے جو کنٹور سے $\omega' = \omega$. پہ کی ندرت کو خارج کر دیتا ہے۔ تب شرط (22-67') یہ ہو جاتی ہے۔



[شکل 22-5. $t < 0$ کے لیے مخلوط مستوا میں انٹیگریشن کا راستہ۔ کنٹور C اوپری نصف مستوا میں نقطہ $\omega' = \omega$ کے گرد ایک نیم قطر δ :ہے]

* E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, 1937.

† J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Appendix A7, pp. 470–473.

$$\frac{\kappa(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\,d\omega' + \int_0^\infty \frac{\kappa(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\,d\omega' + \int_C \frac{\kappa(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\,d\omega' = 0 \qquad (22\text{-}68)$$

جہاں 0 سے ∞, تک کے اینٹگرل سے یعنی

$$\int_0^\infty f(\omega, \omega')\,d\omega' = \lim_{\delta \to 0}\left[\int_0^{\omega-\delta} f(\omega, \omega')\,d\omega' + \int_{\omega+\delta}^\infty f(\omega, \omega')\,d\omega'\right]; \qquad (22\text{-}69)$$

سے کاشی کی مخصوص قیمت سمجھنی چاہیے۔ اور جہاں C اوپری نصف مستوا میں نقطہ $\omega' = \omega$ کے گرد نصف قطر δ کا نصف دائرہ ہے۔ (22-64) کے رشتوں کا اور δ کے چھوٹے ہونے کا فائدہ اٹھا کر ہم مساوات (22-68) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_0^\infty \frac{\kappa_1(\omega') - i\kappa_2(\omega') - 1}{-\omega' - \omega}\,d\omega' + \int_0^\infty \frac{\kappa_1(\omega') + i\kappa_2(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\,d\omega' + [\kappa_1(\omega) + i\kappa_2(\omega) - 1]\int_C \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{\omega[\kappa_1(\omega') - 1] + i\omega'\kappa_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}\,d\omega' - \pi i[\kappa_1(\omega) + i\kappa_2(\omega) - 1] = 0 \qquad (22\text{-}70)$$

چونکہ C کے چاروں طرف کا اینٹگرل کاشی کے مصدقہ سے $-\pi i$ ہے۔ مساوات (22-70) کے حقیقی اور خیالی حصوں کو صفر کے برابر رکھنے سے مطلوبہ رشتے مل جاتے ہیں:

$$\kappa_1(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega'\kappa_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}\,d\omega', \tag{22-71}$$

$$\kappa_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\kappa_1(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}\,d\omega'. \tag{22-72}$$

ایک بار پھر ہم دیکھتے ہیں کہ انٹگرلوں سے مساوات (22-69) کے معنی میں مخصوص قیمتیں سمجھنا چاہیے۔ یہ صاف ہے کہ ان رشتوں کا انحصار صرف تقطیب کے حقیقی ہونے پر ہے اور اس شرط پر ہے کہ تقطیب وقت میں اُس میدان سے پہلے نہیں ہو سکتی جو اسے پیدا کرتا ہے۔

مساوات (22-71) اور (22-72) انکساری رشتے کہلاتے ہیں ہم اگلے سیکشن میں دیکھیں گے کہ خیالی حصہ κ_2 کا رشتہ واقع شعاع کے انتشار اور جاذبیت کے کل عرضی تراشوں کے لیے سب تواتروں کے اوپر انٹگرل کی شکل میں ظاہر کرتا ہے۔

22-10 انتشار اور جاذبیت پر ایک عام مصدقہ

اس باب میں جو نتائج حاصل کیے گئے ہیں ان میں سے بہت سے "سایہ مصدقہ" سے بھی اخذ کیے جا سکتے ہیں جو اشعاع کے کسی شے یا اشیا کے مجموعہ سے منتشر ہونے یا جذب ہونے کے متعلق ایک عام مصدقہ ہے۔ ہم میدانوں کے لیے ایک مخلوط اظہار اس طرح پر مان لیتے ہیں کہ کسی ایک تواتر کا وقت پر انحصار جزو $e^{-i\omega t}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے ہم میکرو میدانی مساواتوں کا استعمال کر سکتے ہیں اور اس بات کے امکان کے لیے گنجائش رکھ سکتے ہیں کہ چالکتا σ کی وجہ سے جاذبیت ہو سکتی ہے۔ عام طور سے مشمول مساواتوں کو خطی مان لینے پر میکسویل کے رشتے:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E}, \tag{22-73}$$

$\mathbf{E}^*$ اور $\mathbf{H}^*$ کے لیے بھی صحیح ہوتے ہیں جو $\mathbf{E}$ اور $\mathbf{H}$ کے مخلوط جوڑی دار ہیں۔
سیکشن 10-5 کے عمل سے بالکل مشابہ عمل کے ذریعہ یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ :

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H}}{4}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu|\mathbf{H}|^2 + \epsilon|\mathbf{E}|^2}{4}\right) - \frac{\sigma|\mathbf{E}|^2}{2}. \qquad (22\text{-}74)$$

عددی جز کو اس حساب سے لیا گیا ہے جس سے کہ $\frac{1}{4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H})$ توانائی کے بہاؤ کی (حقیقی) کثافت کو ظاہر کرتا ہے $\frac{1}{4}(\mu|\mathbf{H}|^2 + \epsilon|\mathbf{H}|^2)$ توانائی کثافت ہے ؛ اور $\frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}|^2$ فی اکائی حجم توانائی کے جذب ہونے کی شرح ہے۔

اب آیئے ہم ایک مثبت z سمت میں سفر کرنے والی ہموار لہر پر غور کریں جو اس طرح تقطیب شدہ ہے کہ $\mathbf{E}$ کی سمت میں ہے اور جو بنیادی نقطے کے پاس ایک محدود حجم میں مقیم منتشر اور جذب کرنے والی اشیا سے دو چار ہوتی ہے جیسا شکل 22-6 میں دکھایا ہے، سمتی قدروں کے اکائی ویکٹر $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$; ہیں ز اور $\mathbf{n}$ ایک اکائی ویکٹر اس سمت میں ہے جس کا تعین قطبی زاویہ θ اور سمتیہ زاویہ φ سے ہوتا ہے۔ ایک منتشر ہوئی لہر کے لیے جو z شاخ سے ایک زاویہ θ بناتی ہے $\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta$ ہوتا ہے۔ بنیادی نقطے سے بڑے فاصلوں پر کل میدان اسمپوٹی لحاظ سے اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{E} = E_0\left[\hat{\mathbf{x}}e^{ik\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{kr}\mathbf{F}(\theta,\varphi)e^{ikr}\right],$$
$$\mathbf{H} = \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}E_0\left\{(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})e^{ik\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{kr}[\mathbf{n}\times\mathbf{F}(\theta,\varphi)]e^{ikr}\right\} \qquad (22\text{-}75)$$

جہاں $\mathbf{F}(\theta,\varphi)$ منتشر برقی میدان کی آنے والی لہر کی اضافیت سے ویکٹر وسعت ہے جو عام سے مخلوط ہوتی ہے۔ دھیان رکھیے کہ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}(\theta,\varphi) = 0$.

آیئے اب ہم مساوات (22-75) کے میدانوں کا استعمال کر کے مساوات (22-74) کا انٹگرل ایک ایسے کرہ پر نکالیں جس کے اندر آنے والی لہر پر اثر انداز اشیا ہوں اور جو اتنا کافی بڑا ہو کہ منتشر لہر کی اسمپوٹی شکل جائز ہو قائم حالت کی صورت میں کرہ کے اندر کے میدانوں کی توانائی کثافت کی وقت کے

ساتھ بدلنے کی شرح صفر ہوتی ہے، اس لیے سطحی اینٹگرل آسانی سے مختصر کیا

$$\int \frac{1}{4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = -\int \frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}|^2\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E_0^2 \int_S \Big[2\hat{\mathbf{z}} + \{[\hat{\mathbf{x}}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F}^*)] + [\mathbf{F}^*\times(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})]\}\frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{kr}$$
$$+ \{[\mathbf{F}\times(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})] + [\hat{\mathbf{x}}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F})]\}\frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{kr}$$
$$+ \left(\frac{1}{kr}\right)^2\{[\mathbf{F}^*\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F})] + [\mathbf{F}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F}^*)]\}\Big]\cdot d\mathbf{S}. \qquad (22\text{–}76)$$

جاسکتا ہے۔ $\hat{\mathbf{z}}$ کا اینٹگرل ایک بند کرے پر غائب ہوجاتا ہے۔ $\mathbf{F}$ اور $\mathbf{F}^*$ میں خطی رقمیں سوا آگے کی سمت کے $(\theta = 0)$ صفر سے ناقابل لحاظ مقدار میں مختلف ہیں کیونکہ ایکسپونینشی جز $\exp[ikr(1 - \cos\theta)]$، بطور θ کے فنکشن کے kr کی بڑی مقداروں کے لیے $\cos\theta = 1$ کے قرب کو چھوڑ کر تیزی سے اہتزاز کرتا ہے [مساوات (14–47) سے موازنہ کیجیے]۔ اس لیے

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \{[\hat{\mathbf{x}}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F})] + [\mathbf{F}\times(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})]\}\frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{kr} r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$
$$\cong -\frac{2}{ik^2}\int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{x}})_{\theta=0} = \frac{4\pi i}{k^2}(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{x}})_{\theta=0}, \qquad (22\text{–}77)$$

کیونکہ

$$[\hat{\mathbf{x}}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F})] + [\mathbf{F}\times(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})] = 2(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{کے لیے} \quad \theta = 0. \qquad (22\text{–}78)$$

جو رقمیں $\mathbf{F}^*$ میں خطی ہیں ان کے لیے بھی اسی طرح کی دلیلیں لاگو ہوتی ہیں، اور

$$\left(\frac{1}{kr}\right)^2\int \{[\mathbf{F}^*\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F})] + [\mathbf{F}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F}^*)]\}\cdot d\mathbf{S}$$
$$= \frac{2}{k^2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}|\mathbf{F}|^2\sin\theta\,d\theta, \qquad (22\text{–}79)$$

کیونکہ

$$\mathbf{F}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F}^*) = \mathbf{n}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^*) = \mathbf{F}^*\times(\mathbf{n}\times\mathbf{F}). \qquad (22\text{–}80)$$

اس لیے مساوات (22–76) یہ ہو جاتا ہے:

$$\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E_0^2\left[\frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}|\mathbf{F}|^2\sin\theta\,d\theta + \frac{2\pi i}{k^2}\hat{\mathbf{x}}\cdot(\mathbf{F} - \mathbf{F}^*)_{\theta=0}\right]$$

$$= \frac{}{} \int \sigma |\mathbf{E}|^2 \, dv. \qquad (22\text{-}81)$$

اکائی ٹھوس زاویہ کے لیے انتشاری عرضی تراش وہ توانائی ہے جو اکائی ٹھوس زاویہ میں فی اکائی رقبہ پہ اکائی واقع توانائی کے لیے منتشر ہوتی ہے۔ مساوات (22-75) کے معائنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہ مقدار

$$\frac{d\sigma_{scat}}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} |\mathbf{F}(\theta, \varphi)|^2, \qquad (22\text{-}82)$$

ہے اور اس لیے

$$\sigma_{scat} = \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\mathbf{F}|^2 \sin\theta \, d\theta. \qquad (22\text{-}83)$$

جاذبیت کے لیے عرضی تراش σ_{abs} وہ توانائی ہے جو ضائع ہو جاتی ہے (یہاں مان لیا گیا ہے کہ چالکتا کے ذریعہ) جب فی اکائی رقبہ پہ واقع توانائی اکائی ہے۔ لہٰذا

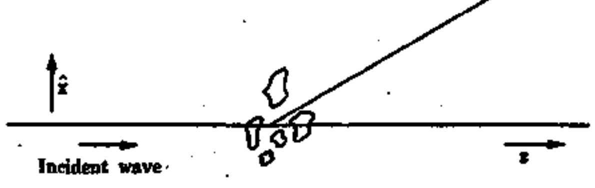
$$\sigma_{abs} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \frac{1}{E_0^2} \int \sigma |\mathbf{E}|^2 \, dv \qquad (22\text{-}84)$$

اُنہی اشیا کی وجہ سے جاذبیت کی عرضی تراش ہے۔ اس لیے

$$\sigma_{total} = \sigma_{scat} + \sigma_{abs} = \frac{2\pi}{ik^2} \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{F}^*)_{\theta=0}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Im} (\mathbf{F})_{\theta=0}, \qquad (22\text{-}85)$$

یعنی انتشار اور جاذبیت کے عرضی تراشوں کا جوڑ آگے کی سمت میں منتشر ہوئی وسعت کے خیالی حصّہ کے متناسب ہے۔



[شکل 22-6. سمتی قدروں کے بنیادی نقطے کے پاس قائم اشیا کے ذریعہ ایک ہموار لہر کا انتشار اور جذب]

ذراتی لہروں کے لیے اسی کے مطابقت کا مصدقہ کوانٹم میکانیات میں بخوبی جانا ہوا ہے[1]
مساوات (22-85) کے مصدقہ کو اکثر "روشنی کا مصدقہ" کہتے ہیں۔

آگے کی سمت کے لیے انتشاری وسعتوں کا رشتہ انعطافی انڈیکس سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر مان لیجیے کہ شکل 22-6 کا انتشاری ایک پتلی چھڑ کی شکل میں $\hat{z}$ محور کے متوازی ہے اور وہ ایک ترغیبی دوقطبی گردشہ $\mathbf{p}$ رکھتا ہے جو یہ ہے:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0(\kappa - 1)V\mathbf{E}_{\text{incident}} = \epsilon_0(\kappa - 1)VE_0\hat{z}, \tag{22-86}$$

جہاں V انتشارکار کا حجم ہے؛ یہ مان لیا گیا ہے کہ انتشارکار کے ابعاد کے مقابلے میں لہر لمبائی بڑی ہے۔ انتشارکار سے آگے کی سمت میں نکلے اشعاعی میدان کا حساب سیکشن 14-7 کے دوقطبی اشعاعی فارمولوں سے نکالا جا سکتا ہے
مساوات (14-79) اور مساوات (22-75) سے ہم پاتے ہیں کہ آگے کی سمت کے لیے

$$E_0\frac{\mathbf{F}(\theta, \varphi)}{kr} = \frac{\mathbf{p}k^2}{4\pi\epsilon_0 r}; \tag{22-87}$$

یا مساوات (22-86) سے

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\kappa - 1}{4\pi}\right)k^3V\hat{z}. \tag{22-88}$$

اس لیے اگر ہم $\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2$ لکھیں جیسا سیکشن 22-6، میں کیا تھا تو (22-85) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$\sigma_{\text{total}} = Vk\kappa_2. \tag{22-89}$$

اس لیے انکسار کا رشتہ (22-71) یہ ہو جاتا ہے:

$$\kappa_1(\omega) = 1 + \frac{2c}{\pi V}\int_0^\infty \frac{\sigma_{\text{total}}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}\,d\omega', \tag{22-90}$$

---

[1] درحقیقت یہ مصدقہ پہلے ذرّہ لہروں کے لیے اخذ کیا گیا تھا۔

E. Feenberg, *Phys. Rev.* 40, 40 (1932).

جہاں اینٹگرل سے مطلب اس کی مخصوص قیمت سے سمجھنا چاہیے اور جہاں σ_{total}
ایک V حجم والے انتشار کار کا کل عرضی تراش ہے جس کی شکل اوپر بتائی جا چکی
ہے جو ایسی شے کا بنا ہوا ہے جس کا کلاں پیمانہ " ڈائیلکٹرک مستقلہ ایک حقیقی حصّہ
κ_1 رکھتا ہے۔

مجوّزہ حوالے

الاسٹک طریقے سے بندھے الکٹران کی بابت اور C III,

R. Becker, *Theorie der Elektrizität*, Band II. Sections B,

جو انکسار اور جاذبیت کے اوپر ہے اس کے مطالعہ کی پرزور سفارش کی جاتی ہے۔

L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields.*

باب 9. میں ایک عمدہ تذکرہ اشعاع اور انتشار پر ملے گا۔

L. Landau and E. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media.*

باب IX, میں انکسار کا رشتہ اخذ کیا گیا ہے اور باب XIV میں انتشار کا تذکرہ
ہے — 1922 دیے گئے لیکچروں کے اس سلسلہ میں بہت سے

H. A. Lorentz, *Problems of Modern Physics.* موضوع اب بھی بہت دلچسپی
کے ہیں لیکن اس تصنیف کا ذکر یہاں اس لیے کیا گیا ہے کیونکہ اس میں ریلے کے فارمولے
کا ہوائی کرّہ پر اطلاق شامل ہے۔

L. Rosenfeld, شاید جدید نقطۂ نظر سے انکسار کے کلاسکی نظریہ کا بہترین
Theory of Electrons. تذکرہ ہے جس میں انقلابی دودھیاپن بھی شامل ہے۔

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* آئینی کرے میں ترسیل پر تذکرہ شامل ہے

H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.*

اس کتاب میں ایک عملی طریقے سے اس پر بحث کی گئی ہے کہ کسی ٹرانسفر فنکشن کے
حقیقی اور خیالی حصّے کس طرح ایسے مساواتوں سے منسلک ہیں جو انکسار کے رشتوں کی
طرح ہیں جن پر یہاں بحث کی گئی ہے۔

مشق

1. دکھایئے کہ ایک ایسی تقطیب شدہ لہر (برقی میدان $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\sin\omega t$، جہاں $\mathbf{A}$ اور $\mathbf{B}$ باہمی عمودی ویکٹر دستیں ہیں) کے لیے ایک آزاد الکٹران کا انتشاری عرضی تراش اس سے ملتا ہے۔

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2\left[\frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{n})^2 + (\mathbf{B}\times\mathbf{n})^2}{A^2 + B^2}\right],$$

جہاں $\mathbf{n}$ اشعاع کی سمت میں ایک اکائی ویکٹر ہے۔

2. وہ کم سے کم تواتر کیا ہے جو آزاد فضا میں بلاتخفیف کے ترسیل ہو سکتا ہے اگر یہ مان لیا جائے کہ ہر مکعب سنٹی میٹر میں ایک الکٹران ہے۔ اس سے زیادہ اونچے تواتروں کے لیے گروہ رفتار معلوم کیجیے۔

3. دکھایئے کہ لہر کی سمتِ ترسیل میں ایک مقناطیسی ترغیبی میدان $\mathbf{B}$ کی موجودگی میں ایک الکٹران گیس دو رفتاریں رکھتی ہے جن کے انعطافی انڈیکس یہ ہیں۔

$$n_\pm^2 = 1 - \frac{(Ne^2/m\epsilon_0\omega^2)}{1 \pm (e|\mathbf{B}|/m\omega)} = 1 - \frac{4\pi r_0 N/k^2}{1 \pm (\omega_L/\omega)},$$

جہاں ω_L لامر تواتر ہے۔

4. گمکی تواتر کے نزدیک لہر اور گروہ رفتار اور جاذبیت ضربیہ کو اتنا کافی صحیح پلاٹ کیجیے کہ وہ مخصوص پہلو ظاہر ہو جائیں جو یہ دکھا دیں کہ انعطافی انڈیکس کے کبریٰ صغریٰ اُن تواتروں پر ہوتے ہیں جہاں جاذبیت ضربیہ کی قیمت کبریٰ کی نصف ہوتی ہے۔

5. $\omega = \omega_0$ پر توانائی کی ترسیل کی شرح کا حساب لگایئے [یعنی پوائنٹنگ ویکٹر کا وقتی اوسط (توانائی کثافت کا وقتی اوسط)]

6. زاویہ θ پر منتشر ہونے آسمان کی روشنی میں کتنی تقطیب کی توقع کی جانی چاہیے؟ آفتاب سے آنے والی روشنی کو غیر تقطیب شدہ مان لیجیے اور صرف واحد انتشار کے لیے حساب لگایئے۔

7 - N نیوٹرانوں اور Z پروٹانوں کے ایک جوہر کو لیجیے اور مان لیجیے کہ $A = N + Z$ دکھایئے کہ اگر خالص برقی دو قطبی جاذبیت مان لی جائے تو "اینٹگریٹ کیا ہوا عرضی تراش" یہ ہے۔

$$\int \sigma \, dE = 2\pi^2 \frac{NZ}{A} \alpha \left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2 Mc^2,$$

جہاں باریک بناوٹ مستقلہ $\alpha \simeq 1/137,$ ہے اور M پروٹان کی کمیت ہے جو تقریباً نیوٹران کی کمیت کے برابر ہے۔ اس اظہار کی عددی قیمت دریافت کیجیے۔

8 - مساوات (22-77) کو اخذ کیجیے۔

9 - مساواتوں (22-19) اور (22-22) کی مدد سے ایک بندھے الکٹران کی انتشاری وسعت Γ کا حساب لگایئے "روشنی کے مصدقہ" مساوات (22-95) سے پورے عرضی تراش کا حساب لگایئے اور مساوات (22-30). کے ساتھ موازانہ کیجیے۔

باب 23

برق مقناطیسی میدانوں میں چارج شدہ ذرات کی حرکت

برقی مقناطیسی نظریہ کا بنیادی مسئلہ چارج شدہ ذرات کی حرکت کے متعلق ہے جو برق مقناطیسی قوتوں کے ذریعہ باہم تفاعل کرتے ہیں اس طرح کی حرکت کے مساوات تشکیل کرنے میں میدانی تصور ضروری نہیں ہے: فاصلہ پر۔کام کے لحاظ سے اضافیتی ہم متغیری[1] طریقے سے تشکیل ممکن ہے بشرطیکہ وقتی تشاکل والی شکل کو اپنایا جائے جو مساوات (21-86) میں پیش اور پس میدانوں کے اوسط پر مشتمل ہے۔ مسئلہ کو "اشعاع" (چارجوں کے ایک نظام کے ذریعہ میدان کا پیدا ہونا) اور "ایک میدان میں چارج شدہ ذرات کی حرکت" میں الگ الگ کرنا کسی معنی میں مصنوعی ہے اور چند مشکلات پیدا کرتا ہے خاص طور سے اس الگاؤ کا مفہوم یہ ہے کہ اشعاع کا حساب نظام کی حرکت سے جو خارجی قوتوں کے تحت ہے لگایا جا سکتا ہے، جیسا ہم نے دیکھا ہے "اشعاع کا ردِّ عمل" بھی ہوتا ہے جسے شمار میں لیا ہوگا تاکہ برقراریت کے قوانین مطمئن ہو سکیں۔ ردِّ عمل کا حساب اشعاع سے لگایا جا سکتا ہے اور نتیجہ سے خارجی قوتوں کی تصحیح کی جا سکتی ہے جس سے ایک زیادہ صحیح بیان حاصل ہو سکے اور جب تک کہ حرکت کی تبدیلی بہت زیادہ نہ ہو متواتر تقربات کا یہ عمل مرکوز ہو جاتا ہے۔ لیکن اس حالت میں جب ردِّ عمل ناقابلِ لحاظ ہیں یہ الگاؤ ممکن ہے اور عام طور پر فائدہ مند ہے کیونکہ کسی چارج کی حرکت کے بیان کے لیے میدان

---

[1] مثال کے طور پر دیکھیے:

J. A. Wheeler and R. P. Feynman, *Revs. Modern Phys.* 21, 425 (1949)

کے ماخذ کی تفصیلی جانکاری کی ضرورت نہیں ہوتی۔ یہاں ہم برقانے ذرّہ کی حرکت پر اس شرط کے تحت بحث کریں گے کہ ردِّ عمل ناقابلِ لحاظ نہیں۔

23-1 عالمی خط کے ذریعہ بیان

باب 17 اور 18 کی ہم متغیری زبان میں ایک کمیت m_0 اور چارج e، رکھنے والے ذرّے کی جس کی چہار رفتار u^i ہے، اور جو ایک خارجی میدان F^{ij} میں متحرک ہے مساواتِ حرکت یہ ہے:

$$m_0 c^2 \frac{du^i}{ds} = e u_j F^{ij}, \qquad (23\text{-}1)$$

اس کے مطابقت کی سہ ابعادی شکل یہ ہے:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \qquad (23\text{-}2)$$

یہاں پہلے کی طرح:

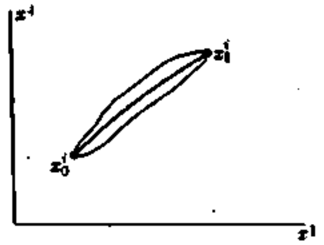
$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u}/\sqrt{1 - u^2/c^2}. \qquad (23\text{-}3)$$

مساواتِ حرکت کو کینانکی شکل میں حاصل کرنے کے لیے رواج یہ ہے کہ پہلے ایک لگرانجی ایسا چنا جاتا ہے جو صحیح مساوات دے۔ ہم یہ اس طرح پر کریں گے جس میں لازمی غیر متغیری صفات پر زور دیا جائے۔

مان لیجیے کہ ذرّے کا عالمی خط $x^i(s)$، سے ملتا ہے جہاں s ذرّہ کے لیے "موزوں" وقت ہے۔ اب ہم چہار۔فضا میں ایسے لگرانجی L_4 کی تلاش کریں کہ حرکت حسبِ ذیل تغیری اصول سے ملے۔

$$\delta \int_{x_0^i}^{x_1^i} L_4(x^i, u^i)\, ds = 0. \qquad (23\text{-}4)$$

تغیر مستقل عالمی نقطوں x_0^i اور x_1^i، کے درمیان لیا گیا ہے جیسا شکل 23-1 میں دکھایا گیا ہے۔ غیر تغیری کا تقاضا ہے کہ L_4 ایک اسکیلر ہو۔ اور ایک خطی مساواتِ حرکت حاصل کرنے کے لیے وہ غیر متغیر جن پر L_4 مشتمل ہے



[شکل 23-1. ایک ذرہ کے راستے کا عالمی خطی تغیر]

x^i میں دوسرے درجہ سے زیادہ اونچے نہیں ہونے چاہییں۔ ایک آزاد ذرے کے لیے ہم اس چناؤ پر پہنچتے ہیں:

$$L_4 = \frac{m_0c^2}{2} u^i u_i, \tag{23-5}$$

جس میں x^i پر صریحی انحصار نکال دیا گیا ہے کیونکہ ایک آزاد ذرہ کے لیے سب عالمی نقطے مساوی ہیں۔ (اس حالت میں u^iu_i ضربیہ من مانا ہے) ہم میدان کے ساتھ ایک اسکیلر تعامل کو استعمال میں لا سکتے ہیں جس کی تعریف ایک چہار۔مضمر $\phi^i(x^i)$ کے ذریعہ کل لگرانجی کے لیے

$$L_4 = \frac{m_0c^2}{2} u^i u_i + e u_i \phi^i. \tag{23-6}$$

رکھ کر کی گئی ہے [مساوات (23-6) کے مستقلوں کو اس حساب سے رکھا گیا ہے کہ حرکت کے مساوات سکونی کمیت اور چارج کے معمول کے رواج کے ساتھ مطابقت ہوں۔] اب ہم مساوات (23-4) کے تغیری اصول کو عائد کرتے ہیں جس سے یولری مساوات ملتے ہیں:

$$\delta \int_{x_0^i}^{x_1^i} L_4(x^i, u^i)\, ds = \int_{x_0^i}^{x_1^i} \left[m_0c^2 u_i\, \delta u^i + e\left(\phi_i\, \delta u^i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}\, \delta x^j u^i\right)\right] ds. \tag{23-7}$$

چونکہ

$$\delta u^i = \frac{d(\delta x^i)}{ds} \quad \text{and} \quad \frac{d\phi_i}{ds} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x^j} u^j,$$

ہم ٹکڑوں میں اینٹگریشن کرسکتے ہیں جس سے یہ ملتا ہے:

$$\int_{x_0^i}^{x_1^i} L_4(x^i, u^i)\, ds = \int_{x_0^i}^{x_1^i} \left[-\frac{d}{ds}(m_0 c^2 u_j) + e\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i}\right) u^i \right] \delta x^j\, ds. \tag{23-8}$$

انٹگریشن والا حصہ اس میں نہیں آتا، کیونکہ فنکشن کا تغیّر x_0^i اور x_1^i. پر غائب ہوجاتا ہے۔ چونکہ $\delta x^i(s)$ راستے کے اوپر من مانا ہے لہٰذا بریکٹ کے اندر کی عبارت صفر کے برابر ہونی چاہیے اور اس لیے

$$m_0 c^2 \frac{du_j}{ds} = eF_{ji} u^i, \tag{23-9}$$

جو کہ مخالف متغیر مساوات (23-1) کا ہم متغیری مرادف ہے۔

23-2 ہیملٹنی تشکیل اور سہ۔ابعادی شکل میں عبور

ہم متغیری تشکیل میں معمولی معنی پر ہیملٹنی کو داخل نہیں کیا جا سکتا کیونکہ معمولی ہیملٹنی مساواتوں

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{dq_\alpha}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{dp_\alpha}{dt}, \tag{23-10}$$

میں وقت غیر متشاکل طریقہ سے آتا ہے۔ دوسری طرف اگر ہم چہار ہیملٹنی کا استعمال کریں درج ذیل رشتوں کا پابند ہونا ہے۔

$$\frac{\partial H_4}{\partial p^i} = \frac{dq_i}{ds}, \quad \frac{\partial H_4}{\partial q^i} = -\frac{dp_i}{ds}, \tag{23-11}$$

تو H_4 (جو H سے مختلف ہے) ایک اسکیلر ہوگا۔ مساوات (23-11) اور مساوات (23-10) کے درمیان رشتہ قائم کرنے کے لیے ہمیں یہ جان لینا چاہیے کہ (23-11) آٹھ مساواتوں کو ظاہر کرتا ہے جب کہ (23-10) چھ کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم دکھائیں گے کہ اگر ہم ایک ایسا اسکیلر $H_4(p^i, q^i)$ دستیاب کرسکیں کہ (23-11) عالمی نقطہ کا صحیح مساوات دے تو اس اسکیلر کی قدر ایک دیے ہوئے ذرّہ کے لیے ایک عالمی مستقلہ ہوتی ہے۔ اگر تب ہم اس مساوات کو $p^4(x_\alpha, p_\alpha, x^4)$، کے لیے حل کریں تو ہم دکھا سکتے ہیں کہ $H.p^4$ کے لیے

مساوات (23-10) کا تابع ہے۔ چونکہ اس طرح p^i ایک ہم متغیر عمل سے پیدا ہوا ہے اس لیے حاصل ہوئے مساوات گو کہ "ظاہرا طور پر" ہم متغیر نہیں ہیں لیکن پھر بھی اضافیتی لحاظ سے صحیح ہیں۔ بے شک ہم آخری کسوٹی یہ اور لگا سکتے ہیں کہ نتیجہ میں صحیح اضافیتی مساواتِ حرکت حاصل ہوں۔

مساوات (23-11) کی پابندی کرنے والے صحیح چہار ہیملٹنی کی تعریف اس سے کی جاتی ہے:

$$H_4 = p^i u_i - L_4, \quad p^i = \frac{\partial L_4}{\partial u_i}, \qquad (23\text{-}12)$$

یا مساوات (23-6) سے:

$$p^i = m_0c^2u^i + e\phi^i. \qquad (23\text{-}13)$$

اس لیے

$$H_4 = \frac{1}{2} m_0c^2u^iu_i = \frac{1}{2m_0c^2}\{[p^i - e\phi^i(x^i)][p_i - e\phi_i(x^i)]\} \qquad (23\text{-}14)$$

H_4 ، p^i اور x^i پر صریحی فنکشن انحصار دیتا ہے۔ لیکن عددی لحاظ سے $u^iu_i = 1$، جس کی u^i کے اجزا کے ذریعہ یعنی $u^i = (u/c, 1)(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ سے آسانی سے تصدیق کی جا سکتی ہے۔

مساوات (23-14) کا چہار۔ ہیملٹنی مساوات (23-11) کے ساتھ مل کر صحیح مساوات حرکت دیتا ہے۔ سیدھے تفرق سے۔

$$\frac{\partial H_4}{\partial q^i} = -\frac{e}{m_0c^2}(p^j - e\phi^j)\frac{\partial \phi_j}{\partial x^i}$$

$$= -\frac{dp_i}{ds} = -m_0c^2\frac{du_i}{ds} - e\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}u^j. \qquad (23\text{-}15)$$

اس لیے

$$eu^j\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}\right) = m_0c^2\frac{du_i}{ds}, \qquad (23\text{-}16)$$

جو مساوات (23-1) سے اتفاق کرتا ہے

آیئے اب ہم ہیملٹنی کے معمولی سہ۔ ابعادی اظہار کی طرف توجہ کریں ہم

مان لیتے ہیں کہ

$$H(p_\alpha, q_\alpha, t) = p^4(p_\alpha, q_\alpha, x^4), \qquad (23\text{–}17)$$

جہاں p^4 مساوات (23-14) کا $H_4 = \frac{1}{2}m_0c^2$, کے لیے حل ہے یعنی

$$H(p_\alpha, q_\alpha, t) = e\phi + c\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + (m_0c)^2}. \qquad (23\text{–}18)$$

اگر ہم

$$L = -H + \mathbf{p}\cdot\mathbf{u},$$

$$\mathbf{p} - e\mathbf{A} = \frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m\mathbf{u}, \qquad (23\text{–}19)$$

رکھیں تو پاتے ہیں کہ:

$$L(\mathbf{u}, q_\alpha, t) = -e\phi + e(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}) - m_0c^2\sqrt{1 - u^2/c^2} \qquad (23\text{–}20)$$

معمولی سہ ابعادی لگرانجی ہے۔ دھیان رکھیے کہ یہ لگرانجی لازمی اضافیتی شرط پوری کرتا ہے کہ عمل اینٹگرل

$$\int L\,dt = -\int (u^i\phi_i + m_0c^2)\,ds, \qquad (23\text{–}21)$$

ایک اسکیلر غیر متغیر ہوگا۔ یہ آسانی سے دکھایا جا سکتا ہے کہ سہ ابعادی ہیملٹنی مساوات (23-18) اور لگرانجی مساوات (23-20) حرکت کے مساوات (23-2) پر پہنچاتے ہیں۔

اب یہ دکھانا باقی ہے کہ اگر $H = p^4$ تو H مساوات (23-10) کو مطمئن کرتا ہے۔ مساوات (23-11) کے مطابق ہم x^4 اور s کے درمیان رشتہ قائم کر سکتے ہیں یعنی "وقت" اور "موزوں وقت" کے درمیان رشتہ۔

$$\frac{dx^4}{ds} = +\frac{\partial H_4}{\partial p^4}. \qquad (23\text{–}22)$$

اس لیے عام طور پر:

$$\frac{dx_a}{dx^4} = -\frac{\partial H_4/\partial p_a}{\partial H_4/\partial p_4}, \quad \frac{dp_a}{dx^4} = +\frac{\partial H_4/\partial x_a}{\partial H_4/\partial p_4}. \qquad (23\text{-}23)$$

[نشان کی تبدیلی پر دھیان دیجیے جو مساوات (23-11) میں ہم متغیری اجزا کی موجودگی کی وجہ سے ہے] اگر ہم مساوات (23-14) کے غیر متغیر کے پورے تفرقی اخذ کو صفر کے برابر رکھ دیں تو ہم پاتے ہیں کہ

$$\frac{\partial H_4}{\partial x_a} + \frac{\partial H_4}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial x_a} = 0, \qquad (23\text{-}24)$$

$$\frac{\partial H_4}{\partial p_a} + \frac{\partial H_4}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial p_a} = 0. \qquad (23\text{-}25)$$

اس لیے مساوات (23-23) کے ساتھ،

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{\partial p_4}{\partial p_a}, \qquad (23\text{-}26)$$

$$\frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial p_4}{\partial x_a}. \qquad (23\text{-}27)$$

اس نرب $p_4(x_a, p_a)$ معمولی سہ۔ابعادی ہیملٹنی مساوات کو مطمئن کرتا ہے، اور مفروضہ مساوات (23-17) ایک اضافیتی لحاظ سے صحیح ہیملٹنی پر اور مطابقہ صحیح لگرانجی پر پہنچاتا ہے۔

23-3 مداروں کے مساوات

ابھی تک ہم نے مختلف اضافیتی لحاظ سے صحیح عبارات کی حرکت کے مساواتوں کا وقت کے لحاظ سے اینٹگرل حاصل کرنے کی غرض سے ترتیب دی ہے۔ لیکن ایسی حالتیں ہوتی ہیں جہاں ذرّے مداروں کے مساواتوں کو حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے بلا اس لحاظ کے کہ مدار کو طے کرنے کے دوران کتنا وقت صرف ہوا ہے انھیں حرکت کے مساواتوں کو وقت کے لحاظ سے اینٹگریٹ کرکے اور پھر وقت کو خارج کرکے معلوم کیا جا سکتا ہے لیکن عام طور سے فضا میں مداروں کے تفرقی مساواتیں براہ راست حاصل کرنا کم دقت طلب ہوتا ہے اسے حاصل کرنے کا سب سے آسان طریقہ "کم ترین عمل کے اصول کے ذریعہ ہے۔

یہ یاد دلا دیا جائے کہ کلاسکی میکانیات میں دو تغیری اصول عام طور سے استعمال میں آتے ہیں : (1) ہیملٹن کا اصول :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0,$$

اور (2) کم ترین عمل کا اصول

$$\delta \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

ان اصولوں کے طبیعیاتی مواد بالکل مختلف ہوتے ہیں۔ ہم نے اس سے پہلے ہیملٹن کے اصول کا استعمال کیا ہے جس میں انحراف (تغیر) فضا اور وقت میں نہ بدلنے والے دو نقطوں کے درمیان لیا جاتا ہے۔ مختلف ہوئے راستے مساواتِ حرکت اور برقراریت قوانین کے تابع نہیں ہوں گے۔ کم ترین عمل کے اصول میں سرے کے نقطے فضا میں مستقل نقطے ہوتے ہیں لیکن وقت میں نہیں، لیکن بدلا راستہ توانائی کے برقراریت قوانین کا پابند ضرور ہوتا ہے۔

مساوات (23-19) کے ساتھ کم ترین عمل کا اصول یہ دیتا ہے :

$$\delta \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = \delta \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} (m\mathbf{u} + e\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l}$$
$$= \delta \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} \left(\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + e\mathbf{A}\right) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (23\text{–}28)$$

مان لیجیے اب ہم تینوں ابعاد میں سے ایک مثلاً x, کو آزاد متغیرہ بنا دیں اور مان لیجیے کہ y', اور z' بالترتیب ڈھال dy/dx, اور dz/dx, ہیں۔ تب مساوات (23–28) یہ ہو جاتا ہے۔

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} [mu\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + e(A_x + A_y y' + A_z z')]\,dx = 0. \quad (23\text{–}29)$$

اگر رفتار u کی جسامت x کے فنکشن کی شکل میں معلوم ہو تو اس نظام کے یولری مساوات مدار کے لیے تفرقی مساواتیں دیں گے۔ چونکہ کم ترین عمل

کے اصول میں بدلے ہوئے راستے توانائی کی بقا کے قانون کے پابند ہوتے ہیں ہم u کو ذرّے کی حرکی توانائی T اور سکونی توانائی E_0 کے لحاظ سے ظاہر کر سکتے ہیں یعنی

$$\frac{mcu}{E_0} = \frac{u}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \sqrt{T^2 + 2TE_0}/E_0.$$

تب $\tau = T/E_0$ کے لحاظ سے تغیری مساوات یہ ہو جاتا ہے۔

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} \left[\sqrt{2\tau(1 + \tau/2)(1 + y'^2 + z'^2)} + \frac{ec}{E_0}(A_x + A_y y' + A_z z')\right] dx = 0 \qquad (23\text{–}30)$$

ان افکار کا خاص اطلاق برقی اور مقناطیسی لینس کی بناوٹوں میں مداروں کا حساب لگانے کے لیے ہوتا ہے۔ یہ ایک مخصوص مضمون ہے اور یہاں صرف عام دلچسپی کے حلوں پر ہی بحث کی جائے گی۔ زیادہ تفصیلی جانکاری کے لیے ناظرین الکٹرانی نوریات پر مضامین کا مطالعہ کریں جن میں سے کچھ کی فہرست اس باب کے آخر میں دی گئی ہے۔

الکٹران اور آئنی نوریات میں عام طور سے ایسے مداروں سے واسطہ رہتا ہے جو کسی محور کے قرب میں ہوں۔ پہلے ہم اسی حالت پر غور کریں گے جس میں ایسے کسی محور کے گرد قطری تشاکل ہو یعنی $\mathbf{A}$ کا واحد جز A_θ ہے جو θ سے بے تعلق ہے۔ اگر ہم سلنڈری سمتی قدروں میں z کو آزاد متغیرہ بنا دیں اور $r' = dr/dz$، $\theta' = d\theta/dz$ ہوں تو مساوات (23-30) یہ ہو جاتا ہے۔

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} \left[\sqrt{2\tau(1 + \tau/2)}(r'^2 + r^2\theta'^2 + 1)^{1/2} + \frac{ec}{E_0} A_\theta r\theta'\right] dz = 0.$$

تب $r(z)$ اور $\theta(z)$ کے لیے یولری مساوات حسب معمول طریقے سے بنائے جا سکتے ہیں $\theta(z)$ والی مساوات کا پہلا اینٹگرل فوراً حاصل کیا جا سکتا ہے اور یہاں کینانکی زاویائی تحرک کی برقراریت کے قانون پر پہنچاتا ہے جو اس شکل میں ہے:

$$\frac{r^2\theta'\sqrt{2\tau(1 + \tau/2)}}{(r'^2 + r^2\theta'^2 + 1)^{1/2}} + \frac{ec}{E_0} A_\theta r = C. \qquad (23\text{–}31)$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مساوات (23-31) مندرجہ ذیل کے مساوی ہے :

$$mr^2\dot{\theta} + eA_\theta r = C', \qquad (23\text{-}32)$$

جہاں m اضافیتی کمیت ہے اس لیے مقناطیسی میدان میں خارج ہوا ایک ذرہ میدانوں کو چھوڑتے وقت میکانکی زاویائی تحرک حاصل کر لے گا، مقناطیسی میدان سے ہو کر گذرنے والا ذرہ میکانکی زاویائی تحرک میں تبدیلی محسوس کرے گا لیکن میدان کو چھوڑنے وقت یہ اپنی شروع کی قیمت پر واپس آجائے گا۔

$r(z)$ کے لیے پوری تفرقی مساوات (23-31) کو رکھا جا سکتا ہے جس سے θ پر انحصار کو خارج کیا جا سکے۔ حاصل ہوا مساوات الجبریائی لحاظ سے پیچیدہ ہے لیکن اس کو پیرامیٹروں کی تبدیلی کے ذریعہ سادہ طرح سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ مان لیجیے کہ :

$$\xi = 2r(1 + r/2),$$

$$\eta = \frac{1}{\xi^{1/2}}\left(\frac{C}{r} - \frac{ec}{E_0} A_\theta\right),$$

$$\lambda = \xi(1 - \eta^2), \qquad (23\text{-}33)$$

جہاں C مساوات (23-31) کا مستقلہ ہے تو پوری مساوات بلا کسی تقرب کا استعمال کیے یہ ہو جاتا ہے۔

$$r'' = \frac{1 + r'^2}{2\lambda}\left[(1 + r'^2)\frac{\partial\lambda}{\partial r} - r'\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right]. \qquad (23\text{-}34)$$

یہ مساوات جتنا عموماً ضروری ہے اس سے زیادہ عام ہے۔ زیادہ تر حالتوں میں λ کی ایک سادہ شکل ہوتی ہے، مثال کے طور پر ایک خالص برق سکونی نظام اور کم رفتار کی حرکت کے لیے محض حرکی توانائی ہوتا ہے اور اس لیے λ برق سکونی مضمر ہے۔

مساوات (23-34) ایک کہیں زیادہ سادہ شکل لے لیتا ہے اگر ہم محور سے متوازی حرکت پر غور کریں یعنی وہ حرکت جس میں کرنوں کا محور سے جھکاؤ کبھی زیادہ نہیں ہوتا۔ اس حالت میں دو تقربات ممکن ہیں: ہم

کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور میدانی مساوات کے ذریعہ $\partial/\partial r$ کا رشتہ $\partial/\partial z$ سے حاصل کر سکتے ہیں خصوصاً محور کے قریب :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{r}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \qquad (23\text{-}35)$$

اور

$$A_\theta = \frac{Br}{2}, \qquad (23\text{-}36)$$

جو r^2 کے درجہ تک صحیح ہے اور ہمیں ϕ اور B کی قیمتیں صرف محور پر ہی شمار میں لینا ہے۔ ان تقربات کو استعمال کرنے پر مساوات (23-34) یہ ہو جاتا ہے۔

$$r'' + r'\frac{\tau'}{2\tau}\left(\frac{1+\tau}{1+\tau/2}\right) + \frac{r}{4}\frac{\tau''}{\tau}\left(\frac{1+\tau}{1+\tau/2}\right) + \frac{r}{8}\frac{(eB/m_0c)^2}{\tau(1+\tau/2)} - \frac{C^2}{2\tau(1+\tau/2)r^3} = 0 \qquad (23\text{-}37)$$

اگر ہم $\beta = u/c$ اور $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, رکھ دیں تو مساوات (23-37) زیادہ آسان شکل لے لیتا ہے۔

$$r'' + \frac{r'\gamma'}{\beta^2\gamma} + \frac{r\gamma''}{2\beta^2\gamma} + \frac{r}{4}\left(\frac{Be}{m_0c\beta\gamma}\right)^2 - \frac{C^2}{\beta^2\gamma^2r^3} = 0. \qquad (23\text{-}38)$$

مساوات (23-38) کا طبیعیاتی مواد واضح ہے۔ پہلی تین رقمیں ایک برقی لینس نظام سے مطابقت رکھتی ہیں جب کہ مدار صفر زاویائی تحرک کے ہیں آخری رقم اس حالت میں جب مسلم زاویائی تحرک صفر نہ ہو نظام میں ایک "مرکز گریز مضمر" کا اضافہ کر دیتی ہے یا ایک "دافع قلبیہ"
دافع
قلب کا اثر رکھتی ہے۔ چوتھی رقم ایک مقناطیسی میدان کے لینس کی طرح اظہار کرتی ہے۔ ہم ان اثرات پر الگ الگ غور کریں گے۔

23-4 اطلاق

(1) برق سکونی لینس، کرنیں "غیر مرکزی" نہیں، $B = 0 = C.$ اس حالت میں مساوات (23-28) یہ ہو جاتی ہے :

$$r'' + \frac{r'\gamma'}{\beta^2\gamma} + \frac{r\gamma''}{2\beta^2\gamma} = 0, \qquad (23\text{-}39)$$

یا

$$(\beta\gamma r')' + \frac{r\gamma''}{2\beta} = 0. \qquad (23\text{–}40)$$

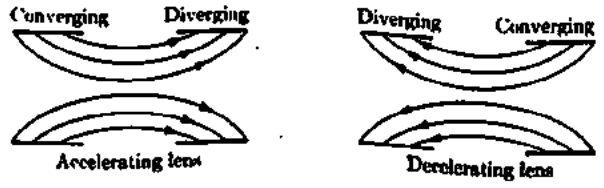
کیفی اعتبار سے ایک برق سکونی لینس کا فعل نظام میں سے گذرنے والے ایک ذرّے کی رفتار کی تبدیلی پر منحصر ہے۔ شکل 23-2 میں یہ مان لیا گیا ہے کہ ایک مثبت چارج محور کے قریب بائیں سے دائیں طرف حرکت کر رہا ہے ایک اسراع پیدا کرنے والے لینس میں ذرّہ زیادہ تیز رفتار ہوتا ہے اس لیے میدان کے پھیلنے والے حصّے میں کم وقت صرف کرتا ہے ؛ اس کے برخلاف اگر لینس منفی اسراع پیدا کرتا ہے تو ذرّہ میدان کے دوسرے حصّے میں جواب مرکوزی ہے سست ہو جاتا ہے اس لیے دونوں ہی حالتوں میں لینس مرکوزی ہے اسے مقداری لحاظ سے دیکھا جا سکتا ہے اگر ہم غیر اضافیتی تقرب میں مساوات (23–39) پر مندرجہ ذیل استحالہ لاگو کریں۔

$$R = rT^{1/4} \qquad (23\text{–}41)$$

ہم پاتے ہیں؛

$$R'' + \frac{3}{16}\left(\frac{T'}{T}\right)^2 R = 0, \qquad (23\text{–}42)$$

جو لینس کی مرکزیت وصفت کو دکھاتا ہے۔ مساوات (23–42) کا غیر مستقل مضمر والے خطّے کے اوپر انٹیگرل لینے سے ہم برق سکونی لینسوں کی فوکسی صفات کے فارمولے حاصل کر سکتے ہیں :



[شکل 23-2. مثبت اور منفی اسراع پیدا کرنے والے برق سکونی لینس دونوں ہی مرکوزی ہیں]

ذرّے کی رفتار اور اس لیے برق سکونی مضمر کا جذر (غیر اضافیتی)

نوریات میں انعطافی انڈیکس n، سے مشابہت رکھتا ہے۔ یہ فوراً سمجھ میں آسکتا ہے اگر ہم نوریات میں فرمٹ اصول :

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} n\, dl = 0,$$

اور کمترین عمل کے غیر اضافیتی اصول

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{T}\, dl = 0.$$

کی ہم شکلی پر دھیان دیں۔

یہ بھی دھیان رکھیے کہ برق سکونی لینس " دوئم درجہ" کی ترکیبیں اس معنی میں ہیں کہ فوکسی فعل کی دوسری قوت پر منحصر ہے اور اس لیے محوری سمت کی میدانی شدت کی دوسری قوت پر منحصر ہے۔ طبیعیاتی لحاظ سے یہ اس حقیقت کی وجہ سے ہے کہ لینس کا فعل میدان کے سبب سے پیدا ہوئی رفتار کی تبدیلی اور اور میدان کے قطری جز دونوں کی وجہ سے ہوتا ہے۔

آسانی کے لیے ہم نے صرف غیر اضافیتی حالت پر ہی غور کیا ہے۔ عام حالت کے لیے یہی دلیلیں لاگو ہوتی ہیں سوا اس کے کہ جب استحالہ کے ذریعہ ہم مساوات (23-42) پر پہنچتے ہیں وہ مساوات (23-41) سے کسی قدر زیادہ پیچیدہ ہے۔

2۔ مقناسکونی لینس کرنیں غیر مرکزی نہیں $C = 0$۔ اگر کوئی برق سکونی میدان موجود نہیں ہیں جو توانائی میں تبدیلیاں پیدا کریں تو مساوات (23-28) محض یہ ہو جاتا ہے۔

$$r'' + \frac{r}{4}\left(\frac{B}{B\rho}\right)^2 = 0, \qquad (23\text{-}43)$$

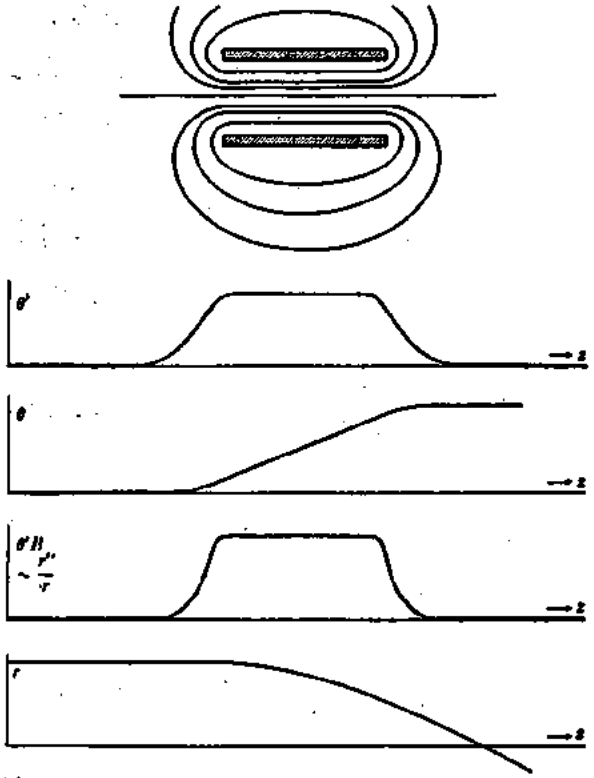
جہاں $B\rho = cm_0\beta\gamma/e$ ذرّے کی " مقناطیسی استواری " ہے یعنی مقناطیسی میدان اور رخمی کے نصف قطر کا حاصل ضرب ہے۔ اس حالت میں کسی تقرب کے استعمال کی ضرورت نہیں ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ ایک مقناطیسی لینس ایک برق سکونی لینس کی طرح ہمیشہ مرکوزی اختراع کی طرح کام کرتا ہے۔ مساوات (23-43) کا

اینٹگرل لینے سے فوکس لمبائی حاصل ہو جاتی ہے۔

اس حالت میں بھی لینس کا عمل دوسرے درجے کا ہے یعنی یہ میدان کی دوسری طاقت پر منحصر ہے۔ آیئے ہم اسے طبیعیاتی لحاظ سے سمجھنے کی کوشش کریں۔ مان لیجیے کہ ایک سولینائڈ کی شکل کا مقناطیسی لینس ہے اور ایک ذرہ صفر مستند زاویائی تحرک کے ساتھ داخل ہوتا ہے (شکل (23-3) میدان کے کنارے سے گذرتے وقت ذرہ ایک میکانکی زاویائی تحرک

$$-p_\theta = eA_\theta \simeq \frac{eBr}{2}, \qquad (23\text{-}44)$$

مساوات (23-32) کے مطابق حاصل کرے گا، یہ بات میدان کے اس حصہ میں چارج پر لگی۔ لارنز قوت کا معائنہ کرنے سے بھی کیفی طور پر ظاہر ہے۔ یہ زاویائی



[شکل مقناطیسی لینس کا اثر]

رفتار تب B کے لمبائی کی سمت کے جزسے تفاعل کرتی ہے جس سے ایک قوت نصف قطر کی سمت میں اندر کو پیدا ہوتا ہے۔ اس طرح پر B کا عمل دو بار ہوا ہے اور کل ملا کر اثر دو طاقتی ہو جاتا ہے۔ ناظرین آسانی سے خود اس کا اطمینان کر سکتے ہیں کہ کل نصف قطری قوت ہمیشہ نصف قطری ویکٹر کی الٹی سمت میں ہوتی ہے۔

3. عام حالت مساوات (23-38) اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{d}{dz}(\beta\gamma r') + r\left\{\frac{\gamma''}{2\beta} + \frac{1}{4}\left(\frac{eB}{m_0c}\right)^2\frac{1}{\beta\gamma} - \frac{C^2}{\beta\gamma r^4}\right\} = 0, \qquad (23\text{-}45)$$

یہ آخری رقم کو چھوڑ کر ایک ہارمونک اہتزاز کار کا مساوات حرکت ہے جس کی تغیر پذیر کمیت اور تغیر پذیر قوت مستقل رہتی ہیں۔ آخری رقم اس طرح کے مضمر میں ایک r^{-3} دافع قلب سے مطابقت رکھتی ہے۔ محدود مستند زاویائی تحرک کی وجہ سے ذرے کے لیے محور کو پار کرنا غیر ممکن ہو جاتا ہے۔

عام طور سے مساوات (23-45) کے حل کے لیے اعدادی یا گرافی اینٹگریشن کی ضرورت ہوتی ہے۔ دھیان رکھیے کہ یہ مان لیا گیا ہے کہ β اور γ محور کے اوپر برق سکونی مضمر کی قیمت کے ذریعہ z کے دیے ہوئے فنکشن ہیں۔ اگر اور پیرامیٹر نصف قطری ارتعاش کے دقفہ کے مقابلے آہستہ آہستہ بدلتے ہیں تو پھیلے ہوئے نظاموں کے لیے اس مساوات کا اینٹگرل " حرنا گذار مصدقہ" کے ذریعے نکالا جا سکتا ہے، اس حالت میں مساوات کی شکل یہ ہو جاتی ہے:

$$(Fr')' + Gr = 0. \qquad (23\text{-}46)$$

اگر F اور G z کے ایسے فنکشن ہیں جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔

$$F'/F \ll \sqrt{G/F}, \qquad G'/G \ll \sqrt{G/F},$$

تو مساوات (23-46) کے حل مندرجہ ذیل سے ظاہر ہوتے ہیں:

$$r = (FG)^{-1/4}\exp\left[\pm i\int^{z}(G/F)^{1/2}dz\right], \qquad (23\text{-}47)$$

اور میدان کی نوعیت کے لحاظ سے ایکسپونںٹ کو تجزیاتی یا اعدادی طریقے سے اینٹگریٹ کیا جا سکتا ہے۔

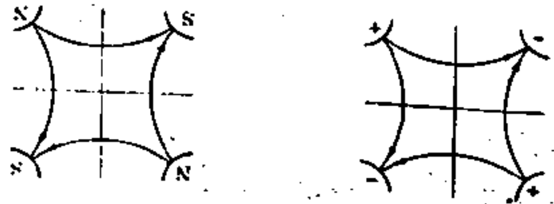
4. **اول درجے کے لینس** یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلنڈری تشاکل رکھنے والے برقی میدان سے یا مقناطیسی میدان سے اول درجہ کا لینس بنانا ممکن نہیں ہے۔ ایک برق سکونی میدان میں جو سلنڈری تشاکل رکھتا ہے E_r کی اوسط قیمت بلا چارج والے خطوں کے لیے ڈائیورجنس شرط کی وجہ سے ہمیشہ غائب ہو جائے گی۔ اسی طرح مقناطیسی میدان کے سمتیہ جز B_r کی قیمت کا اوسط کرنٹ سے خالی خطہ میں غائب ہو جائے گا کیونکہ اس حالت میں B غیر گردشی ہے۔ لہذا ایک ذرہ کو سلنڈری تشاکل کے میدان میں کوئی جھٹکا جو E یا B میں پہلے درجے کا ہو نہیں دیا جا سکتا۔ اول درجہ کے فوکسی اثرات غیر متشاکل لینسوں کے ذریعہ پیدا کیے جا سکتے ہیں۔ اس طرح کے لینس کی ایک بہترین مثال برقی یا مقناطیسی چہار قطبہ ہے جو درحقیقت ایک پورے طور سے ابہامی لینس ہے شکل 23-4 سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ اس قسم کی ترتیب اگر پتلے لینس کی طرح کام کر رہی ہو تو اس کی دو باہمی عمودی مستوا میں دو برابر لیکن مخالف فوکسی طاقتیں ہوں گی۔ اس لیے اس مصدقہ کی کہ ذرے کو دیا گیا اوسط نصف قطری تحرک (جس کا اوسط اوجی زاویوں پر لیا گیا ہے) غائب ہو جائے گا، اب بھی خلاف ورزی نہیں ہوتی۔ ایک غیر مرکوزی لینس اور برابر طاقت والے ایک مرکوزی لینس کا جوڑا جو فضا میں الگ ہیں، مرکوزی ہوتا ہے، اس لیے لینسوں کے مجموعے جو چہار قطبوں کے ایک کے بعد دوسرے جزدن پر مشتمل ہیں۔ مرکوزی ہوتے ہیں۔ الکٹران اور آین نوریات کا "مستحکم فوکسی اصول اسی پر مبنی ہے۔

5. **لارنز فریم کی تبدیلی سے حلوں میں آسانی:** اکثر ایسا لارنز فریم چن لینے سے جو طبیعیاتی دلچسپی کے فریم کے علاوہ کوئی دوسرا ہو۔ حرکت کے مساوات کے اینٹگریشن کو آسان بنایا جا سکتا ہے۔ سب سے زیادہ قابلِ توجہ وہ حالتیں ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی میدانوں کے مجموعی اثر کو

ایک خالص برقی یا ایک خالص مقناطیسی میدان کے اثر میں بدلا جا سکتا ہے ایسے تبادلوں کے امکانات کو مندرجہ ذیل دو غیر متغیر اسکیلر اور نقلی اسکیلر کے امتحان کے ذریعے معلوم کیا جا سکتا ہے:

$$E^2 - c^2B^2 = I_1, \tag{23-48}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = I_2. \tag{23-49}$$



[شکل 23-4. برقی اور مقناطیسی چہار قطبی لینس]

ہم نے باب 18 میں دیکھا ہے کہ اگر $I_1 = 0 = I_2$ تو یہ ایک ہموار لہر کی حالت ظاہر کرتی ہے جس کے سب اوصاف غیر متغیری ہیں۔ اگر $I_2 = 0$ لیکن $I_1 \neq 0$، تو یہ ممکن ہے کہ چاہے **B** کو یا چاہے **E** کو استحالہ کے ذریعہ خارج کیا جائے اگر $E < cB$ تو ایک ایسا فریم پایا جا سکتا ہے جس کے لیے **E** غائب ہو جاتا ہے۔ اگر **B** یکساں ہے تو تب مدار دائری (یا مرغولہ) ہوں گے اور اس طرح پر تجربہ گاہ کے فریم میں سائکلائڈ ہوں گے۔ اگر $cB < E$، تو ایک ایسے فریم میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس میں **B** غائب ہو جاتا ہے اور اگر **E** یکساں ہے تو مدار کیٹیری catenaries ہوں گے **E** کے اس جز کو جو **B** کے متوازی ہے ($(I_2 \neq 0)$) استحالہ کے ذریعہ ختم نہیں کیا جا سکتا لیکن اگر **E**، **B** کے متوازی ہے تو اس مستوا میں جس کا تعین میدانوں اور ابتدائی رفتار سے ہوتا ہے، حرکت کا انحصار صرف **E** پر ہوتا ہے اور اس کا اینٹگرل پہلے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اس مستوا کے عمودی سمت میں حرکت کا حل تب نکل آئے گا۔

23-5 مقناطیسی گردشہ والے ایک ذرہ کی برق مقناطیسی میدان میں حرکت

باب 7 میں ہم نے مقناطیسی میدان میں ایک ذرہ کی جس کا زاویائی تحرک

s اور جائرو مقناطیسی نسبت

$$\Gamma = ge/2m_0 \qquad (23\text{-}50)$$

ہے۔ غیر اضافیتی جھوم حرکت اخذ کی تھی۔ حاصل ہوئی حرکت کا تعین مساوات (7-68) اور (7-69) سے ہوتا ہے۔ آئیے اب ہم چارج e سکونی کمیت m_0، اور کسی من چاہے g جز والے ایک ذرّے کے لیے اس حرکت کے اضافیتی تعمیم کا جائزہ لیں۔

تین ابعاد میں مقناطیسی گردشہ m اور زاویائی تحرک s محوری ویکٹر ہیں۔ کسی کلاسکی شے کے لیے s اور m کے متوازی ہونے کے لیے کوئی بنیادی درجہ نہیں ہے۔ لیکن چونکہ اس تھیوری کا اطلاق عام طور سے بنیادی ذرّوں کے لیے ہوتا ہے اس لیے ہم اپنی بحث اس حالت کے لیے محدود رکھیں گے جس میں کسی ذرّے کے لیے صرف ایک ترجیحی محور استعمال کیا جا سکتا ہے، یہ خاصہ ایک کوانٹم میکانکی نتیجہ ہے اور ہم یہاں اس کا استعمال صرف بطور ایک روک لگانے والے مفروضہ کے کر رہے ہیں۔ اس لیے ہم مان لیتے ہیں کہ اس قریم میں جس میں شے سکونی ہے۔

$$m_0 = \Gamma s_0 = (ge/2m_0)s \qquad (23\text{-}51)$$

اور یہ پابندی نہیں ہے کہ m_0 اور s_0 آپس میں اپنے اجزا کے درمیان ایک عام خطی رشتہ کے ذریعہ منسلک ہوں۔

اگر ہم یہ اجازت دیتے ہیں کہ ذرّے میں برقی گردشہ اور مقناطیسی گردشہ دونوں ہوں (دیکھیے باب 18) تو پھر یہ ممکن نہیں ہوگا کہ مقناطیسی گردشہ m کو ایک چہار-جزی مقدار کا 1, 2, 3 جز سمجھا جا سکے؛ ایک ہم متغیری بیان ایک دوسرے رتبے والے ضد متشاکل میٹرکس:

$$m^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -m_z/c & m_y/c & p_x \\ m_z/c & 0 & -m_x/c & p_y \\ -m_y/c & m_x/c & 0 & p_z \\ -p_x & -p_y & -p_z & 0 \end{pmatrix}, \qquad (23\text{-}52)$$

پر مشتمل ہوگا جس میں ذرّہ کے مقناطیسی اور برقی گردشے شامل ہیں اور زاویائی
تحرک کے لیے اسی طرح کی ضد متشاکل میٹرکس s^{ij} ہوگی ۔ اس لیے ہم ایک
ہم متغیری رشتہ کی شکل میں یہ لکھ سکتے ہیں ۔

$$m^{ij} = \Gamma s^{ij}. \qquad (23\text{-}53)$$

مقناؤ تقطیب کثافت M^{ij} [دیکھیے مساوات (18-62)] ایک ٹینسر کی طرح
تبادل پذیر ہوتا ہے ۔ اس لیے اگر m^{ij} کو ایک ٹینسر ہونا ہے تو ہم M^{ij}
کی تعریف یوں کریں گے کہ m^{ij} کے ذرّے کے موزوں حجم (یعنی سکونی فریم میں
حجم) سے ضرب کا نتیجہ ہے m^{ij} کے اجزا کی کسی دیے ہوئے فریم میں تفسیر کرتے وقت
یہ بات دھیان میں رکھنا ہوگی کہ کس متناہی موزوں سے ۔ ابعادی حجم v^0 کی بناوٹ
کے زاویائی تحرک ٹینسر s^{ij} کی تعریف یہاں اس طرح کی جاتی ہے ۔

$$s^{ij} = \int_{v^0} (p^i x^j - p^j x^i)\, dv^0 \qquad (23\text{-}54)$$

$$= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \int_v (p^i x^j - p^j x^i)\, dv. \qquad (23\text{-}55)$$

جہاں p^i حسب معمول چہار ۔ سہ تحرک ہے اور u رفتار ہے ۔ دھیان رہے
کہ m^{ij} اور s^{ij} دونوں کی تعریف بطور ٹینسر کی گئی ہے لیکن اینٹگرل
$\int_0 M^{ij}\, dv$ اور وہ اینٹگرل جو مساوات (23-55) کے داہنے طرف آتا
ہے ٹینسر نہیں ہیں ۔

آئیے اب ہم آسانی کے لیے مان لیں کہ $p^0 = 0$, یعنی ذرّہ کا اپنے سکونی
فریم میں کوئی برقی گردشہ نہیں ہے ۔ ابھی تک کیے گئے تجربات درستی کی
جس حد تک پہنچے ہیں اس کے مطابق یہ مفروضہ سبھی بنیادی ذرّوں کے لیے
جائز ہے ۔ اگر چاہیں تو بعد کو یہ شرط سبھی برقی اور مقناطیسی مقداروں کی
کارکردگی کو آپس میں بدل کر [یعنی m کی جگہ p رکھ کر اور برقی مقناطیسی
میدانی رقم F^{ij} کی جگہ اس کے ہمزاد G^{ij} کو رکھ کر جس کی مساوات (17-37)
کے ذریعے تعریف کی گئی ہے] اور تب حاصل ہوئے حرکت کی مساواتوں کا

انطباق کرکے ہٹائی جا سکتی ہے۔ چونکہ حرکت کے مساوات خطی ہیں اس لیے یہ عمل جائز ہے۔
ہم ایسے متغیر مساوات کے متلاشی ہیں جس کا وصف یہ ہے کہ وہ ایک موزوں فریم میں $(u = 0)$ مساوات (7-68) میں بدل جائے یعنی ایک ایسے فریم میں جس میں

$$ds^0/dt = \Gamma(s^0 \times B^0), \qquad (23\text{–}56)$$

اور جس میں

$$(s^{ij})^0 = \begin{pmatrix} 0 & -s_z & s_y & 0 \\ s_z & 0 & -s_x & 0 \\ -s_y & s_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (23\text{–}57)$$

یہ مفروضہ کہ ٹینسروں m^{ij} اور s^{ij} کے وقتی اجزا ایک موزوں فریم میں غائب ہو جاتے ہیں ہمیں اجازت دیتا ہے کہ ہم حرکت کے مساواتوں کی پیچیدگیوں کو دوسرے رتبہ کے ٹینسروں s^{ij} اور m^{ij} کی جگہ نقلی چہار ویکٹروں s^i اور m^i کو رکھ کر کم کر لیں اس طرح پر کہ ایک موزوں فریم میں

$$s^{i0} = (s^0, 0), \qquad (23\text{–}58)$$

$$m^{i0} = (m^0, 0). \qquad (23\text{–}59)$$

اس لیے ایک عام فریم میں ہم لکھ سکتے ہیں:

$$s^i = (s, \beta \cdot s), \qquad (23\text{–}60)$$

$$m^i = (m, \beta \cdot m), \qquad (23\text{–}61)$$

جہاں تعریف کے مطابق ویکٹر s کے اجزا $(\gamma s_x^0, s_y^0, s_z^0)$ اور ویکٹر m کے اجزا $(\gamma m_x^0, m_y^0, m_z^0)$. ہیں۔ دھیان رکھیے کہ چونکہ سکونی فریم میں:

$$u^i s_i = 0 \qquad (23\text{–}62)$$

اس لیے یہ سب فریموں میں صفر ہے۔ اپنے چارج کی وجہ سے ذرّہ کا مساواتِ حرکت ایک یکساں برقی مقناطیسی میدان F^{ij} میں حسب معمول یہ ہے:

$$m_0 c^2 (du^i/ds) = eF^{ij} u_j \qquad (23\text{–}63)$$

اگر میدان غیر یکساں ہے تو ایسی رقمیں داخل کرنی ہوں گی جو مقناطیسی یا برقی گردشوں کو میدانی گریڈینٹوں کے ساتھ جوڑتی ہوں۔ مکمل مساوات حرکت میں جس میں مقناطیسی میدان میں مقناطیسی گردشہ پر لگنے والی قوت بھی شامل ہے ایک زائد رقم سہ۔ابعادی قوت

$$(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}. \qquad (23\text{-}64)$$

کی ہوگی۔ چونکہ $|\mathbf{m}|$ کی مقدار (cea)، کے درجہ کی ہے جہاں a ایک لمبائی ہے جس کی جسامت کا درجہ بنا ورٹ کے سائز کا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک فاصلہ a کے اوپر میدانوں کی تبدیلی قابل لحاظ نہ ہو تو یہ بہ رقم ناقابل لحاظ ہوگی۔ اگر میدان اتنی تیزی سے بدلتے ہیں تو کلاسکی طریقے لاگو نہیں ہوتے۔ ایک ہم متغیری اظہار جس کا امکانی جز ایک سکونی فریم میں مساوات (23-56) بن جاتا ہے یہ ہے:

$$\frac{ds^i}{ds} = \frac{\Gamma}{c}F^{ij}s_j = \frac{ge}{2m_0c^2}F^{ij}s_j, \qquad (23\text{-}65)$$

جو شکل میں مساوات (23-63) کے مشابہ ہے۔ لیکن مساوات (23-65) مساوات (23-56) کا پورا ہم متغیری تعمیم نہیں ہو سکتی؛ یہ غیر متغیر عبارت (23-62) کے تفرقی اخذ پر غور کرنے سے دکھایا جا سکتا ہے:

$$s_i(du^i/ds) + u^i(ds_i/ds) = 0, \qquad (23\text{-}66)$$

اور اس لیے مساوات (23-63) سے

$$u^i(ds_i/ds) = -(e/m_0c^2)F^{ij}u_js_i = +(e/m_0c^2)F^{ij}u_is_j. \qquad (23\text{-}67)$$

لیکن مساوات (23-65) کے مطابق

$$u^i(ds_i/ds) = (ge/2m_0c^2)F^{kl}u_ks_l, \qquad (23\text{-}68)$$

جو مساوات (23-67) سے اس حالت میں اتفاق کرتا ہے جب

$$g = 2. \qquad (23\text{-}69)$$

اس لیے (23-65) کا سادہ مساوات جس میں مقناطیسی گردشہ کی برقی مقناطیسی میدان کے ساتھ تفاعل کی شکل وہی ہے جو ایک چہار۔کرنٹ کی ہوتی ہے۔

صرف اس حالت میں مکمل ہوگی جب $g = 2$ ہو۔ ایک خالص مقناطیسی میدان میں جس مساواتِ حرکت کا u تابع ہوگا بالکل وہی ہے جس کا s تابع ہے اگر $g = 2$ ہو، اس لیے u اور s کے درمیان کا زاویہ مقناطیسی میدان میں ذرّے کی کسی بھی حرکت کے لیے مستقل رہے گا۔ بے شک یہ اس حالت میں صحیح نہیں رہ جائے گا جب ایک برقی میدان بھی موجود ہو، چونکہ خود s^i کے چوتھے جز یعنی $s^4 = \beta \cdot s$, میں رفتار شامل ہے۔ (ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ایک $\frac{1}{2}$ چکر والے ذرّہ کے لیے جو ڈراک کے مساوات کا پابند ہے $g = 2$ ہوتا ہے)

اگر $g \neq 2$, تو مساوات (23-56) اب بھی سکونی فریم میں جائز ہے لیکن مساوات (23-65) میں کوئی تکمیلی رقم جوڑنی ہوگی جس سے کہ مساوات (23-62) اور (23-63) کے نتائج ہم آہنگ ہوسکیں۔ اس غرض سے کہ مساوات (23-68) کو عام طور سے جائز مساوات (23-67), کی مطابقت میں لایا جاسکے ہمیں مساوات (23-65) کو اس طرح پر ترمیم کرنا ہوگا کہ مساوات (23-68) یہ ہو جائے۔

$$
\begin{aligned}
u^i(ds_i/ds) &= (e/m_0c^2)F^{kl}u_k s_l \\
&= (ge/2m_0c^2)F^{kl}u_k s_l - (g-2)(e/2m_0c^2)F^{kl}u_k s_l, \qquad (23\text{-}70)
\end{aligned}
$$

لیکن ایک سکونی فریم میں مساوات (23-56) کے مکانی اجزا میں کوئی ترمیم نہ ہو۔ اس مساوات (23-65) کو اس طرح بدل دینا چاہیے کہ اس کی شکل مندرجہ ذیل ہو جائے:

$$(ds^i/ds) = (e/2m_0c^2)[gF^{ij}s_j - (g-2)(F^{kl}u_k s_l)u^i]. \qquad (23\text{-}71)$$

اس مساوات کا ایک دلچسپ نتیجہ یہ ہے کہ یہ ایک صفر مقناطیسی گردشہ والے ذرّے کے لیے $g = 0$ کی پیشین گوئی کرتا ہے؛ اس حالت کے لیے:

$$\frac{ds^i}{ds} = \frac{e}{m_0c^2}(F^{kj}s_j u_k)u^i = -\left(\frac{du^j}{ds}s_j\right)u^i. \qquad (23\text{-}72)$$

مساوات (23-72) ایک ذرّہ کی، جو (کسی دیے ہوئے فریم میں) ایک واضح محور رکھتا ہو اور جس کا اسراع اس کی رفتار کے متوازی نہ ہو، وہ حالت ظاہر کرتا ہے، جسے " تھامسن جھوم " کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ یہ مظہر ایک خالص حرکاتی اثر

ہے اور اسے اسراع کے کسی مخصوص سبب کے حوالے کے بغیر سیدھے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ یہ دیکھنے کے لیے آئیے ہم تین طرح کے حوالی فریموں پر غور کریں۔

(1). ایک فریم Σ^0 جس میں ایک پر ایک شے اس طرح ساکن ہے کہ اس شے میں ایک ویکٹر s_0 کی مستقل سمت x_0 محور کے متوازی ہے۔

(2) ایک فریم Σ' جس میں Σ^0 پر ایک انتہائی چھوٹی رفتار کی تبدیلی عائد کی جاتی ہے جو x_0 کی سمت میں نہیں ہے۔

(3) ایک فریم Σ (تجربہ گاہ فریم) جس میں Σ' (اور Σ^0) x شاخ کی سمت میں رفتار u سے حرکت کرتے ہیں اور جس میں Σ^0 میں Σ' کی انتہائی چھوٹی تبدیلی کا مشاہدہ du ہے۔

یکے بعد دیگرے لارنٹز استحالہ کے ذریعہ یہ دکھایا جا سکتا ہے[1] کہ s_0 محور اور s محور کے درمیان زاویہ Σ میں یہ ہے:

$$d\theta = -\frac{(\gamma - 1)}{u^2}(du \times u), \qquad (23\text{–}73)$$

جہاں گردش کی قدر اور اس کے محور کو محوری ویکٹر $d\theta$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس لیے اگر ذرّہ کا اسراع du/dt ہے تو تجربہ گاہ فریم میں اسپن (spin) کی سمت اس شرح سے گھومتی معلوم ہوگی۔

$$\Omega_T = -\left(\frac{\gamma - 1}{u^2}\right)\left(\frac{du}{dt} \times u\right). \qquad (23\text{–}74)$$

مساوات (23–72) مساوات (23–74)؛ کے مساوی ہے؛ ہم اس مساوات کو u^2/c^2 میں دوسرے درجہ تک کی رقموں کے لیے ہی دکھائیں گے۔ مساوات (23–74) تب یہ ہو جاتا ہے۔

$$\Omega_T = -\frac{1}{2c^2}\frac{du}{dt} \times u. \qquad (23\text{–}75)$$

---

[1] مثال کے لیے دیکھیے: C. Moller, *The Theory of Relativity*, Oxford, Clarendon Press, 1952, pp. 53 ff.

(23-72) کے مکانی اجزا یہ ہیں :

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \left(\frac{du^j}{dt}\, s_j\right)\gamma\boldsymbol{\beta} = \left[\mathbf{s}\cdot\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\beta})\frac{d\gamma}{dt}\right]\gamma\boldsymbol{\beta}$$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\mathbf{s}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\mathbf{u}. \qquad (23\text{–}76)$$

ٹینسر علامت میں

$$\frac{ds_\alpha}{dt} = \frac{\gamma^2}{c^2}\, s_\beta \left(u_\alpha \frac{du_\beta}{dt}\right) = \frac{\gamma^2}{2c^2}\, s_\beta \left[\left(u_\alpha \frac{du_\beta}{dt} - u_\beta \frac{du_\alpha}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(u_\alpha u_\beta)\right] \qquad (23\text{–}77)$$

جہاں بریکٹوں کے اندر کی رقم ds_α/dt سے s_β میں استحالہ میٹرکس کے غیر متشاکل اور متشاکل حصوں کو الگ الگ دیتا ہے۔ داہنے طرف کی پہلی رقم ایک خالص گھماؤ ہے جو تھامس جھوم سے مطابقت رکھتی ہے؛ اسی رقم کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے :

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{\gamma^2}{2c^2}\left[\mathbf{s}\times\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{u}\right)\right] = \boldsymbol{\Omega}_T\times\mathbf{s}, \qquad (23\text{–}78)$$

جو (23-75) سے اتفاق کرتی ہے۔ یہ اظہار ویکٹر $\mathbf{s}$ کی نہ کہ $\mathbf{s}_0$ کی گھماؤ کی شرح دیتا ہے؛ ان کے درمیان فرق β میں زیادہ اونچے درجے کا ہے۔[1]

اب ہم مساوات (23-71) کا طبیعیاتی معنی کا تجزیہ تفصیل سے کرتے ہیں۔ جیسا پہلے بتایا جا چکا ہے s^i کے لیے مساوات حرکت بالکل وہی ہے جو اگر $g = 2$ تو u^i کے لیے مساوات حرکت (23-63) ہے۔ اس لیے یہ مفید ہوگا کہ ایک ایسا مساوات حرکت لکھا جائے جو s^i حرکت کو u^i حرکت

---

[1] تھامس جھوم کو ایک انتہائی چھوٹے لارنز تبادل کو دوبارہ عمل میں لا کر اخذ کیا کیا گیا ہے دیکھیے W. H. Furry, *Am. J. Phys.* 23, 517 (1955).
یہ طریقہ L. Michel; کا نکالا ہوا ہے۔ دیکھیے
V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Letters* 2, 435 (1959)

کی اضافت سے بیان کرے۔ ایسا کرنے کے لیے ہم اکائی آرتھوگونی چہار ویکٹروں ${}_a e^i$ کے ایک "چوکڑہ" "$_4$" کو داخل کرتے ہیں۔ جو ہر لمحے پر ذرے کے سکونی فریم کے ساتھ ہم حرکتی رہتے ہیں اور مدار کی اضافیت سے e^i کی تشریح مستقل بنی رہتی ہے۔ علامت کے پہلے زیریں نوشت چاروں ویکٹروں کی ترتیب ظاہر کرتی ہے اور اس کا مخصوص تبادلی صفات سے کوئی تعلق نہیں ہے اس لیے ہم:

$$e^i = {}_a\xi\, {}_a e^i, \qquad (23\text{–}79)$$

رکھتے ہیں جہاں ${}_a e^i$ مساوات (23-63) کے پابند ہیں لیکن ${}_a e^i$ کا تشرق ایسا چننا ہوگا کہ دیے ہوئے مسئلہ کے لیے موزوں ہو۔ اس لیے ${}_a\xi$ کی وقت کے ساتھ تبدیلی اضافیتی حرکت کو بیان کرتی ہے۔ آیئے ہم (23-79) کو مساوات (23-71) میں رکھیں؛ d/ds. کو ظاہر کرنے میں سادگی کے لیے علامت کے اوپر ایک نقطہ کا استعمال کیا گیا ہے۔ ہم پاتے ہیں:

$${}_a\dot{\xi}\, {}_a e^i + {}_a\xi\, {}_a\dot{e}^i = \frac{e}{2m_0c^2}\{gF^{ij}\, {}_b e_j\, {}_b\xi - (g-2)[F^{kl}u_k\, {}_b e_l\, {}_b\xi]u^i\} \qquad (23\text{–}80)$$

کلیہ کو بغیر کھوئے ہوئے ہم ${}_a e^i$ شاخوں کی تشریق اس طرح پر کر سکتے ہیں کہ ${}_4 e^i = u^i$, کیونکہ u^i مساوات (23-63). کو مطمئن کرتا ہے۔ مساوات حرکت (23-63). کا استعمال کرکے ہم مساوات (23-80) کو اس طرح سادہ بنا سکتے ہیں:

$${}_a\dot{\xi}\, {}_a e^i = \frac{e}{2m_0c^2}(g-2)\{F^{ij}\, {}_b e_j\, {}_b\xi - F^{kl}u_k\, {}_b e_l\, {}_b\xi u^i\}. \qquad (23\text{–}81)$$

اگر ہم (23-81) کے دونوں طرف کو ${}_a e_i$ سے ضرب کریں جب کہ $a = 1, 2, 3$ لیکن 4. نہیں ہے تو داہنے طرف کی دوسری رقم غائب ہو جائے گی کیونکہ $u^i = {}_4 e^i$ اور اس لیے ${}_4 e^i\, {}_a e_i = 0$. لہٰذا:

$${}_a\dot{\xi} = \frac{e}{2m_0c^2}(g-2)\, {}_b\xi\{F^{ij}\, {}_b e_j\, {}_a e_i\}. \qquad (23\text{–}82)$$

ξ_0 کے لیے حرکت کا عام مساوات ہے۔

آیئے ہم ذرّوں کے سکونی فریم Σ^0 میں جہاں $u^i = (0, 1)$ مساوات (23-81) اور (23-82) کی تفسیر کریں۔ اگر ایک وکیٹر ξ کے اجزا e_0 کو بہ لحاظ لیا جائے تو مساوات (23-81) کے مکانی اجزا یہ ہو جاتے ہیں۔

$$\dot{\xi} = \frac{e}{2m_0c^2}(g - 2)(\mathbf{B}^0 \times \xi)$$

$$= \Omega \times \xi, \tag{23-83}$$

جہاں

$$\Omega = (e/2m_0c^2)(g - 2)\mathbf{B}^0. \tag{23-84}$$

تجربہ گاہ کے میدانوں کے لحاظ سے ظاہر کرنے پر سکونی فریم میں میدان مساوات (18-41) اور (18-43)، کے مطابق یہ ہیں:

$$B_{\parallel}^0 = B_{\parallel},$$

$$\mathbf{B}_{\perp}^0 = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\beta \times \mathbf{E}}{c}\right); \tag{23-85}$$

$$\mathbf{B}^0 = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})}{u^2} + \gamma\mathbf{B}_{\perp} - \gamma(\beta \times \mathbf{E})$$

$$= \gamma\left[\mathbf{B} - \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})\mathbf{u}}{c^2} - \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{E})}{c^2}\right]. \tag{23-86}$$

مساوات (23-86) مساوات (23-83)، کے ساتھ مل کر سکونی فریم میں تجربہ گاہ کے میدانوں E اور B. کے لحاظ سے جھوم کی شرح ظاہر کرتا ہے۔ تجربہ گاہ کے وقت t، کا، لیکن ذرّے کے سکونی فریم میں تشرق ξ کا استعمال کرنے سے یہ ملتا ہے:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{e(g - 2)}{2m_0c^2}\left[\mathbf{B} - \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})\mathbf{u}}{c^2} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2}\right] \times \xi. \tag{23-87}$$

نتیجہ کہ ایک ہم۔ متحرک سکونی فریم میں ξ کے سمتی قدروں کے لحاظ سے ظاہر کرنے سے ہم تجربہ گاہ میں s کی سمت کے معنی کے مسئلہ سے بچ جاتے ہیں

جو تھامس جھوم کی وجہ سے پیچیدہ ہے جیسا کہ پہلے بحث کی جا چکی ہے۔ پہلے بنیادی ویکٹروں e کا ایسا سیٹ چن کر جو مساوات حرکت (23-63) کے تابع ہو، تجربہ گاہ میں اسپن حرکت کا انٹگریشن حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مجوّزہ حوالے

H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics.* لگرانجی اور ہملٹنی ذرہ میکانیات پر بہت سے اچھے تصانیف ہیں لیکن ناظرین اس جدید تصنیف کو بے حد مفید پائیں گے۔

H. C. CORBEN AND P. M. STEHLE, *Classical Mechanics.* کلاسکی میکانیات پر ایک اور جدید تصنیف۔ اس کتاب میں اضافیتی میکانکی بہت ہی کم ہے۔ لیکن ویکٹروں اور ٹینسروں کے ہم متغیر اور مخالف متغیر اجزا کے درمیان فرق برابر رکھا گیا ہے جس کی وجہ سے تشکیل کو اضافیتی تھیوری میں فوراً لاگو کیا جا سکتا ہے۔

L. LANDAU AND E. LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields.* باب 3 میدانوں میں چار رخوں پر مبنی ہے اور اس میں اس مواد کا جو یہاں ہم نے پیش کیا ہے زیادہ حصہ شامل ہے۔

O. KLEMPERER, *Electron Optics,* 2nd edition. پہلی تصنیف کی ضخیم شکل ہے جس میں اصولوں اور اطلاقوں کے علاوہ ایک عمدہ فہرست بھی ہے۔

V. K. ZWORYKIN, G. A. MORTON, F. G. RAMBERG, J. HILLIER, AND A. W. VANCE, *Electron Optics and the Electron Microscope.* 1945. تک کی عام دلچسپی کی کافی مکمل تصنیف۔

الکٹرانی خوردبینی پر دو فہرست کتب 1950, میں شائع ہوئی تھیں ایک کے مؤلف V. E. Coslett, تھے اور دوسری کے Claire Marton وغیرہ۔

مشق

1۔ تصدیق کیجیے کہ لگرانجی

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-u^2/c^2} - e\phi + e\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}$$

صحیح مساواتِ حرکت دیتا ہے۔

2. ۔ دکھایئے کہ x محور کی سمت میں ایک یکساں برق سکونی میدان E میں ایک چارج e، اور سکونی کمیت m_0، والے ذرّہ کا مدار یہ ہے:

$$x = \frac{U_0}{eE}\cosh\frac{eEy}{p_0c},$$

جہاں $U_0=\sqrt{(m_0c^2)^2 + c^2p_0^2}$ اور y سمت میں ابتدائی تحرک p_0 ہے۔ $y = 0$ پر x سمت میں تحرک کو صفر کے برابر لے لیا گیا ہے۔

3. ۔ چارج والے ذرّوں کے لیے ایک اسراعی ستون ہے جیسا کہ برق سکونی جنریٹروں میں لگایا جاتا ہے۔ نتیجے کے طور پر ذرّے کی تفرقی توانائی مندرجہ ذیل سے ملتی ہے:

$$e\phi = k\left(z + \frac{g\alpha}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{g}\right),$$

$$eE = e\phi' = k\left(1 + \alpha\cos\frac{2\pi z}{g}\right),$$

جہاں z محوری فاصلہ ہے اور k اوسط اسراعی میدان ہے۔ چونکہ

$$1 + (\alpha^2/2) = \overline{E^2}/\bar{E}^2,$$

α محوری میدان کی تبدیلی کی ناپ ہے۔ مان لیجیے کہ ان تبدیلیوں کی لہر لمبائی g، ہر لینس کی جس کی سوراخ نمائی g ہے فوکس دوری کے مقابلے میں چھوٹی ہے۔ اس لیے ϕ'' کو اس کے مربع کے اوسط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے اور اس رقم کو جو ϕ میں اتار چڑھاؤ ظاہر کرتی ہے، نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ α کی وہ کم سے کم قیمت کیا ہے جس کے لیے مدار اہتزازی ہوں گے؟

4. ۔ ایک برق سکونی "طاقت ور فوکسی" لینس ایک مخلوط مضمر $W(z) = W(x + iy)$: کی مطابقت کا میدان پیدا ہوتا ہے۔

$$W = \frac{E_0z^2}{2a},$$

جہاں E_0 نصف قطر a پر برقی میدان ہے ایسے میدان کو کس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے؟ اگر لینس کی لمبائی L ہو تو x اور y مستوا میں فوکس دوری کا شمار کیجیے۔ لینس کو پتلا مت مانیے

5۔ دو ہم محوری چالک دائری چارج کیے ہوئے سلنڈر ایک ہی نصف قطر کے ہیں جن کے مضمر ترتیب سے $+V_0/2$ اور $-V_0/2$ ہیں۔ مان لیجیے کہ سلنڈروں کے بیچ کی دوری ان کے نصف قطر کے مقابلے میں کم ہے۔ سلنڈروں سے محدود خط کا مضمر دریافت کیجیے۔

6۔ پہلے والے مسئلہ میں مان لیجیے کہ $V_0 = A \cos \omega t$، جہاں $\omega \ll c/a$، جس کی وجہ سے سکونی حل جائز ہے۔ مان لیجیے کہ ایک ذرہ جس کا چارج e ہے میدان کو ایک ایسے راستے سے پار کرتا ہے جو محور کے متوازی اور اس سے فاصلہ پر ہے۔ توانائی میں کتنا اضافہ ہوگا؟

7۔ مان لیجیے کہ ایک ذرہ جس کی توانائی $U_0 \gg eV_0$ ہے مسئلہ 5. کی ترتیب میں سے ہو کر گزر رہا ہے۔ فوکس دوری کیا ہے؟

8۔ مساوات (23-47) کو مساوات (23-46) کے حل کے طور پر ثابت کیجیے۔

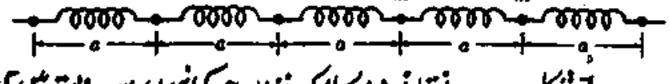
باب 24

میکسویل مساوات کی ہیملٹنی تشکیل

باب 23 میں ہم نے ایک خارجی میدان میں ایک نقطہ ذرّہ کے لیے حرکت کے ہم متغیری مساوات ہیملٹنی اور لگرانجی تشکیلوں کا استعمال کر کے حاصل کیں۔ آیئے اب ہم میدان کی حرکت مساواتوں کی یعنی میکسویل مساواتوں کی تشکیل لگرانجی اور ہیملٹنی فنکشنوں کے لحاظ سے کریں۔ اس طرح سے ہم کلاسکی برقی حرکیات کے متعلق کسی نئی طبیعیاتی جانکاری پر نہیں پہنچتے ہیں۔ لیکن میدان کی کینانکی تشکیل کے ذریعے کوانٹم برقی حرکیات میں بدل حاصل کیا جا سکتا ہے اس کے علاوہ یہ طریقے مختلف اقسام کے میدانوں کی جو برق مقناطیسی نہیں ہیں تفتیش کو آسان بنا دیتے ہیں ۔۔۔ ہیملٹنی تشکیل کو ایک میدان پر لاگو کرنے میں ہمارے سامنے ایک نئی بات آتی ہے جو یہ ہے کہ میکانکی معنی میں آزادی کے درجوں کی تعداد لامتناہی ہے اس لیے ہم شروع میں ایک N درجۂ آزادی والے نظام کو ایسے نظام میں بدل کی تفتیش کریں گے جس میں N لامتناہی ہو جاتا ہے۔

24-1 ایک۔ ابعادی مسلسل نظام میں عبور

ہم برابر کمیت m, والے N نقطہ ذرّوں کے ایک سٹ پر غور کریں گے جو برابر لمبائی a اور قوتِ مستقلہ .k والی کمانیوں کے ذریعے وابستہ ہیں۔ (دیکھیے شکل (24-1.) ۔



[شکل .24-1 نقطہ ذرّوں کا ایک نظام جو کمانیوں سے وابستہ ہیں] -

مان لیجیے کہ i ویں کمیت کا تعادلی مقام سے نقل η_i ہے۔ اس مسئلے کا حل اس پر مبنی ہے کہ ہم ایک ایسا موزوں لگرانجی L دریافت کر سکیں کہ مساوات

$$\delta \int L(\eta_i, \dot{\eta}_i, t)\, dt = 0 \tag{24-1}$$

صحیح مساوات حرکت ظاہر کرے۔ کلاسکی میکانیات میں ہم جانتے ہیں کہ $L = T - V$ جہاں T اور V بالترتیب حرکی اور مضمر توانائیاں ہیں۔ سر دست مسئلہ کی جیامٹری کے مطابق (سروں کی شراکت کو چھوڑ کر):

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} [m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2]. \tag{24-2}$$

مساوات (24-2) کو مندرجہ ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$L = \sum_{i=1}^{N} a\mathfrak{L}_i, \tag{24-3}$$

جہاں

$$\mathfrak{L}_i = \frac{1}{2}\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right] \tag{24-4}$$

ایک مقدار جسے ہم "خطی لگرانجی کثافت" کہہ سکتے ہیں۔ مساوات (24-1) مساوات (24-2) کے لگرانجی کے ساتھ مل کر جفتہ اہتزاز کاروں کے ایک سیٹ کا عام مساوات حرکت دیتا ہے، مساوات (24-2) کو آرتھوگونل کرنے پر نارمل طرزوں کا سیٹ مل جاتا ہے۔

یہاں ہماری خاص دلچسپی اس بات میں ہے کہ آزادی کے درجوں کی تعداد کو لا متناہی کی طرف مائل ہونے دیا جائے۔ ایسا ہم اس طرح کریں گے کہ

$$\begin{aligned} a &\to dx, \\ m/a &\to \mu, \\ ka &\to Y, \\ \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} &\to \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned} \tag{24-5}$$

جہاں μ خطی کمیتی کثافت ہے اور Y ینگ ماڈولس ہے۔ اس عبور کے ذریعہ ہم نے مجرد مدد (discrete index) i کی جگہ مسلسل متغیرہ x رکھ دیا ہے۔ لگرانجی تب یہ ہو جاتا ہے:

$$L = \frac{1}{2}\int\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]dx = \int \mathfrak{L}\, dx, \tag{24-6}$$

اور ساتھ میں

$$\mathfrak{L}\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, t\right) = \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{24-7}$$

اس طرح پر لگرانجی کثافت کا "میدانی سمتی قدر" η مکانی تفرقی اخذ پر صریحی انحصار ہو جاتا ہے۔ ہم اُس حالت پر غور نہیں کریں گے جس میں $\mathfrak{L}$ کا صریحی انحصار t پر ہے۔

اب ہم مساوات (24-1)، کے تغیری اصول کی مطابقت کا یولری مساوات اخذ کریں گے جو یہ ہو گیا ہے:

$$\delta\int L\, dt = \delta\iint \mathfrak{L}\, dx\, dt = 0. \tag{24-8}$$

مساوات (24-8) میں مساوات (24-7) کو رکھ کر حسب معمول ٹکڑوں میں اینٹگرل نکالنے پر ہم پاتے ہیں (صریحی وقتی انحصار کو نظر انداز کر کے)

$$\begin{aligned}\delta\int L\, dt &= \iint \left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right\} dx\, dt \\ &= \iint \left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right]\right\}\delta\eta\, dx\, dt = 0. \end{aligned} \tag{24-9}$$

اینٹگریٹ کیا ہوا حصہ اس شرط کی وجہ سے غائب کر دیا گیا ہے کہ t کے اوپر اینٹگریشن کے سرے کے نقطوں پر $\delta\eta = 0$ چونکہ $\delta\eta$ کا کوئی من مانا فنکشن ہے اس لیے ہم یہ جزوی تفرقی مساوات پاتے ہیں:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right] = 0. \tag{24-10}$$

مساوات (24-10) اکثر اس شکل میں لکھا جاتا ہے:

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \eta} - \frac{\partial}{\delta t}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial \eta/\partial t)}\right] = 0, \qquad (24\text{–}11)$$

جہاں

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \eta} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial \eta/\partial x)}\right] \qquad (24\text{–}12)$$

"تغیری" یا "فنکشنی" تفرقی اخذ کہلاتا ہے۔ دھیان رکھیے کہ ایک مسلسل متغیرہ کو حدوں تک لے جانے میں ہم نے N معمول لگرانجی تفرقی مساواتوں کی جگہ ایک جزوی تفرقی مساوات رکھ دیا ہے۔

مساوات (24-7) کے لگرانجی کثافت مساوات (24-11) میں رکھنے پر فوراً یہ لہر مساوات ملتا ہے:

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \qquad (24\text{–}13)$$

جو رفتار $\sqrt{Y/\mu}$. سے چلنے والی دباؤ لہریں ظاہر کرتی ہے۔

24-2 سہ۔ ابعادی مسلسلہ کے لیے تعمیم

انھیں خیالاتوں کو ایک سہ ابعادی میدان η کے لیے عام بنایا جا سکتا ہے، جہاں η کوئی ہم متغیر، پیرامیٹر ہو سکتا ہے۔ مساوات (24-1) کی مطابقت کا تغیری اصول یہ ہو جاتا ہے:

$$\delta \iint \mathfrak{L}\, dv\, dt = 0, \qquad (24\text{–}14)$$

یا

$$\delta \iint \mathfrak{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x^i}\right) d^4x = 0. \qquad (24\text{–}15)$$

ظاہر ہے کہ اگر لگرانجی کثافت ایک اسکیلر ہے تو یہ تشکیل ہم متغیری ہو گی۔ آیئے ہم پھر $\mathfrak{L}$ کے η اور $\partial\eta/\partial x^i$, پر انحصار کو تبدیل کریں لیکن x^i کو بطور مستقل آزاد سمتی قدروں کے مانیں۔ جزوی انٹگریشن سے ہمیں

ملتا ہے:

$$\int\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^i)}\right]\right\}d^4x\,\delta\eta=0, \qquad (24\text{–}16)$$

جس سے یہ ہم متغیری لاگرانجی مساوات ملتے ہیں:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^i)}\right]. \qquad (24\text{–}17)$$

وقت پر انحصار کو صریحی طور پر ظاہر کرنے کے لیے ہم ان مساوات کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\eta}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot\eta}\right), \qquad (24\text{–}18)$$

جہاں

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\eta}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial x^a}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^a)}\right], \qquad (24\text{–}19)$$

جب کہ $\dot\eta=\partial\eta/\partial t$ اور x^a تینوں مکانی متغیروں کو ظاہر کرتا ہے۔ عمل $\delta/\delta\eta$ اب تین-ابعادی تغیری تفرقی اخذ ہے۔ ہمارا پروگرام یہ ہے کہ ایسا $\mathfrak{L}$ دریافت کیا جائے کہ مساوات (24-17) ہمیں برق مقناطیسی حالت کے لیے میکسویل کے مساوات دے۔ صاف ہے کہ اس سے پہلے کی بحث کسی بھی میدانی تھیوری پر لاگو ہوگی۔ یہ ممکن ہو سکتا ہے کہ عمل کے اصول کا بیان کیا جائے اور ایک لگرانجی جزوی تفرقی مساوات لکھی جائے جو ہم متغیری شکل میں ہے۔ ایک ہیملٹنی داخل کرنے کے لیے ہمیں x^i میں سے وقت کو الگ کرنا ہوگا جیسا کہ مساوات (24-18) اور (24-19) میں کیا گیا ہے۔ تب ہم η کی جوڑی دار ایک تحرک کثافت کی تعریف کر سکتے ہیں:

$$\pi(x^a,t)=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot\eta}, \qquad (24\text{–}20)$$

اور ایک ہیملٹنی کثافت کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں:

$$\mathcal{H}\left(\eta,\frac{\partial\eta}{\partial x_a},\pi;t\right)=\pi\dot\eta-\mathfrak{L}. \qquad (24\text{–}21)$$

ہم صرف اسی حالت کا ذکر کریں گے جس میں ہیملٹنی کا وقت پر صریحی انحصار نہیں ہے ہیملٹنی مساوات حسب معمول طریقے سے آجاتے ہیں۔ کل ہیملٹنی $H = \int \mathcal{H}\, dv$: کے اضافے δH پر غور کیجیے۔

$$\delta H = \int \left[\dot{\eta}\, \delta\pi + \pi\, \delta\dot{\eta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^i)}\, \delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\, \delta\eta \right] dv.$$

مساوات (24-17) کے ساتھ اور π, کی تعریف کو لے کر ٹکڑوں میں اینٹگرل لینے سے

$$\delta H = \int (\dot{\eta}\, \delta\pi - \dot{\pi}\, \delta\eta)\, dv. \tag{24-22}$$

یہ ہو جاتا ہے۔ چونکہ

$$H = \int \mathcal{H}\left(\pi, \eta, \frac{\partial\eta}{\partial x^a}\right) dv, \tag{24-23}$$

اس لیے ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں:

$$\delta H = \int \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}\, \delta\pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}\, \delta\eta + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial\eta/\partial x^a)}\, \delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^a}\right) \right] dv. \tag{24-24}$$

اگر ہم مساوات (24-24) کو ٹکڑوں میں اینٹگریٹ کریں اور نتیجہ کو مساوات (24-22) کے ساتھ موازنہ کریں تو مساوات (24-19) کے نوٹیشن میں ہم ہیملٹن کی مساواتوں کو اس نئی شکل میں پاتے ہیں:

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \qquad \dot{\pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \tag{24-25}$$

ہیملٹن کے مساوات پوائسان بریکٹوں کے لحاظ سے وقتی شرح تبدیلی کے معمولی معنے دیتے ہیں۔ اگر کسی طبیعی متغیرہ Λ کی کثافت L, ہو یعنی اگر $L = \int \Lambda\, dv$, ہو تو اس عمل کے ذریعہ جس سے مساوات (24-25) حاصل کیا گیا ہے، ہم یہ پاتے ہیں:

$$\frac{dL}{dt} = \int \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\eta}\, \dot{\eta} + \frac{\delta\Lambda}{\delta\pi}\, \dot{\pi} \right) dv = \int \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\eta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \frac{\delta\Lambda}{\delta\pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \right) dv$$

$$= \int [\Lambda, \mathcal{H}]\, dv, \tag{24-26}$$

جو نام پوائساں بریکیٹ کے ہم پلہ ہے یہ عبارات کوانٹم کاری کے لیے پر سہولت نقطۂ آغاز بن سکتے ہیں۔ اگر ایک لگرانجی کثافت $\mathcal{L}$ دیا ہوا ہے تو اوپر کی بحث واضح میدانی مساواتیں دے سکتی ہے۔ میدانی مساواتوں کے خطی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ لگرانجی میں نہ تو η کی دو سے بڑی کوئی طاقت شامل ہو اور نہ $\partial\eta/\partial x^i$. کی سادہ ترین مثال کے طور پر ہم

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} - \mu^2\eta^2\right), \tag{24-27}$$

کو لیتے ہیں جو مساوات (24-11) کے ذریعہ میدانی مساوات تک

$$(\Box - \mu^2)\eta = 0. \tag{24-28}$$

پر پہنچاتا ہے۔ مطابقہ متحرک کثافت اس سے ملتی ہے:

$$\pi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\eta}{\partial t}, \tag{24-29}$$

اور ہمیں واضح ہیملٹنی

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}[c^2\pi^2 + (\nabla\eta)^2 + \mu^2\eta^2]. \tag{24-30}$$

ملتا ہے۔ یہ یوکاوا کا اسکیلر میسان میدان ہے جس کا نقطۂ حل یہ ہے:

$$\eta = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{24-31}$$

24-3 برق مقناطیسی میدان

برق مقناطیسی میدان کے لیے ایک زیادہ پیچیدہ شکل درکار ہے۔ مانا جا سکتا ہے کہ ہم اب ایک ویکٹر میدان سے دوچار ہیں، یعنی:

$$\eta \to \phi^i. \tag{24-32}$$

کل لگرانجی تین حصوں میں ہوگا (1) مادی ذروں کی حرکت کے لیے ایک کیتی رقم؛ (2) ایک تفاعلی رقم جو ذرے کا رشتہ میدان سے جوڑے؛ اور (3) میدانی مساوات کے مطابقت کی ایک میدانی رقم۔

(1) اور (2) رقمیں ہمارے پہلے افکار سے لکھی جا سکتی ہیں۔ اگر ہم

$$\mathcal{L}_1 = \tfrac{1}{2}\rho_m^0 c^2 u_i u^i, \tag{24-33}$$

ہیں جہاں ρ_0 موزوں کمیتی کثافت ہے اور

$$\mathcal{L}_2 = j^i\phi_i, \qquad (24\text{–}34)$$

ہیں، تو ہم جانتے ہیں کہ کسی خارجی میدان میں نقطہ ذرّوں کی حرکات صحیح صحیح ملیں گی $\mathcal{L}_3$ لکھنے میں ہمیں ایک کلاسکی مشابہت سے رہنمائی مل سکتی ہے: ہم $\mathcal{L}_3$ کو اس طرح چنیں کہ $\mathcal{L}$ ایک غیر متغیر ہو اور مضمر اور حرکی توانائی کے کلاسکی فرق کے ہم پلّہ بھی ہو۔ ایک برق مقناطیسی اہتزاز میں توانائی کا اہتزاز برقی توانائی اور مقناطیسی توانائی کے درمیان ٹھیک اسی طرح ہوتا ہے جیسے ایک میکانکی اہتزاز میں توانائی حرکی اور مضمری توانائی کے درمیان اہتزاز کرتی ہے۔ وہ واحد اسکیلر جو چہار مضمر کے پہلے تفرّقی اخذوں میں دو طاقتی ہے اس فرق کے متناسب ہوتا ہے، یعنی $F^{ij}F_{ij} = 2(c^2B^2 - E^2)$. (نقلی اسکیلر مقدار $F^{ij}G_{ij}$، جہاں G_{ij} جو F_{ij} کا مثنیہ dual ہے اس وجہ سے خارج ہو جاتا ہے کہ یہ لگرانجی کی باقی رقموں سے مختلف طریقے سے تبادل پذیر ہوتا ہے جیسا ہم نے سیکشن (18-2.) میں دیکھا ہے) بے شک یہ امکان خارج نہیں کیا گیا ہے کہ کسی لگرانجی کثافت میں ایسی رقمیں بھی شامل ہوں جو خود چہار مضمروں میں دو طاقتی ہوں جیسا کہ مساوات (24-27) میں پایا جاتا ہے لیکن یہ ہی وہ رقم ہے جو نقطہ حل مساوات (24-31) میں r پر ایک پیچیدہ نفسی انحصار داخل کر دیتی ہے اس لیے اگرچہ مساوات (24-27) کے ہم پلّہ ایک لگرانجی کثافت رقموں کی تبادل پذیری کے نقطہ نگاہ سے ایک ممکن میدانی تصویر دیتا ہے پر یہ برق مقناطیسی میدان کے تجرباتی اوصاف سے مطابقت نہیں رکھتا۔ کوانٹم میکانیات میں اطلاق کرنے پر ایسی تصویر جس میں لگرانجی کثافت میں ایسی رقمیں ہیں جو مضمروں میں اور ان کے تفرّقی اخذوں میں بھی دو طاقتی ہیں، محدود سکونی کمیت کے فوٹانوں کی پیشین گوئی کرتی ہے بجائے اس کے کہ برق مقناطیسی تصویر کے صفر سکونی کمیت کے فوٹانوں کی پیشین گوئی کرے۔ اس لیے برق مقناطیسی میدان کے لیے ہمیں

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\epsilon_0(E^2 - c^2B^2)}{2} = -\frac{\epsilon_0}{4}F^{ij}F_{ij}. \qquad (24\text{–}35)$$

لینا ہوگا۔ دھیان رہے کہ مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

پہلے ہی مندرجہ ذیل رشتہ جوڑنے والے مساواتوں میں شامل ہیں؛

$$F^{ij} = \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^i}{\partial x_j} \qquad (17\text{–}30)$$

جو ان سے مطابقت رکھتے ہیں۔

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

مساوات (24–35)، کو لے کر کل لگرانجی کثافت یہ ہو جاتی ہے۔

$$\mathfrak{L} = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{ij}F_{ij} + eu^i\phi_i + \frac{1}{2}\rho_m^0 c^2 u^i u_i. \qquad (24\text{–}36)$$

لگرانجی کے اس چناؤ کی ایک وجہ لگرانجی کثافت اور توانائی تحرک ٹینسر مساوات (21–9) کے درمیان کا رشتہ ہے۔ اگر ہم یہ مان لیں کہ ہیملٹن کے معنی توانائی کثافت کے طور پر قائم رہتے ہیں تو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{N} = 0. \qquad (24\text{–}37)$$

اب

$$\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\eta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathfrak{L}\right) = \dot{\eta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}}\right) - \dot{\eta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^\alpha)}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^\alpha \partial t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\dot{\eta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^\alpha)}\right]. \qquad (24\text{–}38)$$

لہٰذا مساوات (24–37) سے

$$N^\alpha = cT^{4\alpha} = \dot{\eta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^\alpha)}. \qquad (24\text{–}39)$$

مساوات (24–39) اور مساوات (24–21) کی ہم متغیری تعمیم یہ ہے:

$$T^i_j = \frac{\partial\eta}{\partial x^j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x^i)} - \mathcal{L}\,\delta^i_j. \tag{24-40}$$

اس طرح لگرانجی کا یہ چناؤ مساوات (24-39) اور $T^4_4 = \mathcal{H}$, دونوں کو مطمئن کرتا ہے جیسا کہ ہونا چاہیے۔

یہ آسانی سے دکھایا جا سکتا ہے کہ لگرانجی $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ میکسویل کے مساوات پر پہنچاتا ہے، دھیان رہے کہ لگرانجی کا یہ چناؤ یگانہ نہیں ہے چونکہ حرکت کے مساوات میدانوں F^{ij}, پر منحصر ہوں گے جو خود مقدار $\partial\phi^i/\partial x^i$, پر منحصر نہیں ہیں اس لیے $\partial\phi^i/\partial x^i$ کا کوئی فنکشن $\mathcal{L}$. میں جوڑا جا سکتا ہے گو کہ یہ لازمی نہیں ہے لیکن رواج یہ ہے کہ لارنز شرط $\partial\phi^i/\partial x^i = 0.$ کا استعمال کیا جائے۔ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ اور $\partial\mathcal{L}/\partial\phi_j = j^j,$ کا استعمال کرکے مساوات (24-17) سے ہم پلٹتے ہیں:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_j/\partial x^i)} = \frac{\epsilon_0}{4}\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial}{\partial(\partial\phi_j/\partial x^i)}\left[\left(\frac{\partial\phi^l}{\partial x_k} - \frac{\partial\phi^k}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial\phi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial\phi_k}{\partial x^l}\right)\right]\right\}$$
$$= \epsilon_0\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i}, \tag{24-41}$$

اور اس طرح

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}, \tag{17-34}$$

جو میکسویل کے ماخذ مساوات ہیں؛

بلاشبہ یہ حساب سہ۔ ابعادی تشکیل:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\epsilon_0(c^2B^2 - E^2) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} + \rho\phi, \tag{24-42}$$

اور مساوات (24-19) کا استعمال کرکے بھی کیا جا سکتا ہے۔ سہ۔ ابعادی زبان میں ہم یہ لے سکتے ہیں:

$$\eta^\alpha = A^\alpha, \tag{24-43}$$

$$\pi^\alpha = -\epsilon_0 E^\alpha, \tag{24-44}$$

یعنی A اور E کینانکی زوج ہیں۔ ان متغیروں کے لحاظ سے میدان کی ہیملٹنی کثافت ماخذ کی غیر موجودگی میں یہ ہوتی ہے :

$$\mathcal{H} = \epsilon_0\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 + \epsilon_0\left(\nabla\phi\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + \frac{(\nabla\times\mathbf{A})^2}{2\mu_0} - \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$$

$$- \epsilon_0\left(\nabla\phi\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) - \frac{\epsilon_0}{2}(\nabla\phi)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\nabla\times\eta)^2}{2\mu_0} - (\pi\cdot\nabla\phi). \tag{24-45}$$

آخری رقم کو پیمانہ کے مخصوص چناؤ سے صفر کیا جا سکتا ہے۔ بہر حال چوں کہ $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0,$ آخری رقم کا حجمی اینٹگرل غائب ہو جاتا ہے اور اس طرح پر توانائی میں اس کا حصہ نہیں ہوتا۔

24-4 ایک بکس کے اندر دوری حل ہموار لہر سے اظہار

میکسویل کے مساواتوں کو ہیملٹنی شکل میں برتنے کا ایک دوسرا اختیاری طریقہ یہ ہے کہ میدان کو ایک L ابعاد کے بکس کے اندر مقید رکھ کر آزادی کے درجوں کی تعداد کو محدود کر دیا جائے۔ ہم حدی شرائط ایسی لے سکتے ہیں کہ میدانی فنکشن تین ابعاد میں دوری ہوں اور ان کا وقفہ L ہو۔ یہ طریقہ ریلے جینس قانون (دیکھیے سیکشن ,(22-6)) کے اخذ کے لیے بڑی تاریخی اہمیت کا ہے اور میدان کی ایسی تشکیل دیتا ہے جو آسانی سے کوانٹائی جا سکتی ہے۔

آیئے ہم ہیملٹنی یہ لیں ؛

$$H = \int\left(\frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2}\right)dv = \int\left[\frac{\pi^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\nabla\times\mathbf{A})^2}{2\mu_0}\right]dv. \tag{24-46}$$

چوں کہ حل دوری ہیں انھیں فضا میں فوریر سلسلہ سے پھیلایا جا سکتا ہے مطلب یہ ہے کہ اگر ہم

$$\mathbf{u}_{k\lambda} = \frac{1}{L^{3/2}}\,\epsilon_{k\lambda}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{24-47}$$

رکھیں تو ان فنکشنوں کے لحاظ سے کسی ویکٹر فنکشن کو $\mathbf{k}$ کے اوپر اور اکائی

ویکٹروں $e_{k\lambda}$ کے اوپر ایک جوڑ کی شکل میں پھیلایا جاسکتا ہے۔ حدی شرائط k: کی قیمتوں کو $k = (2\pi/L)(l\hat{x} + m\hat{y} + n\hat{z})$, کے لیے محدود رکھتی ہیں جب کہ l, m, n سب مثبت اور منفی عددوں کو ظاہر کرتے ہیں اور $e_{k\lambda}(\lambda = 1, 2, 3)$ تقطیب کے کسی من مانے چناؤ کی اجازت دیتے ہیں۔ مثلاً ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\mathbf{A}(x^\mu, t) = \sqrt{\mu_0} \sum_{k,\lambda} \mathbf{u}_{k\lambda}(r) q_{k\lambda}(t), \qquad (24\text{–}48)$$

$$\pi(x^\mu, t) = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{k,\lambda} \mathbf{u}_{k\lambda}(r) p_{k\lambda}(t). \qquad (24\text{–}49)$$

مساوات (24–47) کے فنکشن ان معاون رشتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_{k\lambda} &= i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{k\lambda}, \\ \nabla \times \mathbf{u}_{k\lambda} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{k\lambda}. \end{aligned} \qquad (24\text{–}50)$$

آئیے ہم ان رشتوں کو ایک خالص یعنی عرضی اشعاعی میدان پر لاگو کریں۔ ہم ایسا پیمانہ چن سکتے ہیں جس میں $\phi = 0$, ; اور اس طرح ہم $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$ لیتے ہیں۔ اس حالت میں $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda} = 0$, اور اس لیے سب ممکن تقطیبوں پر جوڑ ہر $\mathbf{k}$ کے لیے صرف دو اجزاء e_{k1} اور e_{k2}, پر مشتمل ہوگا جہاں $\mathbf{k}, e_{k\lambda}$ پر عمودی ہے۔ اس لیے

$$\nabla \times \mathbf{u}_{k1} = ik\mathbf{u}_{k2}. \qquad (24\text{–}51)$$

ہیملٹنی کی پہلی رقم کے لیے ہمیں مندرجہ ذیل کی قیمت نکالنا ہوگی۔

$$\int \pi^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{L^3} \int \sum_k \sum_{k'} e^{i(k+k')\cdot r} p_k p_{k'} \, dv$$

$$= \epsilon_0 \sum_k \sum_{k'} \delta(k + k') p_k p_{k'} = \sum_k \epsilon_0 p_k p_{-k}. \qquad (24\text{–}52)$$

چونکہ π حقیقی ہے مساوات (24–49) اپنے مخلوط زوج کے برابر ہے اور چونکہ $\mathbf{u}_{k\lambda} = \mathbf{u}^*_{-k\lambda}$ اس لیے لازمی طور پر $p_k = p^*_{-k}$. اس لیے

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int \pi^2 \, dv = \sum_k \sum_{\lambda=1}^{2} |p_{k\lambda}|^2. \qquad (24\text{–}53)$$

علاوہ اس کے مساوات (24-51) اور (24-48) سے

$$\frac{1}{\mu_0}\int (\nabla \times \mathbf{A})^2\, dv = \sum_{k,\lambda} |ikq_{k\lambda}|^2 = \sum_{k,\lambda} k^2|q_{k\lambda}|^2. \qquad (24\text{–}54)$$

اس لیے

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{k,\lambda} \left(|p_{k\lambda}|^2 + k^2|q_{k\lambda}|^2\right). \qquad (24\text{–}55)$$

مساوات (24-55) کی ہر رقم وہی ہے جو ہارمونک اہتزاز کار کے ہیملٹنی کی۔ اس طرح برق مقناطیسی میدان کے مساوات ہارمونک اہتزاز کاروں کے ایک سیٹ کی حرکت کے مساواتوں کے مساوی ہیں۔ اگر بکس کی لمبائی کو زیرِ غور اشعاع کی لہر لمبائی کے مقابلے میں بڑا لے لیا جائے تو ایک زاویائی تواتری وقفہ $d\omega$ کے لیے اہتزاز کاروں کی تعداد $(\omega^2/\pi^2c^3)\, d\omega$ ملتی ہے۔ ہر اہتزاز کار کی اوسط توانائی جب وہ ٹمپریچر T پر برتن کی دیواروں سے تعادل میں ہو شماریاتی میکانیات کے استعمال سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ ہم نے پہلے ہی دیکھا ہے کہ اس سے حاصل ہوا تقسیم قانون یعنی مساوات (22-47) تجربہ سے بالکل میل نہیں کھاتا، اس طرزِ فکر کو صحیح کرنے کے لیے پلینک کی کوششوں کا یہ نتیجہ تھا جس نے کوانٹم نظریہ کو جنم دیا۔

مجوّزہ حوالے

H. Goldstein, Classical Mechanics.

اس کتاب کا باب 11 میدانوں کی ہیملٹنی تشکیل کا ایک عمدہ مقدمہ ہے۔ مجرد نظاموں سے مسلسل نظاموں میں عبور کرنے کا ہمارا اندازِ تحریر گولڈسٹین کے سیکشن .11-1 کے ڈھنگ پر ہے۔

G. Wentzel, *Introduction to the Quantum Theory of Fields.*

کلاسیکی برقی حرکیات کی لگرانجی و ہیملٹنی تشکیل کا وجود ہی اس لیے ہوا کہ کوانٹانے کا عمل آسان ہو جائے اور اس کے تذکرے کوانٹم میکانکی تذکرات کے دیباچہ کی سی شکل میں کم ملتے ہیں۔ ونیزل کا پہلا باب بیشتر کلاسیکی میدانوں

پر ہے۔ جو اختیاری طرزِ عمل ہم نے مختصراً بتائے ہیں وہ
L. I. SCHIFF, *Quantum Mechanics.*
شف کی نہایت مفید کتاب کے XIII اور XIV بابوں میں ملیں گے۔

مشق

1. دکھایئے کہ لگرانجی کثافت کا حسبِ ذیل استحالہ

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + \frac{\partial}{\partial x^i}[C^i(\eta)],$$

جہاں C^i کا کوئی من مانا η ویکٹر تفاعل ہے یولری مساوات پر کوئی اثر نہیں ڈالتا۔ اس لیے کسی دیے ہوئے میدان کے اظہار کے لیے لگرانجی کثافت کا چناؤ یکتا نہیں ہے۔

ضمیمے

ضمیمہ I

برق مقناطیسی نظریہ میں اکائیاں اور ابعاد

کلاسکی میکانیات کا یہ امتیازی خاصّہ ہے کہ اس کی ریاضیاتی تشکیل میں کوئی بنیادی مستقلے تھیوری کے تجزیہ نہیں ہیں۔ اس لیے کلاسکی میکانکی میں سب طبیعیاتی قوانین کا پیرا چلوں کی کسی تبدیلی کے لیے جن کی جسامتیں کسی من مانی مقدار میں ہوسکتی ہیں" پیمانہ" صحیح صحیح بدل جاتا ہے۔ اگرچہ یہ بالکل لازمی نہیں ہے لیکن ایسا رواج ہے کہ کلاسکی میکانیات کی تشکیل تین ابعادوں کے لحاظ سے کی جاتی ہے: کمیت (M)، لمبائی (L)، اور وقت (T) یہ تعداد بڑھائی جاسکتی ہے، مثال کے طور پر مساوات حجم = لمبائی K^3 میں مستقلہ K کو اس طرح چن کر کہ وہ اکائی سے مختلف ہو اور ابعاد رکھتا ہو۔ ابعاد L^3 کو رواجاً حجم مانا جاتا ہے لیکن ایسا کرنا ضروری نہیں ہے۔ اسی طرح بنیادی اکائیوں کی تعداد کچھ مستقلوں کو اکائی اور بلا ابعاد کا من مانے ڈھنگ سے لے کر کم کی جاسکتی ہے۔ یہ رواج کہ $c = \hbar = 1$ جو کوانٹم میکانکی حسابوں میں اکثر استعمال ہوتا ہے اس کی ایک مثال ہے۔ ان اکائیوں میں من مانے ڈھنگ سے

$$L = T = M^{-1}$$

ہم ان مثالوں کا ذکر یہ دکھانے کے لیے کر رہے ہیں کہ آزاد ابعادوں کی تعداد کلاسکی میکانیات میں بھی من مانی ہے گو کہ سہولت کی خاطر ایک مخصوص چناؤ کیا جاتا ہے۔ عام طور سے جتنی ہی زیادہ ابعادوں کی تعداد چنی جائے گی اتنی ہی زیادہ آزاد اکائیاں کسی خاص مقصد کے لیے جسامت کے درجہ کی مناسبت سے

چنی جاسکتی ہیں۔ لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ اکائیوں کے بدلنے سے یا ابعادوں کی تعداد کے بھی بدلنے سے کسی مساوات کے طبیعیاتی معنی پر کوئی اثر نہیں پڑتا اگر اس کی صحیح تفسیر کی جائے۔

کلاسیکی میکانیات سے برق مقناطیس نظریہ میں فرق اس حقیقت کی وجہ سے ہے کہ اس نظریے میں ایک مستقلہ خلا میں روشنی کی رفتار c، نظریے کے ایک بنیادی مستقلہ کی شکل میں آتا ہے۔ اس لیے من مانی جسامتوں کے لیے طبیعیاتی قوانین صحیح صحیح "پیمانہ" صرف اس حالت میں بدلتے ہیں جب لمبائی اور وقت کی نسبتیں مستقل رکھی جائیں۔ برق مقناطیسی تھیوری کا یہ وصف ایک ایسا پہلو ظاہر کرتا ہے جو مخصوص اضافیت طبیعیات کے کل قوانین کے لیے لاگو ماننا ہے۔

اگر برق مقناطیسی نظریہ میں MLT نظام میکانکی مقداروں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے تو مستقلہ c جس کے ابعاد LT^{-1} ہیں صریحاً نمودار ہوگا یہ بالکل رواج پر منحصر ہے کہ آیا کوئی مزید ابعادی اکائیاں داخل کی جائیں مثال کے طور پر اگر $F = Kq_1q_2/r^2$ کی شکل میں کولوم کے قانون میں مستقلہ K کو من مانے ڈھنگ سے بلا ابعاد کے چنا جائے تو چارج q از خود ابعاد $L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ اختیار کر لیتا ہے اور $L, M,$ اور T کے علاوہ کسی اور بنیادی اکائی کے بتانے کی ضرورت نہیں ہے۔ یہ طریقہ کار اسی طرح واجب ہے جس طرح مساوات $V = KL^3$ میں K کو ایک بلا ابعاد کا مستقلہ مان لینا اور اس طرح حجم کو ابعاد L^3 دینا۔

اگر ہم میکانکی اور برق مقناطیسی مقداروں کے درمیان رشتہ جوڑنے والے مساواتوں میں سے کسی میں مستقلہ کو بلا ابعاد کا نہ مانیں تو ہم کسی ایک برقی اکائی کو من مانے ڈھنگ سے چننے کے لیے اور اس کے لیے کوئی بعد مقرر کرنے کے لیے آزاد ہیں۔ یہی اس نظام میں کیا گیا ہے جسے mks نظام کہتے ہیں۔

اس کتاب میں جو مخصوص اکائیوں کا سسٹ استعمال کیا گیا ہے وہ mks نظام ہے جس کا استعمال اب کافی عام ہے۔ اس نظام کی خاص سہولت یہ ہے کہ اس میں عام تکنیکی اکائیاں۔ وولٹ، امپیر، کولوم وغیرہ شامل ہیں اور

اس لیے یہ ایسے اطلاقوں میں استعمال کے لیے خاص طور سے موزوں ہے جن میں "مجموعی" سرکٹ پیرامیٹر اور میدان دونوں شامل ہوں۔ چونکہ ان تکنیکی اکائیوں میں وقت کی اکائی سکنڈ لی گئی ہے اور طاقت کی تعریف محض واٹ میں کی گئی اس لیے میکانکی اکائیوں کا قدرتی چناؤ میٹر، کلوگرام، اور سکنڈ ہے۔ برقی اور میکانکی اکائیوں کے اس چناؤ کے ساتھ اگر ہم ایک مرتبہ ایک بنیادی برقی اکائی چن لیتے ہیں تو مساواتوں :

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{j}_1 \times (\mathbf{j}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}\, dv_1\, dv_2 \qquad (2)$$

میں آنے والے مستقلے ϵ_0 اور μ_0 معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ ہم ان کے اعدادی ناپوں کا معلوم کرنا اس وقت تک کے لیے ملتوی کرتے ہیں جب تک ہم یہ نہ دیکھ لیں کہ برقی اکائی کس طرح چنی گئی لیکن ہم یہ دیکھتے ہیں کہ مساواتوں کو mks اکائیوں میں لکھنے پر ان میں دو مستقلے ϵ_0 اور μ_0، ملتے ہیں جب کہ صرف ایک مستقلہ تھیوری کے لیے بنیادی ہے۔

تاریخی اعتبار سے اکائیوں کے ایک سٹ (esu) کی تعریف کولمب قانون، مساوات (1)، میں $4\pi\epsilon_0$ کی جگہ اکائی رکھ کر اور میکانکی مقداروں کے لیے cgs اکائیاں استعمال کرکے کی گئی تھی۔ اس طرح برق سکونی اکائی چارج کا تعین ہوتا ہے جس کے میکانکی ابعاد اوپر بتائے گئے ہیں اور اس سے مضمر، برقی میدان وغیرہ کی اکائیوں کی تعریف حاصل ہوتی ہے۔ دوسری طرف، اگر ہم مساوات (2)، میں $\mu_0 = 4\pi$ رکھیں اور اگر cgs میکانکی اکائیاں استعمال کی جائیں تو یہ مساوات کرنٹ کی ایک اکائی کا تعین کرتا ہے (جس کے ابعاد $M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$ ہیں) جسے برق مقناطیسی اکائی (emu) یا اب ایمپیر کہتے ہیں۔ دوسری برقی مقداروں کی اکائیاں اب ایمپیر اور cgs رشتوں سے اخذ کی جا سکتی ہیں۔ اس طرح سے تعریف کی ہوئی چارج کثافت اور کرنٹ کثافت اس رشتے کے پابند ہیں :

$$j_{emu} = \rho_{esu} \frac{u}{c}, \qquad (3)$$

جہاں c اس جگہ اکائیوں کے درمیان ناپ سے معلوم کی گئی نسبت ہے۔ اس نسبت کو پہلے پہل ویبر اور کولراش نے ایک کپیسیٹر سے جس کی برقی سکونی صلاحیت معلوم تھی بہے ہوئے چارج کو ناپ کر معلوم کیا ρ_{esu} سے اخذ کی گئی برقی مقداروں کا اور j_{emu} سے اخذ کی گئی مقناطیسی مقداروں کا استعمال کر کے اور مساواتوں میں واحد مستقلہ c لے کر اکائیوں کا ایک ہم آہنگ سٹ (گاسی اکائیاں) حاصل ہوتا ہے۔

جیسا مساواتوں (1) اور (2) میں ظاہر کیا گیا ہے mks نظام عام طور سے اپنی ناطق شکل میں استعمال ہوتا ہے ز cgs اکائیاں اپنی غیر ناطق شکل میں دی گئی ہیں۔ اکائیوں کے ایک ناطق نظام میں کولوم کے اور ایمپیر کے قوت قوانین میں ایک جز 4π شامل رہتا ہے جو اس لیے ہے کہ یہ میکسویل کی ان میدانی مساواتوں میں سے جو ماآخذ پر مشتمل ہیں خارج ہو جائے۔ عام ویکٹر رشتوں میں اس طرح کے جز نہیں ہوتے اس جیامٹریائی جز کا ظہور ریاضیاتی طور سے گرین کے فنکشن کی شکل سے ظاہر ہوتا ہے۔ اگر کوئی ماآخذ کسی مسئلہ کا تعین کردی تشاکل میں کرتا ہے (جیسے ایک نقطہ ماآخذ) تو ناطق اکائیوں میں 4π صریحی طور پہ حاصل ہوئے حل میں ملتا ہے؛ اگر ماآخذ ایک دائری تشاکل کی میدانی ترتیب کا تعین کرتا ہے (جیسے ایک خطی ماآخذ) تو 2π ظہور میں آتا ہے۔ اکائیوں کا ایک نظام جو گاسی نظام کے ہم پلہ ہے لیکن ناطق شکل میں ہے، ہیوی سائڈ۔لارنز نظام کہلاتا ہے۔

تاریخی اعتبار سے ایمپیر ایک ایب ایمپیر یا emu اکائی کرنٹ کا صحیح صحیح $\frac{1}{10}$ لیا گیا تھا۔ اس حقیقت کی مدد سے ہم مساوات (2)، میں μ_0 کی جسامت معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہم نے دیکھا ہے کہ ایب۔ ایمپیر کی تعریف $\mu_0/4\pi = 1.$ رکھ کر کی گئی تھی۔ مندراج یہ ہے کہ کولوم کو، نہ کہ ایمپیر کو بنیادی برقی مقدار مانا جاتا ہے اور ہمیں صرف برق مقناطیسی نظام کو تعین کرنے والے مساوات کو جس میں سب مقداریں اکائی جسامت کی ہیں mks اکائیوں میں

بدلتا ہے ۔ صریحی طور پر برقی ۔ مقناطیسی cgs نظام میں [چونکہ مساوات (2) کے داہنے طرف کی سب لمبائیاں کٹ جاتی ہیں]

$$1 \text{ dyne} = 1 \text{ (abampere)}^2$$

چونکہ mks اکائیوں میں جس کے لیے $1 \text{ abampere} = 10 \text{ coulomb/second}$, یہ ہوجاتا ہے

$$10^{-5} \text{ newton} = 10^{-5} \frac{\text{kilogram-meter}}{\text{second}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{10^2 \text{ (coulomb)}^2}{\text{(second)}^2}$$

یا

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{kilogram-meter}}{\text{(coulomb)}^2} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{henry}}{\text{meter}}.$$

اب مستقلہ ϵ_0 رشتہ $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, سے مل جاتا ہے :

$$\epsilon_0 = \left(\frac{10^7}{4\pi c^2} \simeq \frac{1}{36\pi \times 10^9}\right)\left(\frac{\text{(coulomb)}^2 \text{ (second)}^2}{\text{kilogram (meter)}^3} = \frac{\text{farad}}{\text{meter}}\right)$$

یہاں جو کچھ کیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ ایک برقی اکائی کی من مانے ڈھنگ سے چنی ہوئی جسامت اور بعد کے لحاظ سے μ_0 کا تعین کیا گیا ہے اور ایسا کرنے پر ϵ_0 از خود مقرر ہوجاتا ہے اگر نظام کو میکانکی اکائیوں اور تجربہ سے حاصل ہوئی بنیادی مستقلہ c کی قیمت کے ساتھ ہم آہنگ ہوتا ہے ۔

وہ برقی اکائیاں جو متعین اعدادی مستقلے رکھنے والے تعینی رشتوں کے ذریعے میکانکی معیاروں کے حوالے سے ملتی ہیں ۔ مطلق برقی اکائیاں کہلاتی ہیں درحقیقت کچھ زمانہ پہلے تک وہ صحت جس سے emu اور emu کو ان کے تعینی مساواتوں کے ذریعے حاصل کیا جاسکتا تھا عملی مصارف کے لیے ناکافی تھی، اس عرصے کے دوران جب مطلق اکائیوں کی تصدیق کی صحت معیاروں کے تکرار کی صحت سے کم تھی تب عملی اکائیاں بین الاقوامی ایمپیر اور بین الاقوامی اوم کی قسم کے معیاروں[1] کی بنیاد پر تھیں تکنیک میں سدھاروں کے نتیجہ کے طور پر مطلق

---

[1] مثال کے لیے بین الاقوامی ایمپیر کی تعریف یہ تھی :۔ (باقی حاشیہ اگلے صفحہ پر دیکھیے

برقی پیمائشیں بہت زیادہ صحت کے ساتھ کی جا سکتی ہیں جس کی وجہ سے پہلے کے بین الاقوامی معیار اب دوئم درجے کے معیار رہ گئے ہیں۔ اس لیے مقدار $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ بطور ایک درست اعدادی مستقلہ کے عملی اکائیوں کو مطلق مان کر ہے نہ کہ بین الاقوامی اکائیوں کو۔ دھیان رکھیے کہ mks نظام میں ϵ_0 برق مقناطیسی اشعاع کی رفتار اور لمبائی اور وقت کے معیاروں کے درمیان تجرباتی رشتہ پر منحصر ہے۔ (گو کہ μ_0 منحصر نہیں ہے)، بہ گاسی اور ہیوی سائڈ۔ لارنز نظاموں میں c کی صریحی موجودگی سے مطابقت رکھتا ہے۔ "قدرتی نظام میں روشنی کی رفتار خود ایک معیار ہے ظاہر ہے کہ روشنی کی رفتار کی تجرباتی پیمائش محض اس نسبت کی ایک ناپ دیتا ہے جو برق مقناطیسی اشعاع کی ترسیلی رفتار اور لمبائی اور وقت کے معیاروں کی نسبت کے درمیان ہے۔ اس لیے حاصل ہوا عدد مطلق معنی میں کبھی کوئی بنیادی حیثیت نہیں رکھتا۔ لیکن اس کا بڑا عملی فائدہ یہ ہے کہ یہ لمبائی اور وقت کے معیاروں کو مربوط کرنے کے لیے ایک غیر متعلق اور درست ذریعہ مہیا کرتا ہے۔

واضح رہے کہ اکائیوں کے سب نظاموں میں بنیادی رشتوں کے طبیعیاتی معنی وہی ہیں۔ برقی حرکیات کے قوانین کا ایک نظام سے دوسرے میں منتقل کرنا آسان ہے۔ خلائی حالتوں کے لیے، اس کتاب میں رشتے اس طرح لکھے گئے ہیں کہ مندرجہ ذیل تبادل انھیں ان کے گاسی ہم پلہ شکل میں آئیں گے۔

$$cB_{\text{mks}} \rightarrow B_{\text{Gaussian}},$$
$$\epsilon_0 \rightarrow (4\pi)^{-1},$$
$$\mu_0\epsilon_0 \rightarrow 1/c^2$$

ٹیبل I-2 میں، خلا میں جائزہ کچھ بنیادی برق مقناطیسی رشتوں کو اختصار میں دیا گیا ہے اور یہ دکھایا ہے کہ وہ مختلف اکائی۔ نظاموں میں کیا شکل اختیار

(بقیہ حاشیہ صفحہ گزشتہ)

"یہ اس مستقل کرنٹ کی قیمت ہے جو معیاری نسخہ کے مطابق تیار کیے گئے، پانی میں سلور نائٹریٹ کے گھول میں گذارنے پر 0.001118 گرام فی سکنڈ کی شرح سے چاندی جمع کرتا ہے۔"

کرتے ہیں۔ اکائیوں کی روپ بدلی میں سہولت کے لیے زیادہ اہم روپ بدلی جزوں کی فہرست ٹیبل I-1 میں دی گئی ہے۔ ٹیبل I-4 میں دوسرے اعدادی مستقلے اور فنکشنی رشتے دیے گئے ہیں جو ان اطلاقوں کے لیے کارآمد ہیں جو ایٹمی ذرات پر مشتمل ہیں۔

مادّی وسیلوں کے اندر کے مساواتوں کے لیے مسئلہ کسی قدر زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے اور اکثر صحیح طور سے سمجھا نہیں جاتا۔ مسئلہ کو گہرائی میں سمجھنے کے لیے آئیے ہم اس بنیادی عمل پر غور کریں جس کے ذریعہ خلائی رشتوں سے وسیلوں میں میکسویل مساوات بنائے جاتے ہیں:

خلائی ماخذ مساواتوں کی عام تشکیل یہ ہے:

$$D(F) = S, \qquad (4)$$

جہاں D ایک خطی تفرقی آپریٹر ہے جو میدان F پر کام کرتا ہے اور S ماخذ ہے۔ وسیلوں کے اندر S دو حصّوں میں تقسیم ہو جاتا ہے ایک "پہنچ کے اندر کا" (کلاں پیمانہ) ماخذ S اور دوسرا "پہنچ کے باہر کا" ماخذ S_p یعنی

$$D(F) = S + S_p. \qquad (5)$$

تب کو ایک معاون مقدار F_H سے اسی تفرقی آپریٹر کے ذریعہ اس طرح پر حاصل کیا جاتا ہے کہ

$$S_p = D(F_p) \qquad (6)$$

اور اس لیے

$$D(F - F_p) = S. \qquad (7)$$

اس لیے ایک جزوی میدان $F - F_p$ کی تعریف اس طرح پر کی جا سکتی ہے۔

$$D(F_H) = S, \qquad (8)$$

یعنی اس طرح پر کہ اس میدان کو صرف "پہنچ" کے اندر کے (اکثر حقیقی کہے جانے والے) ماخذ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ ٹیبل I-3 میں اس عام بیان کو اصلی برقی مقناطیسی مقداروں کے لحاظ سے دکھایا گیا ہے۔

ابہام اس وجہ سے پیدا ہوتا ہے کیونکہ اس عام تشکیل میں F_p کی قسم

کی مقداریں (یعنی P اور M) دوہرے رول میں ظاہر ہوتی ہیں۔ ایک طرف تو مندرجہ ذیل رشتوں میں :

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \qquad (9)$$

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}, \qquad (10)$$

P اور M خالص مآخذی مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں ــ وہ مخصوص چارج اور کرنٹ تقسیموں کو ظاہر کرتے ہیں۔ دوسری طرف دونوں رشتوں میں P اور M میدانوں کی طرح سمجھے جاسکتے ہیں یعنی وہ برقی یا مقناطیسی میدان جن کے مآخذ بالترتیب ρ_P یا $\mathbf{j}_M$ ہیں۔ مندرجہ ذیل قسم کے رشتوں میں جو اب مروج mks نظام میں اس طرح لکھے جاتے ہیں :

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}, \qquad (11)$$

$$\mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{H} + \mathbf{M}, \qquad (12)$$

P اور E کو یا B اور M کو مختلف اکائیاں دی جاتی ہیں: P coulombs/meter^2 میں ناپا جاتا ہے جب کہ E volts/meter میں؛ M amperes/meter میں دیا جاتا ہے جب کہ B webers/meter^2 میں ہے۔ یہ رواج M اور P کے اُن رولوں پر زور دیتا ہے جن میں وہ بطور کرنٹ اور چارج کے بیان کیے جاتے ہیں "جزوی میدان" والی تصویر بھی اتنی ہی جائز ہے اور مساوات (11) اور (12) میں آنے والے مستقلوں کی وجہ سے کسی قدر مبہم ہو جاتی ہے۔ اکائیوں میں مساوات (11) اور (12) یہ ہو جاتے ہیں

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} - 4\pi \mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \text{ (Gaussian)},$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M} \text{ (Heaviside-Lorentz)}.$$

یہاں سب مقداروں کی اکائیاں وہی ہیں اور اس لیے "جزوی میدان" کی تصویر پر زیادہ زور آجاتا ہے۔ میدانی مسئلوں کو حل کرنے کے لیے عام طور سے یہ ضروری ہوتا ہے کہ "دستوری مساوات" کو واضح کر دیا جائے جو P(E) اور M(B) دیتے ہیں۔ اگر یہ خطی شکل کے ہوں جیسے کہ

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\mathbf{E}, \qquad (13)$$

تو اکثر یہ کہا جاتا ہے کہ E ایک "شدتی متغیرہ" ظاہر کرتا ہے اور P ایک "وسعتی متغیرہ" ظاہر کرتا ہے یعنی E سبب ہے اور P اثر۔ اس نقطۂ نظر کو اس حقیقت سے قوت ملتی ہے کہ اس حالت میں E · δP کیے ہوئے کام کا تفرق ظاہر کرتا ہے۔ اس پہلو کے مدّنظر E اور P کے لیے دو مختلف اکائیوں کا استعمال جائز معلوم ہوتا ہے۔ درحقیقت جب مستقل تقطیب (الکٹرٹ) یا مستقل میگنٹ زیرِ غور ہوں تو سبب۔ اثر والی حالت بہت کم صاف معلوم ہوتی ہے۔ اس بات پر دھیان دینا چاہیے کہ بنیادی رشتے (11) اور (12) جمعی (additive;) ہیں؛ دوسری طرف (13) کی قسم کے رشتے بالکل ہی عام نہیں ہیں۔

ہم اختصار میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ سوال کہ آیا E، P، اور D (یا B، M اور H) کی اکائیاں ایک ہی ہیں کافی حد تک غیر متعلق ہے، درحقیقت برقی اور مقناطیسی وسیلوں کی کلاسیکی تھیوری کی صاف وضاحت کے لیے خاص ضرورت یہ سمجھنے کی ہے کہ P اور M کے طبیعیاتی کردار دوہرے ہیں۔

ٹیبل I-1

تحویلی جزو

mks اکائیوں کی نیچے دی ہوئی تعداد کو	اس سے ضرب کیجیے	گاسی (cgs) اکائیوں کی تعداد پانے کے لیے
ampere	10^{-1}	current in abamperes
ampere/meter^2	10^{-5}	current density in abampere/cm^2
coulomb	3×10^{9}*	charge in esu
coulomb/meter^3	3×10^{3}*	charge density in esu/cm^3
farad = coulomb/volt	9×10^{-11}*	capacitance in cm
henry = volt sec/ampere	10^9	inductance in emu
joule	10^7	energy in ergs
newton	10^5	force in dynes
ohm = volt/ampere	$\frac{1}{30}$*	resistance in esu of potential per abampere
	$\frac{1}{9} \times 10^{11}$*	resistance in esu
volt	$\frac{1}{300}$*	potential in esu
volt/meter	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$*	electric field intensity E in esu
coulomb/meter^2	$12\pi \times 10^{5}$*	electric displacement D in esu
weber = volt second	10^8	magnetic flux in maxwells
weber/meter^2	10^4	flux density B in gauss
ampere-turns/meter	$4\pi/10^3$	field intensity H in oersteds
mho/meter	$\frac{3}{10}$*	conductivity in abamperes/cm^2/esu of field intensity
ampere turns	$4\pi/10$	magnetomotive force in gilberts

* ستارے کی علامت والے سب تحویلی فیزروں میں جہاں اس تعریف میں c کو cgs اکائیوں میں ناپا گیا ہے $c/10^{10}$ کی جگہ 3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اگر زیادہ صحت درکار ہو تو c کی زیادہ درست قیمت کو اس کی جگہ رکھنا ہوگا۔ ڈومنڈ اور کوہن کے مطابق $c = 299792.5$ کلومیٹر فی سکنڈ۔

km/sec. (J. W. M. DuMond and E. R. Cohen, 1961 adjustment of natural constants, to be published in *Annals of Physics* and *Nuovo Cimento*.)

ٹیبل I-2

”خلا“ میں جائز بنیادی برق مقناطیسی رشتے اور مختلف نظاموں میں ان کی شکل

mks (rationalized) (معقول)	Gaussian* (cgs)	Heaviside-Lorentz (cgs)	"Natural" units $c = \hbar = 1$ (rationalized) معقول
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$
$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3}\,dv$	$\mathbf{E} = \int \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3}\,dv$	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3}\,dv$	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3}\,dv$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{r}}{r^3}\,dv$	$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \int \frac{\left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{r}}{r^3}\,dv$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left(\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{r}}{r^3}\,dv$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{r}}{r^3}\,dv$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $c\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $c\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right)$	$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right)$	$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$
$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_z & cB_y & +E_x \\ cB_z & 0 & -cB_x & +E_y \\ -cB_y & cB_x & 0 & +E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}$	$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & +E_x \\ B_z & 0 & -B_x & +E_y \\ -B_y & B_x & 0 & +E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = 4\pi j^j$	F^{ij} کی وہی شکل ہے جو گاسی اکائیوں میں ہے $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = j^j$	F^{ij} کی وہی شکل ہے جو گاسی اکائیوں میں ہے $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = j^j$

* ان درسی کتب میں جن میں گاسی اکائیاں استعمال ہوتی ہیں j کو esu. اکائیوں میں ناپا جاتا ہے۔ اس حالت میں مساوات وہی رہتے ہیں جو یہاں دیے گئے ہیں سوا اس کے کہ j کے ساتھ ایک جزو 1/c. نمودار ہوتا ہے۔

ٹیبل I-3

ماخذ کے ذریعے میدانوں کی تعریف (MKS نظام)

	برقی	مقناطیسی	مساوی ہم تغیری بیان
خلا در سب منبع جات پہنچ کے اندر")	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$	$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}$
مادی ذریعے منبع جات الگ الگ	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$	$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{1}{\epsilon_0}(j^j + j_M^j)$
پہنچ کے باہر منبع جات جن کا تعین اضافتی فنکشن سے ہوتا ہے	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{(-\nabla \cdot \mathbf{P})}{\epsilon_0}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$	$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(j^j + \frac{\partial M^{ij}}{\partial x^i}\right)$
جزوی میدان کی تعریف	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} - (-\mathbf{P})$	$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$	$H^{ij} = \epsilon_0 F^{ij} - M^{ij}$
وسیلوں میں میدانی مساواتیں	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\frac{\partial H^{ij}}{\partial x^i} = j^j$

ٹیبل I-4.

کارآمد اعدادی رشتے

A. کچھ ایٹمی مستقلے*

cgs گاسی	cgs ہیوی سائڈ	mks	نام
$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.039}$	$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.039}$	$\frac{e^2}{4\pi\hbar c\epsilon_0} = \frac{1}{137.039}$	باریک ساخت کا مستقلہ
$\frac{e^2}{mc^2} = 2.81776 \times 10^{-13}$ cm	$\frac{e^2}{4\pi mc^2} = 2.81776 \times 10^{-13}$ cm	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2.81776 \times 10^{-15}$ m	کلاسیکی الکٹرانی نصف قطر
$\frac{\hbar^2}{me^2} = 5.29166 \times 10^{-9}$ cm	$\frac{4\pi\hbar^2}{me^2} = 5.29166 \times 10^{-9}$ cm	$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5.29166 \times 10^{-11}$ m	بوہر نیم قطر

B. وہ رشتے جو اس حالت میں کارآمد ہیں جب کسی ذرہ کی توانائی الکٹران وولٹ میں ناپی جاتی ہے*

الکٹران کے لیے $E_0 = m_0c^2 = 0.51097$ Mev

پروٹان کے لیے $E_0 = m_0c^2 = 938.21$ Mev

1. کسی ذرے کی جس کی حرکی توانائی T اور چارج e ہے، "مقناطیسی استواری" $B\rho$

cgs Gaussian	mks
$B\rho = \frac{10^8}{c}\sqrt{T^2 + 2TE_0} \sim \frac{\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{300}$	$B\rho = \frac{\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{c} \sim \frac{\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{3 \times 10^8}$

2. ایک تار کا کھنچاؤ τ جس میں کرنٹ I بہہ رہی ہے اور جس کا مدار ایک مقناطیسی میدان میں وہی ہے جو T توانائی کے ایک ذرہ کا جس پر الکٹرانی چارج e ہے۔

cgs Gaussian	mks
$\tau = I\sqrt{T^2 + 2TE_0} \times \frac{10^8}{c} \sim \frac{I\sqrt{T^2 + 2TE_0}}{300}$	$\tau c = I\sqrt{T^2 + 2TE_0}$

3. رفتار u، تحرک p، حرکی توانائی T، اور کل توانائی E.

$$\frac{E}{E_0} = \cosh\theta = \frac{T}{E_0} + 1 = \sqrt{\left(\frac{cp}{E_0}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

$$\frac{cp}{E_0} = \sinh\theta = \sqrt{\left(\frac{T}{E_0}\right)^2 + 2\frac{T}{E_0}} = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1} = \frac{(u/c)}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

$$\frac{u}{c} = \tanh\theta = \frac{\sqrt{2TE_0 + T^2}}{T + E_0} = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{E} = \frac{cp}{\sqrt{(cp)^2 + E_0^2}}$$

$$\frac{T}{E_0} = \cosh\theta - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} - 1 = \frac{E}{E_0} - 1 = \sqrt{\left(\frac{cp}{E_0}\right)^2 + 1} - 1$$

* یہاں دی ہوئی اعدادی قیمتیں ان سے ہم آہنگ ہیں جو J. W. M. DuMond and E. R. Cohen, *loc. cit.* نے دی ہیں۔

ضمیمہ II

کارآمد ویکٹر رشتے

ویکٹر تجزیہ سے کچھ مفید ترین فارمولوں کا خلاصہ برق۔مقناطیسی تھیوری کے اطلاق کے لیے ٹیبل II-1. میں سہولت کے لیے دیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ A, B, C, D من مانے ویکٹر میدان ہیں اور ϕ من مانے اسکیلر میدان ہیں واضح ہے کہ ان ویکٹر رشتوں کو جو ویکٹر آپریٹر ∇ پر مشتمل ہیں رسمی طور پر ویکٹر مماثلوں (1) تا (5) سے اخذ کیا جا سکتا ہے اگر یہ یاد رکھا جائے کہ ∇ ایک تفرقی آپریٹر ہے اور ساتھ ہی ایک ویکٹر بھی اور اس لیے سمتی قدروں کے فنکشنوں کے ساتھ ادلا بدلا نہیں جا سکتا اس لیے (7) اور (10) کو اخذ کیا جا سکتا ہے اگر بالترتیب یہ لکھا جائے۔

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\phi_c \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}_c),$$

اور

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{B}_c)\mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}_c - (\nabla \cdot \mathbf{A}_c)\mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}_c,\end{aligned}$$

جہاں زیریں نوشت c یہ ظاہر کرتی ہے کہ فنکشن مستقل رکھا جا رہا ہے اور اسے ویکٹر آپریٹر کے ساتھ پرمیوٹ کیا جا سکتا ہے۔ بشرطیکہ نشان کی تبدیلیوں کا خیال رکھا جائے اگر یہ تبدیلیاں معمول ویکٹر رشتوں کی وجہ سے ظاہر ہوں۔

اس کتاب میں ہم نے ∇ آپریٹر پر مشتمل گبس کا نوٹیشن اور ٹینسر نوٹیشن جس میں ہم ویکٹر کی جگہ α واں جز لکھتے ہیں۔ ایک دوسرے کی جگہ پر استعمال کیا ہے۔ اس دوسرے نوٹیشن میں رشتے (7) اور (10) مندرجہ ذیل طرح سے آئیں گے۔

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi A_\alpha) = \phi \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} + A_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha},$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})|_\alpha = (\nabla \cdot \mathbf{B})A_\alpha - (\nabla \cdot \mathbf{A})B_\alpha = \frac{\partial (B_\beta A_\alpha)}{\partial x_\beta} - \frac{\partial (A_\beta B_\alpha)}{\partial x_\beta}$$

دھیان رکھیے کہ دوہری ہوئی علامت سب اجزا کے اوپر جوڑ ظاہر کرتی ہے۔

ٹیبل II-1

ویکٹر فارمولے

عام رشتے :-

(1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \equiv (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) = (\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{A}) = (\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B})$
$= -(\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{B}) = -(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{A}) = -(\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{C})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$

(3) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0$

(4) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]$
$= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

(5) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{D}$

(6) $\text{grad}\,(\phi\psi) \equiv \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(7) $\text{div}\,(\phi\mathbf{A}) \equiv \nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\mathbf{A}$

(8) $\text{curl}\,(\phi\mathbf{A}) \equiv \nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \phi\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\nabla\phi$

(9) $\text{div}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(10) $\text{curl}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$
$= \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

(11) $\text{grad}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \equiv \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$
$= \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

(12) $\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi$

(13) $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$

(14) $\nabla\times\nabla\phi = 0$

(15) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

خاص رشتے :-

مان لیجیے $\mathbf{r}$ ریڈیس ویکٹر جس کا قدر r ہے بنیادی نقطہ نظر سے x, y, z تک ہے اور $\mathbf{J}$ کوئی مستقل ویکٹر ہے تب :

(16) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$

(17) $\nabla\times\mathbf{r} = 0$

(18) $\nabla r = \mathbf{r}/r$

(19) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$

(20) $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^3) = -\nabla^2(1/r) = 0 \text{ if } r \neq 0$

(21) $\nabla\cdot(\mathbf{J}/r) = \mathbf{J}\cdot[\nabla(1/r)] = -(\mathbf{J}\cdot\mathbf{r})/r^3$

(22) $\nabla \times [\mathbf{J} \times (\mathbf{r}/r^3)] = -\nabla[(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})/r^3]$ if $r \neq 0$

(23) $\nabla^2(\mathbf{J}/r) = \mathbf{J}\nabla^2(1/r) = 0$ if $r \neq 0$

(24) $\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{J} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla(\mathbf{J} \cdot \mathbf{B})$

اینٹگرلی رشتے :-

اگر V ایک حجم ہے جو ایک بند سطح S, سے محیط ہے اور اگر $d\mathbf{S}$ بند حجم سے باہر کی طرف مثبت لیا گیا ہے تو :

(25) $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dv$

(26) $\oint_S \phi\, d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \phi)\, dv$

(27) $\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = \int_V (\nabla \times \mathbf{A})\, dv$

اگر S ایک کھلی سطح ہے جس کی حد کنٹور C, ہے جس کا خطی قطعہ $d\mathbf{s}$, ہے تو :

(28) $\oint_C \phi\, d\mathbf{s} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi$

(29) $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$

ضمیمہ III
خم خطی سمتی قدروں میں ویکٹر رشتے

عام آرتھوگونی خم خطی سمتی قدروں میں ظاہر کیے گئے ویکٹر آپریٹروں کی ایک فہرست طبیعیاتی مسئلوں کے حل کے واسطے اکثر مفید رہتی ہے۔ اِن رشتوں کو اخذ کرنے کے لیے یہ ممکن ہے کہ ہم کارتیسی قدروں میں آپریٹر ∇ کی تعریف اور استحالی مساواتوں سے بالکل رسمی طور پر چل کر دوسرے سمتی قدری نظاموں پر پہنچیں لیکن طبیعیاتی اطلاقوں کے لیے یہ فائدہ مند رہتا ہے کہ گریڈینٹ، ڈائیورجنس اور کرل کی جیامٹریائی تعریفوں سے چلا جائے۔ چاہے پہلے ہم سمتی قدری نظام کا تعین کرلیں اور پھر مطلوبہ عبارتوں کو اخذ کریں یا ہم پہلے ایک عام اخذ جو کسی بھی خم خطی سمتی قدروں کے لیے لاگو ہو حاصل کریں گے جو آرتھوگونی سمتی قدروں کے کسی بھی داہنے ہاتھ والے نظام کے لیے جائز ہوگا جس کے لیے خطی قطعہ کا علم ہو اور تب کارتیسی سلنڈری اور کروی قطبی سمتی قدروں کے لیے مخصوص شکلوں کو دیکھیں گے۔ تین ابعاد میں ایک خطی قطعہ فضا میں ایک انتہائی چھوٹا نقل ہے۔ اگر تینوں سمتی قدروں q_1, q_2, q_3 میں سے صرف ایک کا نقل ہوتا ہے تو مطابقہ خطی قطعہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

$$ds_1 = h_1\, dq_1, \tag{1}$$

ساتھ میں اسی طرح کے اظہار q_2 اور q_3 کے لیے ہوں گے، کسی انتہائی چھوٹے نقل کے لیے:

$$ds^2 = h_1^2\, dq_1^2 + h_2^2\, dq_2^2 + h_3^2\, dq_3^2. \tag{2}$$

اب کسی اسکیلر فنکشن ψ کے گریڈینٹ کے تعین کے لیے ضروری ہے کہ

$$\nabla\psi \cdot d\mathbf{s} = d\psi, \tag{3}$$

جو مکانی نقل، $d\mathbf{s}$ کے لیے ψ کی مطابقہ تبدیلی بتاتا ہے۔ تب:

$$(\nabla\psi)_1 = \lim_{ds_1 \to 0} \frac{\psi(q_1 + dq_1) - \psi(q_1)}{ds_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \qquad (4)$$

ایک گریڈینیٹ جز کی عام شکل ہے :

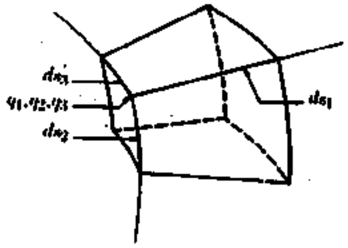
ڈائیورجنس معلوم کرنے کے لیے ہم ایک انتہائی چھوٹے حجم $dv = ds_1\, ds_2\, ds_3$ پر غور کریں گے جو مستقل = q_1 : مستقل = $q_1 + dq_1$ وغیرہ سطحوں سے گھرا ہوا ہے جیسا شکل III-1. میں دکھایا گیا ہے۔ آیئے ہم گاس کے ڈائیورجنس مصدقہ $\int \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, کا اطلاق ایک ویکٹر $\mathbf{A}(q_1, q_2, q_3)$ پر جس کے اجزا A_1, A_2, A_3 ہیں۔ اس طرح انتہائی چھوٹے حجم پر اینٹگرل لے کر کریں $\mathbf{A}$ کے باہر کے سمت کے عمودی جز کا اینٹگرل ان دو سطحوں پر جو بڑھتے ہوئے q_1 کی سمت کے عمودی ہیں یہ ہے :

$$(A_1\, ds_2\, ds_3)_{q_1+dq_1} - (A_1\, ds_2\, ds_3)_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1\, ds_2\, ds_3)\, dq_1$$

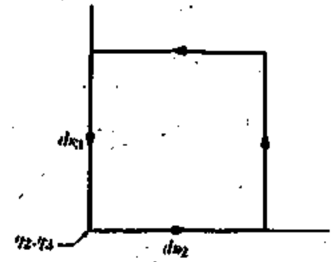
$$= \frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1}\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1}\, dv,$$

اور سطحوں کے دوسرے سیٹوں کے لیے بھی اسی طرح کی عبارت لاگو ہوگی۔ چونکہ ان تین رقموں کا جوڑ، گاس کے مصدقہ کے مطابق $\nabla \cdot \mathbf{A}\, dv$, کے برابر ہے اس لیے صریحی طور پر ڈائیورجنس مندرجہ ذیل سے ملتی ہے:



[شکل III-1. ڈائیورجنس کا حساب کرنے کے لیے حجمی قطعہ]



[شکل III-2. کرل کے q_1 جز کو حاصل کرنے کے لیے q_2, q_3 مستوا میں رقبہ کا قطعہ اینٹگرل کے راستے کی سمت تیر دکھلاتے ہیں]

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_2h_3A_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(h_3h_1A_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(h_1h_2A_3)}{\partial q_3}\right)\quad(5)$$

کسی اسکیلر فنکشن کا لاپلاسی اب فوراً لکھا جا سکتا ہے کیونکہ یہ محض گریڈینٹ کا ڈائیور جنس ہے

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right]\quad(6)$$

کسی ویکٹر کے کرل کے کسی مخصوص جزو کو حاصل کرنے کے لیے ہم ایک انتہائی چھوٹے رقبہ پر جو اس مطلوب جزو کی سمت سے زاویہ قائمہ بناتا ہے اسٹوک کے مصدقہ کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ اس رقبہ پر غور کیجیے جس کا تعین ds_2 اور ds_3 سے ہوتا ہے جیسا شکل III-2. میں دکھایا گیا ہے۔ اسٹوک کے مصدقہ کے مطابق $\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}=\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$, جو اس اطلاق میں مندرجہ ذیل ہو جاتا ہے:

$$(A_2\,ds_2)_{q_3}+(A_3\,ds_3)_{q_2+dq_2}-(A_2\,ds_2)_{q_3+dq_3}-(A_3\,ds_3)_{q_2}=(\nabla\times\mathbf{A})_1\,ds_2\,ds_3.$$

اس لیے

$$(\nabla\times\mathbf{A})_1=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial q_3}\right],\quad(7)$$

اور باقی دو اجزا سمتی قدری مددوں کی چکری ادلا بدلی سے حاصل ہوتے ہیں۔ ٹیبل III-1 میں گریڈینٹ، ڈائیورجنس، کرل اور لاپلاسی کی واضح شکلیں تین سب سے زیادہ عام سمتی قدری نظاموں میں دی گئی ہیں۔ دوسری آرتھوگنی سمتی قدروں کی تعریف کے لیے، دیکھیے، مثال کے طور پر:

Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*.

ٹیبل III-1

سمتی قدری نظام

کارتیسی سمتی قدریں	سلنڈری سمتی قدریں	کروی قطبی سمتی قدریں
آرتھوگونل خطی قطعے		
dx, dy, dz	$dr, r\,d\varphi, dz$	$dr, r\,d\theta, r\sin\theta\,d\varphi$
گریڈینٹ کے اجزا		
$(\nabla\psi)_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}$	$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$	$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$
$(\nabla\psi)_y = \frac{\partial\psi}{\partial y}$	$(\nabla\psi)_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$	$(\nabla\psi)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$
$(\nabla\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$
A کا ڈائیورجنس $\nabla\cdot\mathbf{A} =$		
$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
کرل A کے اجزا		
$(\nabla\times\mathbf{A})_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$	$(\nabla\times\mathbf{A})_r = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)$	$(\nabla\times\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)$
$(\nabla\times\mathbf{A})_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$	$(\nabla\times\mathbf{A})_\varphi = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)$	$(\nabla\times\mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$
$(\nabla\times\mathbf{A})_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	$(\nabla\times\mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)$	$(\nabla\times\mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$
ψ کا لاپلاسی = $\text{div grad}\,\psi = \nabla^2\psi$		
$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$

فہرست کتب

تصانیف جن میں زیادہ تر کلاسیکی برقی حرکیات کا یا اُس کے کسی پہلو کا ذکر ہے

ABRAHAM, M., AND R. BECKER, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*, from the 8th German ed. (1930), Blackie and Son, 1932; from the 14th German ed. (1949), Hafner Publishing Co., 1950.

ALFVÈN, H., *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, 1950.

BECKER, R., *Theorie der Elektrizität*, Band II, Teubner, 1933 (reprinted by J. W. Edwards, Ann Arbor, 1946).

BLEANEY, B. AND B. I. BLEANEY, *Electricity and Magnetism*, Oxford, Clarendon Press, 1957.

BODE, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, 1945.

CHANDRASEKHAR, S., *Plasma Physics*, Chicago University Press, 1960.

CONDON, E. U., Principles of Microwave Radio, *Revs. Modern Phys.* **14**, 341 (1942).

COSLETT, V. E., *Bibliography of Electron Microscopy*, Arnold, 1950.

COWLING, T. G., *Magnetohydrodynamics*, Interscience Publishers, 1957.

ELSASSER, W. M., Hydrodynamic Dynamo Theory, *Revs. Modern Phys.* **28**, 135 (1956).

HARNWELL, G. P., *Principles of Electricity and Electromagnetism*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1949.

HERTZ, H., *Electric Waves*, Macmillan (London), 1893.

JEANS, J. H., *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, 5th ed., Cambridge University Press, 1925.

KLEMPERER, O., *Electron Optics*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1953.

KRAUS, T. D., *Electromagnetics*, McGraw-Hill, 1953.

LAMONT, H. R. L., *Wave Guides*, 3rd ed., Methuen, 1950.

LANDAU, L. D. AND E. M. LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields* (trans. from the Russian), Addison-Wesley, 1951.

LANDAU, L. D. AND E. M. LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media* (trans. from the Russian), Addison-Wesley, 1960.

LORENTZ, H. A., *The Theory of Electrons*, 2nd ed., Teubner, 1909 (reprinted by Dover, 1952).

MARTON, C., AND OTHERS, *Bibliography of Electron Microscopy*, U. S. Government Printing Office, 1950.

MASON, M., AND W. WEAVER, *The Electromagnetic Field*, University of Chicago Press, 1929.

MAXWELL, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd ed., Oxford University Press, 1904.

PLANCK, M. K. E. L., *Theory of Electricity and Magnetism*, Macmillan, 1932.

ROHRLICH, F., *The Classical Electron*, in *Lectures on Theoretical Physics*, Interscience Publishers, 1960.

ROSENFELD, L., *Theory of Electrons*, North-Holland Publishing Co. (Amsterdam), 1951.

SCHELKUNOFF, S. A., *Electromagnetic Waves*, Van Nostrand, 1943.

SCHOTT, G. A., *Electromagnetic Radiation*, Cambridge University Press, 1912.

SLATER, J. C., *Microwave Electronics*, Van Nostrand, 1950.

SLATER, J. C., Microwave Electronics, *Revs. Modern Phys.* 18, 441 (1946).

SLATER, J. C., AND N. H. FRANK, *Electromagnetism*, McGraw-Hill, 1947.

SMYTHE, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1950.

SOMMERFELD, A., *Electrodynamics; Lectures on Theoretical Physics*, Vol. III, Academic Press, 1952.

SPITZER, L., *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience Publishers, 1956.

STRATTON, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, 1941.

VAN VLECK, J. H., *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*, Clarendon Press, Oxford, 1932.

WEBER, E., *Electromagnetic Fields, Theory and Applications*, Vol. 1, *Mapping of Fields*, Wiley, 1950.

ZWORYKIN, V. K., G. A. MORTON, E. G. RAMBERG, J. HILLIER, AND A. W. VANCE, *Electron Optics and the Electron Microscope*, Wiley, 1945.

ریاضیاتی تصانیف

BYERLY, W. E., *Fourier's Series and Spherical Harmonics*, Ginn, 1893.

CHURCHILL, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, 1941.

COURANT, R., AND D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I, Springer, 1931; *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience Publishers, 1953.

INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Longmans, 1927 (reprinted by Dover, 1944).

JAHNKE, E., AND F. EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (Tables of Functions), Teubner, 1938 (reprinted from 4th rev. ed. in English and German by Dover, 1945).

JEFFREYS, H. AND B. S., *Methods of Mathematical Physics*, 3rd. ed., Cambridge University Press, 1956.

KELLOGG, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Springer, 1929 (reprinted by Frederick Ungar Publishing Co., n.d.).

MACROBERT, T. M., *Spherical Harmonics*, 2nd ed., Dover, 1948.

Margenau, H., and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, Van Nostrand, 1943.

Morse, P., and H. Feshbach, *Methods of Mathematical Physics*, McGraw-Hill, 1953.

Pipes, L. A., *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, McGraw-Hill, 1946.

Synge, J. L., and A. Schild, *Tensor Calculus*, University of Toronto Press, 1949.

Watson, G. N., *Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Macmillan, 1944.

Weatherburn, C. E., *An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus*, Cambridge University Press, 1938.

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, 1927.

اضافیت کے نظریے پر تصانیف

Bergmann, P. G., *An Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, 1942.

Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, 4th ed., Princeton University Press, 1953.

Fock, V., *The Theory of Space Time and Gravitation*, Pergamon Press, 1959.

Lorentz, H. A., A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, *The Principle of Relativity*, Methuen, 1923 (reprinted by Dover).

Møller, C., *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, 1952.

Pauli, W., Relativitätstheorie, *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* V, Pt. 2, 539, Teubner, 1921.

Tolman, R. C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford University Press, 1934.

Tolman, R. C., *The Theory of the Relativity of Motion*, University of California Press, 1917.

تصنیفات

جن میں کلاسیکی برقی حرکیات پر مواد ہے یا جو اُس سے متعلقہ ہیں

Bergmann, P. G., *Basic Theories of Physics: Mechanics and Electrodynamics*, Prentice-Hall, 1949.

Blatt, J. M., and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, 1952.

Born, M., *Optik*, Springer, 1933.